大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 9 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.1, 1-13. July 1999

수학교육의 進步와 展望

平林 一榮*

1. 오늘날 수학교육의 상황

나는 1947년에 대학을 졸업하고 그후 수학을 다소 공부하였는데, 본격적으로 수학교육에 관여하기 시작한 것은 1960년경이다. 그 무렵 일본의 대학에서 수학교육의 대학원 강좌가 설치된 곳은 히로시마대학과 동경교육대학(현재의 쯔꾸바 대학)뿐이었다. 1970년이 되어 처음으로 내가 재직했던 히로시마대학에도 수학교육학의 박사과정이 생겼는데, 나는 그때 조교수였다. 그후 한국에서도 몇몇 사람이 연구하러 와서 학위를 취득하여 돌아갔는데, 고려대학교의 김정환, 서울대학교의 우정호, 공주교육대학교의 임문규 등은 히로시마 대학원 출신 박사이다. 그후 일본의 많은 대학에도 수학교육의 대학원 강좌가 설치되어, 수학교육 연구도 학문으로써 인정되게 되었다. 미국에서는 일찍부터 수학교육학이 대학의 강좌로 인정되어 박사학위를 취득한 사람이 많았지만, 유럽에서는 일본과 거의 같은 상황이었다. 일본의 대학은 미국보다는 유럽을 모방하고 있었으므로, 수학교육학의 학문적 자립은 유럽과 같이 늦어졌다고 말할 수 있을 것이다.

나는 이와 같은 수학교육학의 발전과정 속에 살아왔기 때문에, 그 과정을 맨 처음부터 상세하게 알 수 있었다. 수학교육학의 발전을 포함하여 제2차 세계대전후의 수학교육 진보의 특색으로써 다음과 같은 점에 주목할 수 있다.

1) 수학교육의 학문적 자립

수학교육은 이제까지는 수학자가 겸해서 하는 일로 여겨졌지만, 오늘날은 수학자와는 따로 수학교육의 전문적인 연구자가 출현하였다.

2) 수학교육의 대중화

옛날의 산수는 초등교육, 수학은 중등교육의 교과로써 거의 관계가 없는 교육목표를 가지고 있었지만, 지금은 양자를 일관되게 모든 학생들이 학습하는 교과가 되었다.

특히 후자는 역사적으로 보더라도 굉장히 경이적인 것이며, 그것이 다시 오늘날의 교육에 있어서 새로운 문제를 만들어 내고 있다. 이것은 옛날의 상황을 회고하고 그것과 비교하면 잘 알 수 있다. 그러기 위해서는 죄송하지만, 나 자신의 生育史를 포함한 옛날 일들을 얘기하는 것이 좋을 것이라고 생각한다.

나는 1923년에 일본 중부 산간 지방의 작은 마을에서 출생했다. 초등학교 1, 2학년 때에는 두 학년을 합하여 40명 정도로 복식 수업을 하였다. 3학년이 되어 다른 곳의 분교에서 온

* 廣島大學 名譽敎授

학생들과 합하여 겨우 한 학급이 되어 6학년까지 거기서 공부하였다. 졸업하고 나 혼자 舊制度의 중학교에 진학하여 5년간의 중등교육을 받았지만, 다른 친구들은 모두 고등 초등학교에서 2년간 초등교육을 더 받았다.

어떻게 나 혼자만 중학교에 진학할 수 있었는지는 모르지만, 당시 중학교에 진학하는 것은 대단한 행운이었고, 전국적으로 초등학교에서 중등학교에 진학하는 학생은 20%도 되지 않았다. 중학교에서 구제도의 고등학교와 고등전문학교에 진학하는 학생은 또 그 반도 채 되지 못하였으며, 더욱이 대학까지 진학한 것은 마을의 역사에서는 내가 처음이었다. 그러나 최근 고향을 찾아가 보면, 거의 모든 아이들이 대학까지 진학해서 공부하고 있다. 옛날과 비교하면 놀랄 정도로 문자 그대로 격세지감을 느낀다. 오늘날은 중학교 3학년까지 의무교육이고 그의 95%는 고등학교까지 진학하고 또한 그의 1/3이상이 대학에 진학한다.

그러나 주목하고 싶은 것은 그러한 다수가 중등교육까지 받게 되었음에도 불구하고 적어도 수학에 관한 한 그 커리큘럼은 그 질과 정도에서 옛날과 별로 변화가 없는 것이다. 즉, 옛날 구제도 중학교에 진학한 20%채 되지 않는 학생에게 주어졌던 수학이 거의 모든 학생에게 주어지고 있다는 것이다. 옛날에도 나의 동급생으로 기하의 논증을 알았던 학생은 그다지 많지 않았다고 생각한다. 그러나 오늘날에는 논증이 모든 학생에게 필수로 되어 있다.

영국의 수학교육학자인 Howson은 커리큘럼을 계획된 커리큘럼(intended curriculum), 실시된 커리큘럼(implimented curriculum), 학습된 커리큘럼(attained curriculum)의 3가지로 구별하고 있다(Howson & Wilson, 1986). 이 3가지 커리큘럼이 일치한다면 그것은 대단한 것이 되겠지만, 현재 일본에서는 교육부가 계획한 커리큘럼은 어린이에게 거의 학습되지 않는 것 같다. 내가 보기에는 고등학교의 수학은 일부의 학생을 제외하고는 거의 학습되지 못하거나 그와 비슷한 수준의 수학으로 구성되어 있는 게 아닌가하고 생각된다.

현재 일본 사회의 성인을 대상으로 수학의 학력 조사를 한다면, 평균 몇 학년 정도의 수준일까? 중학교까지는 의무교육이므로 중학교 3학년 정도의 수학은 모두 할 수 있을 거라고 생각할지도 모르지만 절대로 그렇지 않을 것이다. 초등학교 6학년 정도일 것이라고 생각할지 모르지만 나는 그 정도도 위험하고, 아마 초등학교 4학년 정도가 아닐까 생각한다. 예를 들면, 분수 계산은 초등학교 5학년의 내용이지만, 그것조차도 하지 못하는 사람이 꽤 많지 않을까 생각한다.

물론 그러한 조사를 드러내 놓고 할 수는 없다. 또한 수학의 학력은 단지 지식 · 기능만이 아니며 그것들을 통해 길러진 사고 방법과 태도이므로, 그것은 지식 · 기능을 잊어버려도 오래 동안 머리 속에 남아 있다고 주장하는 사람이 있을지도 모른다.

그러나 공정하게 보아서 현재의 수학교육은 일본에서는 성공은 고사하고 대단히 실패하고 있는 게 아닌가 하고 생각된다. 그럼에도 불구하고 수학을 모든 학생이 공부하는 것은 왜일까? 그것은 강제로 受驗의 필수과목으로 하고 있고, 그것을 인정하는 학력 사회라고 하는 큰 배경이 있기 때문이다. 즉, 수험으로 협박하여 어린이에게 수학을 학습시켜 왔다고 말할 수 있다.

그러나 최근에 와서 일본에서는 이러한 협박이 효과가 없어져, 학생은 수학을 싫어하는 정도가 아니라 아예 하지 않게 되었다. 특히 고등학교에서는 '수학과의 이별'이 일어났다. 그리고 수학을 수험과목으로 하는 대학에는 가

지 않게 되고 그러한 대학은 경영이 곤란한 사태에 이르렀다.

그뿐 아니라, 최근 일본에서는 특히 초 · 중학교에서 수업을 할 수 없는 학교와 학급이 늘어났다. 옛날과 달라서 어린이가 책상 앞에 묵묵히 앉아 있지 못하고 떠들던가 날뛰어서 수업이 안되고 때로는 학교생활 자체가 안되기까지 한다.

그 원인은 아직까지 확실하지 않은데, 사회와 가정의 기본적인 교육력이 없어진 것이 가장 큰 원인이라고 생각되지만, 매스 미디어나 환경 호르몬의 탓으로 돌리는 사람들조차있다. 우리들이 흘려들을 수 없는 것은 학교의 교과, 특히 수학이 너무 어려운 것을 원인으로 들고 있는 사람도 있다는 것이다. 즉 오늘날의 학교를 황폐시킨 원인이 수학 때문이라는 것이다.

일본은 선진국이라고 말해지고 있지만, 이러한 학교의 황폐에 있어서도 선진국이 될 것 같다는 것을 한국의 여러분도 충분히 알았으면 한다. 수학교육을 지탱해 온 이제까지 그다지 의식하지 못한 기본적인 교육 기반이 크게 무너져가고 있는 것 같다. 이것을 어떻게 회복할 것인가 하는 것은 오늘날의 수학교육뿐만 아니라 학교교육의 화급한 과제이다. 이제까지는 일정한 교육 내용을 설정하여 그것을 얼마나 효과적으로 가르칠 것인가, 즉 지도법이 수학교사의 최대의 관심사였다. 그러나 이제는 수학을 왜 가르치는지, 수학이란 어린이에게 있어서 무엇인지라고 하는 말하자면 교육철학이 교사에게도 더욱 필요하게 되었다. 그런 점에서 볼 때 현행의 전통적 수학교육은 내용도 방법도 근본적으로 변경될 가능성도 있다. 수학교육은 이미 수학자만의 부수적인 일로 간주해서는 안 될 것 같다. 수학자만이 아니라 수학교육 연구자와 그 관계자가 수학교육 고유의 연구 성과를 가지고 교육계를 지도해야 하는 시대가 온 것 같다.

이하에서는 이와 같은 수학교육학의 구체적인 성과와 그 전개 가능성에 대하여 몇 가지 토픽을 다루고자 한다.

2. 수학교육 목표론 (Why Math?)

수학교육의 목표는 일본에서도 교육부의 '학습지도요령(course of study)'에 확실하게 언급되어 있고, 일반 교사는 그것을 충분히 숙지하고 있겠지만 최근에 와서 '무엇 때문에 수학을 하는가? (Why Math?)'라고 하는 것이 다시 문제가 되고 있다. 그것도 교사들 사이에 뿐만 아니라 학생들 사이에서도 심각하게 문제시되고 있는 것 같다.

그것은 수험이 점점 어렵게 되고 학생은 부모와 교사로부터 빈번히 공부를 하도록 강요당하게 되었으므로 학생은 조금 반항적으로 되어 그러한 것을 생각하게 되었다고 본다. 훨씬 전의 일이지만 나는 TV에서 다음과 같은 장면을 보았다: 중학교의 수학 시간이었고, 방정식을 공부하고 있었다. 한 학생이 갑자기 일어서서 선생님에게 다음과 같은 질문을 하였다. '우리 집은 식당을 하고 있는데, 아버지는 아침부터 밤까지 요리를 만들고 있습니다만 제가 보기에 아버지는 한번도 방정식을 푼 적이 없습니다. 나는 앞으로 장래에 아버지의 뒤를 이어서 이 식당을 하지 않으면 안됩니다. 그런 제가 왜 필요하지도 않은 방정식을 공부해야만 합니까?'

교사는 이런 상황에서 어떻게든 학생을 설득하였지만, 수업이 끝나 교무실에 돌아와서 스스로 고민하기 시작했다. '나는 어째서 필요하지도 않은 방정식을 그 학생에게 가르치지 않으면 안 되는가?' 그래서 동료 교사와 여러

가지로 논의하였지만 좀처럼 결말이 나지 않았다. 여기서 나는 TV를 껐다.

교사는 학생을 어떻게든 설득할 수 있었는지 모르지만 자기 자신을 납득시킬 수는 없었던 것 같다. 이 교사는 틀림없이 수학적으로는 유능할지 모르지만 교육 철학적으로는 무장되어 있지 않았다고 말할 수 있다. 이것은 현재에도 수학교육학이 아직 미숙하기 때문이라고도 말할 수 있다.

이후에 나는 대학의 수학교육법 강의에서 목표론을 이야기하기 전에 위의 TV 에피소드를 말하고 '만약 제군들이 이 교사의 입장이었다면 그 학생을 어떻게 설득할 것인가?'라는 테마로 리포트를 쓰도록 하고 있다. 리포트 중에는 다음과 같은 재미있는 내용이 있었다. '지금은 식당이 경기가 좋더라도 장래에는 잘 되지 않을 지도 모른다. 그 때에는 수학이 필요한 직업을 얻지 않으면 안 된다.', '여하튼 수험에는 필요하니까 수학을 하지 않으면 상급학교에 진학할 수 없다. 대학을 나오지 않으면 좋은 직업을 얻을 수 없다.' 등등. '왜 수학인가?'라는 문제는 대개의 수학교육학 서적의 권두에서 다루고 있다. 오늘날 이 문제에 대한 이해는 교사의 단순한 교양이 아니라 필수적인 철학이라고 말할 수 있다. 그리고 모든 철학이 그러하듯이 여러 가지 사고 방법이 있지만 각각의 교사가 이론적으로도 사회적으로도 실천적으로도 건전하고 스스로 납득이 가는 사고방법을 확실히 가지고 자신 있게 학생에게 접할 필요가 있다. 그렇지 않으면 학생마저 허무주의로 빠져버릴 수 있기 때문이다.

이제까지의 저명한 수학교육자와 그 연구자는 각각 고유한 교육 목표론을 기초로 하여 그의 연구와 실천을 전개하고 있다. 역사적으로 유명한 것은 1901년 영국 Perry의 글래스고우에서의 강연이다. 잘 알고 있는 바와 같이 그의 '수학의 유용성'에 대한 주장은 오늘날에도 수학교육 목표론으로써 비판적으로 검토될 가치가 있다.

나는 1970년경 영국의 Griffis & Howson 공저에서 본 다음과 같은 수학교육의 네가지 이유가 대단히 명쾌하고 공명할 수 있는 것이었다.

(1) 언어로써(as a language)

(2) 두뇌의 훈련으로써(as a training ground)

(3) 도구로써(as a tool)

(4) 그 자체가 배울 가치가 있는 교과로써 (as a subject worthy of study)

저자들은 이것이 일반적으로 쉽게 받아들일 수 있는 목표일 것이라고 말하고 있는데 나도 그렇게 생각한다.

(1)은 수학을 일종의 언어로 보고 있는 점에서 주목된다. 인간은 언어를 조작하는 동물이므로, 수학이 언어라고 하는 것은 수학은 모든 어린이에게 필요한 교과라고 하는 것이다.

(2)는 쉽게 말하면, '수학을 하면 머리가 좋아진다.'라고 하는 것이다. 정말 그런지 어떤지에 대해서는 여러 가지 논의가 있다. '오히려 나빠진다.'라고 하는 사람까지 있지만 그것은 하는 방법에 따른다고 하는 것이 정설이다. 그렇다면 어떤 방법이 좋을까 하는 것에 대해서도 여러 가지 논의가 있다. 이러한 논의는 형식도야의 가능성, 학습의 전이 가능성 등 금세기 초두부터 여러 가지 형태로 행해지고 있지만 오늘날까지 아직 완성되지 못하고 있다.

(3)은 수학은 과학에서도 일상생활에서도 유용한 도구라는 주장인데, 그것은 사람에 따라 유용성의 범위 정도도 크게 다르다. 학교의 수학은 모든 학생에게 공통적으로 유용한 부분이겠지만 그것의 결정도 그다지 명확하지는 않다. 초등학교 수학은 대개 이러한 공통부분에

속하겠지만 중학교 이상이 되면 확실하지 않다. 어떤 미국인은 고등학교의 수학을 필요로 하는 것은 한 세대의 2.5%로, 나머지 97.5%는 필요하지 않다고 말하고 있다. 이러한 수학을 모든 학생에게 부과하여 그것도 별로 성공하지 못하고 있는 것이 일본의 현 상황인데 한국에서는 어떠할까요?

(4)는 유명한 영국의 등산가가 '산이 있으니까 오른다.'고 말한 것같이 '재미있으니까 수학을 한다.'라고 하는 것이겠지요. 더 고상하게 말하면 프랑스의 수학자 Dieudonné가 말한 바와 같이 '인간정신의 光榮'을 위하여 한다고 하는 사람도 있다. 재미있다고 말하더라도 그 질과 정도가 여러 가지겠지만, 수학의 이러한 재미가 어린이에게 그것을 학습하게 하는 것은 부정할 수 없고, 그것은 또한 좋은 일이다. 수학을 재미있게 가르쳐서 가능한 한 많은 어린이가 수학을 즐기는 것은 필요하다. 최근 일본에서는 수학은 뱀이나 전갈을 보듯 꺼려하고 있다. 재미있지도 않은데 무리하게 시킨다고 생각하는 것이다. 일본 어린이에게 야구를 하지 말라고 말하면 폭동을 일으킬지도 모르지만 수학을 하지 말라고 말하면 너무너무 기뻐할 것이다. 오늘날과 같이 모든 어린이가 중학교까지 진학하게된 중등교육 대중화의 시대에서는 단지 수학을 가르치는 것만으로는 끝나지 않게 되어 최근에는 수학을 가르치고 배우는 이유와 목적까지 문제시하지 않으면 안된다.

3. 수학 인식론의 대두(What Math?)

이상과 같은 목표론적 반성은 최근에 와서 더욱 철저하게 고찰되어 왔다. 물론 수학은 유용하지만 그 유용성은 어디에서 오는 것인가 또 그와 같은 수학의 본질은 어디에 있는가 라고 하는 문제이다. 간단히 말하면 '수학이란 도대체 무엇인가?(What Math)'라는 문제이다.

이와 같은 고찰을 학문적으로는 '인식론'이라고 한다. 그리고 최근의 수학교육 연구에서 세계적으로 주목되는 것은 이러한 수학 인식론적 연구의 발전이다. 이제까지 이러한 연구는 극히 일부의 수학자로 수학기초론, 수리철학이라 불리는 분야의 사람들이었지만 최근에는 일반 심리학자, 철학자와 함께 수학교육 관계자도 이에 관여하게 되었다. 가장 현저한 예는 스위스의 심리학자 Piaget의 '발생적 수학 인식론(genetic epistimology of mathematics)'이다. 피아제는 심리학자로 알려져 있지만 오히려 인식론을 전공하는 철학자라고 생각할 수 있다. 인간은 어떻게 수학적 지식을 획득하는지를 역사적이 아니라 심리 발생적으로 연구한 사람이다. 이미 타계했지만 오늘날에는 구성주의적 수학교육론 특히 급진적 구성주의 수학교육론으로써 구체적인 형태로 학교수학의 교수방법에도 그 영향을 미쳤다. 문제는 다음의 두 가지 점에 있는 것 같다. 첫째, 수학은 인간이 그 경험 속에서 스스로 만들었는지 그렇지 않으면 자연계의 사물과 같이 예를 들어 신으로부터 주어져서 인간과 무관하게 존재하는지 하는 문제이다. 이것은 일반적으로는 인간과 무관계하게 절대적 진리가 존재하는가 라고 하는 문제이다. 둘째는 어느 것으로 하더라도 인간은 수학을 어떻게 획득 또는 이해하는가 라고 하는 문제이다. 일반적으로 이 문제는 진리가 존재한다고 하더라도 인간은 어떻게 그것을 인식하는가? 라는 형태로 받아들여지고 있다. 첫 번째의 문제는 전통적인 인식론에서는 '존재론(ontology)'이라는 학문분야에 해당하는 수학에 본질론으로도 말할 수 있다. 두 번

째의 문제는 좁은 의미의 인식론이라고 말해도 좋지만 '활동의 이론(theory of action)'으로도 말해진다.

우선 첫 번째 문제에서, 수학을 인간이 만든 것이라고 한다면 수학적 연구의 성과는 '발명'이라고 말할 수 있다. 그렇지 않고 수학은 이미 존재한 것이라고 한다면 인간은 그것을 '발견'하는 것에 지나지 않게 된다. 후자의 예는 플라톤니즘이며, 예를 들어 옛날부터 논증기하는 이미 존재하는 도형에 대한 관념 세계의 이론으로 생각되어 왔다. 오늘날 수학교육에서는 어느 쪽으로 생각되고 있을까? 참고로 말하면 유명한 수학자인 Hadamard는 '수학적 분야에서의 발명의 심리'라는 저서에서, 그는 조금 망서리면서도 발견이 아니라 발명으로 하고 있다.

두 번째 문제는 명백히 첫 번째의 문제 즉 수학의 본질론과도 관계가 있다. 지식이 인간에 의하여 만들어지거나 인간과 무관계하게 이미 존재한다고 하더라도, 어린이 자신이 그것을 스스로 구성함에 따라 처음으로 이해하던가 학습할 수 있다고 하는 사실은 교육계에서는일찍부터 의식되어 왔다. 모든 구성주의(constructivism)라고 하는 것이 그것이다. 그러나 예를 들어 플라톤니즘 입장에 선다면 어린이는 처음부터 구성하는 것이 아니라 이미 어떤 지식을 이해하는 데에 편의적으로 스스로도 구성해본다고 하는 것이므로 재구성주의(re-constructivism)이라고 해야 할 것이다. 이런 형태의 구성주의는 이미 근대교육의 아버지라고 하는 Pestalozzi의 유명한 '直觀'의 개념에도 볼 수 있다. 그의 직관은 그때까지의 Comenius 등의 직관 개념과 구별되어 '구성적 직관'이라고 말해지고 있다. 그리고 수학이든 무엇이든 어린이 자신의 활동을 통하여 어린이에게 지식을 구성적으로 획득시키려고 하는 생각은 여러 가지 형태로 근대 교육법의 가장 큰 특색 중의 하나이다. 예를 들면 $2 \times 3 = 6$ 과 같은 구구단에서도 처음부터 '암기'시키지 않고, 정사각형의 타일을 배열하여 확인시킨다든지, $2+2+2$와 같다는 것을 조사하게 한다든지 여러 가지로 연구하여 어린이 자신에게 구성하게 하는 것이 오늘날 구구단 지도의 상식이 되었다.

그러나 이와 같은 교수법도 학년이 올라감에 따라 점점 귀찮게 되는지 주입식으로 변하여 가는 경우가 많다. 예를 들면 나의 초등학교 때도 그랬지만, '분수로 나눌 때는 분모 분자를 거꾸로 하여 곱한다고 기억해 두자'고 처음부터 규칙을 제시하고 나중에 연습해서 이러한 지식을 정착시키는 것이 행해졌다. 지금도 고등학생쯤 되면 교사는 흑판만 향하여 마치 학생보다도 흑판을 가르치고 있는 것 같은 교수법이 되어버리는 것 같다.

현재에도 학생 자신에게 수학을 재구성시키는 것이 수학을 보다 잘 이해시키는 방법으로 되어 있지만, 이러한 구성주의는 아직 온건한 편이다. 거기에는 이미 수학이 존재한다고 하는 신념의 바탕에서 그것을 이해하는 수단으로 구성주의가 사용되는 것에 지나지 않는다.그러나 既成의 수학을 이해시키는 것만이 아니라 어린이 자신에게 수학을 만들도록 하는 것이 일본의 초등학교에서는 가끔 보여진다. 예를 들면 '어린이 나름대로 생각하게 한다.'라든가 '자유롭게 자신의 의견을 말하게 한다.'와 같은 수업을 하는 교사는 자주 그러한 주장한다. 이것은 위에서 말한 '존재론'의 수준에서 이미 구성주의를 주장하는 것으로 존재 자체를 인간이 구성한 것이라고 하는 신념이 뿌리 박고 있다. 이와 같이 '활동이론' 뿐만 아니라 '존재론'에서도 인간에 의한 지식의 구성을 주장하는 것이 '급진적 구성주의(radical constructivism)' 사람들의 입장이다. 미국의 Galsersfeld 등은 이와 같은 입장이다.

이와 같은 급진적 구성주의에 선 수학교육은 얼핏 방임주의와 같이 보여진다. 만약 어린이가 좋아하는 데로 생각하게 한다면 어린이는 교사의 관점에서 보면 틀린 것을 구성할지도 모른다. 실제로 어린이에게 자유롭게 생각하게 하면 교사도 수습할 수 없는 사태가 될 위험이 있다. 그럴 때 어떻게 하느냐 특히 초등학교에서는 어린이에게 대담하게 자신의 생각을 발표하게 한다던가 토론하게 하는 경우가 자주 있지만 이것은 그러한 귀찮은 경우가 되는 것을 각오하지 않으면 안 된다.

그러나 급진적 구성주의자는 이점에 대해서는 대단히 낙관적으로 보인다. 그런 어린이도 처음에는 잘 되지 않지만 스스로 납득할 수 있도록 수정할 것이라고 보는 것이다. 그리고 그러한 교육이야말로 진정 어린이 장래의 발전을 기대할 수 있다고 말한다. 실제로 수험공부에서 기계적인 반응만으로 훈련된 수험 천재는 대학에 입학하면 갑자기 열등생으로 떨어지는 것 같다. 정말 자기 스스로 생각하는 경험이 없이는 주어진 문제를 敎範대로 풀 수도 없고, 본적도 없는 새로운 문제에 도전하는 자세도 전혀 되지 않기 때문이다.

그러나 현재의 학력사회, 수험사회에서는 급진적이 아니더라도 구성주의와 같은 새로운 지도법이 그다지 환영받지 못하는 것 같다. 이러한 상황에서 수학교육은 어떻게 하면 좋을까? 이하에서는 이러한 문제를 가능한 한 구체적으로 생각해 보고 싶다.

4. 급진적 구성주의의 이해

위에서 인식론에 두 가지 분야가 있다고 말하였다. 하나는 '존재론'으로 그것은 인식의 대상에 관한 논의이다. 또 하나는 '활동의 이론'으로 그 대상의 인식방법에 관한 이론이다. 학교에서 교과교육으로 말하면 전자는 학습 내용론, 후자는 학습 방법론에 해당한다. 수학에서 인식(학습)은 교사가 대행할 수 있는 것도 아니고 강요할 수 있는 것도 아니며 인식(학습)의 주체인 학생자신이 하는 것이라는 점에서는 상당히 의견이 일치하는 반면, 인식(학습)의 대상까지도 그 주체인 학생자신이 구성하는지 어떤지에 대해서는 의견의 차이가 크다. 즉, 학생은 완성된 수학을 배울 뿐인가 그렇지 않으면 스스로 수학을 만드는 것인가 하는 문제이다. 이것은 존재론에 있어서의 의견 차이이다.

완성된 수학을 구성적으로 이해한다고 하는 의미의 구성주의는 찬성하는 사람이 상당히 많지만, 수학 그 자체도 학생자신이 만들어낸다고 생각하는 급진적 구성주의에는 많은 사람이 쉽게 찬성하지 않는 것 같다. '어린이에게 수학을 만들게 하는 것은 되지도 않는 일이다. 단지 완성된 수학을 배울 뿐이다.'고 생각하기 때문이다. 그러나 Glasersfeld와 같은 급진적 구성주의자는 어린이라도 스스로 수학을 만들어 내는 것이 가능하다고 주장하고 있는 것 같다. 일본에서도 초등학교 수학지도자 중에는 '어린이의 수학'이라든가 '어린이 나름대로 수학을 만들어 내는 수업'등을 권장하는 발언을 자주 본다. 나 자신 급진적 구성주의자는 아니지만, 그들의 주장을 어느 정도는 이해한다.

미국의 수학자 Hersh는 다음과 같이 말하고 있다.

'전형적인 수학연구자는 週中에는 플라톤주의자이지만, 일요일이 되면 갑자기 형식주의자가 된다.'

'이것은 수학자라도 연구 중에는 예를 들면

자연계의 사물이나 현상과 같이 수학도 객관적으로 주어진 것이라고 하는 감각으로 연구에 종사하고 있다. 그러나 어느 정도의 연구성과를 얻어서 그것을 반성한다든지 정리할 때에는 역시 수학도 처음부터 자신이 만든 것이라고 인정하지 않을 수 없다. …'

'전형적 수학연구자'의 기분을 고찰하면, 이와 같이 될 것으로 생각한다.

예를 들면 '군론'이라는 수학이론은 몇 개의 공리나 정의에 의하여 전체구조가 설정된다. 이들 공리는 역사적으로 누구였는지는 모르지만, 틀림없이 인간에 의하여 설정된 것이다. 그러나 이들 공리에 따라 정해지는 수학적 구조 자체는 수학자에게는 미지의 것으로 객관적으로 존재하는 자연계와 같이 이제부터 탐구해야 할 세계이다. 공리와 정의의 설정은 '발명'이며, 거기에는 형식주의적인 구성법이 취해지지만, 일단 그것들이 설정되면, 그 후의 수학적 연구는 '발견'의 연속이라고 말해도 좋다. 즉, 수학자는 스스로 구성한 것을 어디까지나 객관적으로 주어진 것 같이 탐구한다. 이것은 보통의 자연과학자가 처음부터 존재하고 있는 자연계의 대상을 탐구하는 것과는 크게 다르다고 말할 수 있다.

Glasersfeld에 의하면, 유아도 수학자와 같은 인식과정을 찾아간다는 것이 Piaget에 의해 지적되고 있다고 한다. 즉, 유아도 자신의 세계를 스스로 구성하면서 후에는 그것을 어디까지나 외부로부터 주어진 것과 같이 생각하며, 지적 세계를 넓혀간다고 하는 것이다. Glasersfeld는 이러한 인식에서, Piaget도 (숨겨진) 급진적 구성주의자였고 그런 의미에서 자신은 Piaget의 후계자라고 말하고 있다. 그렇다면, 수학자도 유아도 구성주의자, 더욱이 급진적 구성주의자가 된다. 아니, 급진적 구성주의야말로 인간의 가장 자연스런 인식태도라고 말할 수 있을지도 모른다.

실제로 이와 같은 수학적 인식론은 그것의 명확한 자각 없이 이미 수학교육의 어떤 면에서는 실천되고 있는 것 같다. 현재, 아직 충분히 성공하고 있다고는 보이지 않지만, '문제해결' 특히 '개방형(open-ended) 문제해결'의 지도법은 이러한 급진적 구성주의와 통하는 입장이다.

즉, 어린이에게 우선 하나의 문제 상황(situation)이 주어지면, 그는 그것에 대하여 여러 가지 가설을 세워서 다양한 방법으로 해결을 위한 접근을 시도한다. 모든 '응용문제'라 불리는 보통의 문제해결에서는 정해진 방법을 적용할 뿐이지만, 만약 어린이에게 그 문제상황을 스스로 형식화하는 여지를 주고 스스로 연구한 방법을 적용하도록 허락한다면, 보통의 문제해결에서도 급진적 구성주의에 가까운 수학 지도를 할 수 있을 것이다.

5. 새로운 수학 지도법의 방향
— Gattegno의 Situation의 교육학을 예로 —

이상은 약간 이론적인 얘기가 되었지만, 좀 더 구체적인 이야기를 하겠다. 그렇게 하면 이러한 이론적 고찰이 구체적인 수학교육 실천의 어디에서 태어나며, 그들 이론이 실천을 어떻게 지탱하고 있는가를 알 수 있을 것이다. 또한 전통적인 방식에 안주하기 쉬운 일상의 실천을 어떻게 개혁해 가야 할 지에 관한 미래의 방향도 확인할 수 있다고 생각한다.

우선 수학은 도구이며, 수학과에서는 어린이가 그것을 상황에 따라 자유자재로 사용할 수 있으면 된다고 하는 것은 옛날부터 지금까지 일관하여 유지되어 온 신념이다. 그 때문에 전통적으로 취해진 교수 방식을 미국의 어떤

책에서는 '규칙-예제-훈련(rule-example-drill) 방식'으로 도식화하고 있다.

예를 들면, 분수의 나눗셈 학습에서 교사는 우선 '분수로 나눌 때는 분모 분자를 뒤집어서 곱하는 것이다.'라는 규칙을 어린이에게 제시한 후에, 몇 가지 예제를 해 보이고 그 다음에는 빈번한 훈련이 계속된다.

나 자신도 1930년대에 이와 같은 수학 교육을 받았고, 지금은 왜 분수로 나눌 때 분모 분자를 뒤집어서 곱하는 것인지는 설명할 수 있지만, 어린이는 대개 알지 못하므로 교사도 끝내는 포기하고, '하여튼 나눌 때에는 분모 분자를 뒤집어서 곱한다고 외워 두자.'고 말하고, 그 뒤에는 맹렬한 반복 훈련을 한다. 옛날과 비교해서 그다지 변화가 없을 뿐만 아니라 옛날보다 더 나쁜 교수법이 되었다고 생각할 수도 있다. 이것은 기능학습의 한 예이지만, 응용학습에서도 훈련방식이 취해져 옛날도 지금도 가능한 한 많은 문제로 훈련하는 것이 효과적이라고 생각되어져 온다.

이렇게 한 훈련 방식의 결함은 틀에 박힌 문제밖에 풀 수 없는 어린이를 만들어 버리는 것이다. 풀어 본 적이 있는 문제는 교범대로 풀 수 있을지라도 조금 변형된 문제나 새로운 문제상황에는 대응할 수 없고 금방 포기하고 마는 어린이가 되어버린다.

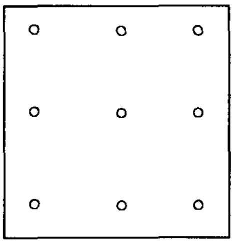
그러나 그 이상으로 이렇게 한 전통적인 교수방식은 수학활동의 본질에도, 인간교육 이념에도 어긋난다는 것이 점차 명백해지게 되었다. 전술한 수학교육의 제 이론은 이와 같은 반성에서 생긴 것이라고 말할 수 있다. 실천적 입장에서 가장 경청해야 할 주장은 다음 두 가지로 요약할 수 있다고 생각한다.

1) 수학은 어린이의 자발적 활동에서 생겨난다. 그러기 위해서는 어린이를 적절한 문제상황에 둘 필요가 있다. --- 상황론

2) 활동은 통합적이지 이산적인 것은 아니다.학습이라는 것은현재 가지고 있는 知的 체계를 유기적으로 발전시키는 것이다. --- 反 원자론(anti-atomism)

이 점에서 제2차 대전 후 가장 일찍부터 특이한 실천적 수학교육론을 전개한 한 사람은 영국의 수학교육학자 Gattegno, Caleb 이었다고 생각한다. 그는 그 후 미국에 건너가 활약하고 있었지만 이미 고인이 되었다. 내가 젊은 시절인 1960년에 그가 일본에 왔을 때, 오사카와 나라에 안내하고 거기서 직접 만나서 이야기를 듣고 큰 감명을 받았다.

그의 수학교육론은 '상황의 교육학'이라고 불리어지고 있다. 어린이를 우선 어떤 하나의 상황 속에 두는 것부터 시작하는데 그러기 위해서는 어린이에게 적절한 교구를 주는 것도 하나의 방법이다. 여기서는 유명한 '기하판(geo-board)'의 이용을 예로 든다. 그 중에 가장 간단한 것은 정사각형 판에 3×3 모눈에 못을 9개 박은 것이다. 이것에 고무줄을 걸면 여러 가지 도형을 만들 수 있다. 처음에는 어린이가 아무렇게나 좋아하는 대로 놀지만, 그 동안에 교사의 지도와 시사에 따라 어떤 정해진 문제를 의식하게 된다.



<그림 1 >

예를 들면,

1) 어떤 모양이 몇 종류, 그리고 몇 개 만들 수 있는가?

2) 그들의 크기(넓이)는 얼마인가? 라는 문제부터 시작하여 점차로 명확한 문제가 다음에서 다음으로 계속하여 만들어져서 서로 관련을 가지면서 해결되어 간다.

그리고 다각형의 분류, 합동, 닮음, 대칭, 면적 등 현재의 초등학교에서 중학교까지의 도

형 교재의 거의 전부를 단 한 장의 기하판에서 다룰 수가 있다.

내 자신이 옛날 학생과 함께 즐긴 문제를 소개하겠다.

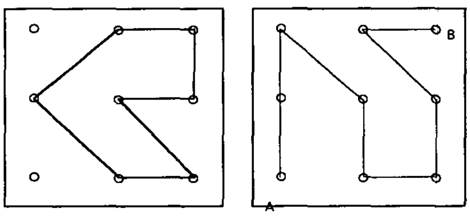
· 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형으로 만들어 가면몇 각 형까지 만들 수 있을까? 볼록 다각형뿐만 아니라 오목다각형도 넣는다면 몇 각형까지 만들 수 있을 까? (칠각형까지 만들 수 있다. 그러면 그것은 몇 종류 만들 수 있을까?) <그림 2>

· 하나의 꼭지점 A에서 대각선으로 반대 꼭지점 B까지 모든 못을 한번씩만 거쳐서 가는 방법은 몇 가지 있는가? 가장 짧은 것과 가장 긴 것을 찾으시오.

사람에 따라서는 논증 기하의 문제를 발견할 수도 있을 것이고 행렬이나 군론의 문제에도 연결시킬 수도 있다.

Gattegno는 '기하판을 가지고 노는 시간은 그 사람의 수학적 교양에 비례한다.'고 말하고 있다.

이와 같은 수학의 지도는 교과서의 각 장이나 절을 따라 그다지 상호관계가 없는 문제를 계속 학습시키는 방법(atomism)과는 완전히 대조적인 것이다. 그러나 이러한 학습 지도법도 현재까지 일반적으로 그다지 도입되어져 있지는 않다. 그 이유는 두 가지가 있다고 생각한다. 하나는 수학은 수험재료로 되어 있어서 그것에 관계가 없는 문제는 돌아보지도 않는 것이고, 또 하나는 이러한 지도에 적합한 교재가 아직 충분히 준비되어 있지 않기 때문이다.



<그림 2>

6. 새로운 수학교재론

— Wittmann의교수단원(Teaching Unit)의 사상 —

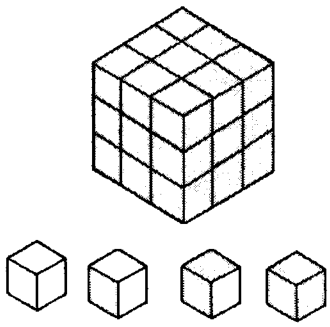
지금과 같이 교과서의 장과 절에 따라 그다지 관계도 없는 문제를 따로따로 학습하지 말고 일련의 관계가 있는 문제를 해결하는 형태의 수학학습을 하면, 수학적 개념이나 지식의 의미를 충분히 이해할 뿐만 아니라, 그 응용에도, 기억에도 효과가 클 것이다. 그러기 위해서는 전통적인 수학 제재뿐만 아니라 넓은 생활분야, 사회문화 속에 새로운 제재를 찾아 그것을 교재로 조직하는 것이 필요하다.

이 점에서 나는 독일의 Wittmann의 '교수단원(Teaching Unit)'의 사상에 주목하고 있다. 그것은 일종의 교재집이지만 각 단원은 일괄된 문제로 되어 있다. 교사는 이러한 단원집을 가지고 있고, 상대방 학생에게 적합한 교재를 선택하여 그것을 학생이 학습할 수 있는 범위까지 지도하는 것이다.

일본에서는 중학교 수학에 '과제 학습' 이라는 단원이 있는데, 거기서 이러한 교재를 자유롭게 다룰 수 있게 하였지만, 아직 적당한 교재가 준비되어 있지 않아서 잘 실시되고 있지 않다. Wittmann의 단원집에 해당하는 것을 자기 나라의 문화에 맞게 편집하여 그것을 이용한다면, 현재의 수험 문제집에 있는 것 같은 서로 관계없는 문제를 계속 풀어 가는 학습에서 해방될 것이다. 이러한 의미의 교재 개발은 지금부터 수학교육 연구의 한 연구 과제라고 생각한다. 나도 이런 종류의 교재 개발을 두세개 시도 해본 적이 있는데, 그 중에서 하나만 소개하겠다.

초등학교 5학년의 어떤 교과서에 다음과 같은 문제가 있다. 어린이용 표현을 하지 않고 수학적으로 쓰면 다음과 같은 문제이다. '한 정6면체의 표면을 페인트로 칠한 후에 그것을 가

로 · 세로 · 높이의 3방향으로 평행선을 그어 3등분할 때, 작은 정6면체가 많이 생긴다. 이 작은 정6면체를 색이 칠해진 면의 수에 따라 분류하면 각각 몇 개씩 될까?'



초등학교 5학년 학생은 이 문제 하나를 다루는데 1시간이 걸릴 수도 있겠지만, 풀었다고 하더라도 그것으로 끝내지 말고 이 문제를 더욱 발전시키던가 유사한 문제를 생각하던가 하면, 그것은 Wittmann이 의미하는 하나의 '교수단원' 이 된다. 나는 교사를 지망하는 대학생의 '수학교재 연구'로써 이 문제를 다음과 같이 발전시켰다.

(1) 3등분이 아니라 4, 5등분, 일반적으로 n등분일 때 이 문제는 어떻게 될까?

(2) 정6면체에 해당하는 2차원 도형은 정4각형, 1차원 도형은 하나의 선분이다. 이 때 위의 문제는 각각 어떻게 설명될 수 있을까?

(3) 3차원 정6면체에 해당하는 4차원 도형은 어떤 것일까? 이것에 대하여 위의 문제는 어떻게 설명되고 어떻게 대답될까?

(4) 일반적으로 n차원 정다면체를 n-1차원 공간에서 n개의 방향으로 평행하게 각각 m등분하면, 위의 문제는 어떻게 될까?

(5) 정6면체가 아니라 정4면체로 위의 문제를 유추한다면 어떻게 될까?

이 과정에서 여러 가지 문제가 생겨나고 그것을 하나씩 생각하면, 훌륭한 한 권의 책이 될 수 있을 정도다. 모든 연구가 그렇겠지만, 문제가 풀리면 그것으로 끝나는 것이 아니라 오히려 계속하여 새로운 문제가 생겨나는 것이 진정한 연구일 것이다. 수학도 이와 같이 학습함으로써 진정한 수학을 했다고 할 수 있지 않을까? 'What If Not(그렇지 않으면 어떻게 될까?)'에 의한 것이 중요하다는 것을 첨언하고 싶다.

하나의 문제가 풀려도 그것으로 끝내지 말고, '정6면체가 아니면 어떻게 될까?' , '3등분이 아니면 어떻게 될까?'하고 그 문제 조건의 일부를 다른 것으로 바꾸면서 새로운 문제를 구성해 가는 思考의 전개이다. 이 양 저자가 어떤 논문에서 다음과 같이 술회하고 있는 것을 읽고 나는 크게 감명 받은 적이 있다. '우리들은 문제를 만들면서 깊고 깊은 바다 밑으로 빠져들어 가는 느낌이 들어 무서워졌다.'

적어도 '풀었다, 끝이다!'고 하는 흔히 보는 수험 준비적인 수학을 공부하는 태도는 크게 반성해야 한다고 생각한다.

7. 結語

나는 반세기에 걸쳐 수학교육에 관계되는 일에 종사하여 왔지만, 그 동안에 이론적으로도 실천적으로도 확실히 큰 진보가 있었다고 생각한다. 그리고 앞으로도 계속하여 수학교육은 진보해 갈 것이다.

그러나 일본에서는 그다지 낙관하지 못할 사태가 일어나고 있다. 이에 대한 확실한 증거는 학습지도 요령이 규정하는 학습내용의 정도가 점점 더 낮아지고 있고, 또한 수학을 하지 않더라도 졸업할 수 있는 제도로 학습지도 요령이 계속 바뀌고 있다는 것이다. 이것은 어린

이가 수학을 싫어하고 하지 않기 때문이기도 하며, 더욱이 수학은 어린이가 비행에 빠지는 원인 중의 하나라고 생각하게 되었기 때문이다. 어린이는 좋아서 수학을 하고 있는 것이 아니라 시험에 있으니까 어쩔 수 없이 하고, 수학을 너무 강요하면 어린이는 자포자기하여 비행 쪽으로 달려간다고 하는 것이다.

나는 가장 큰 원인은 사회의 변화라고 생각하는데, 구체적으로 다음의 3가지 사실을 들고 싶다.

첫째는 세상에 재미있는 것이 너무 많이 생겨났다는 것이다.

어른도 야구, 노래방, 도박 등에 열중하여 마치 그것이 본업인 양 들떠있으니까 어린이가 만화, TV게임에 정신을 팔고 수학을 외면하는 것도 당연하다. 어린이까지 대중문화에 완전히 빠져있고 어른도 그것을 나무라지 못한다.

둘째는 학교가 시내 한가운데 있기 때문이다.

이제까지는 학교는 일반 사회와는 떨어진 곳, 때로는 성역으로 간주되어 왔다. 수도원이나 절까지는 아니더라도 수행하는 장소이며 자신을 갈고 닦는 곳으로 간주하여 왔다. 그러나 지금은 학교에 사회가 전면적으로 밀어닥쳐 학교가 市街가 되고 놀이 장소로 되어버렸고 옛날과 같은 학교는 근대적인 학교로 인정되게 되었다.

셋째는 교육의 기초가 되는 조건이 무너졌다는 것이다.

프랑스의 수학교육자 Brousseau는 교육은 교사와 학생사이의 암묵적인 계약 위에 성립하는 것으로 보고 있다. 그러나 이러한 기본적인 계약이 파괴된 것 같은 현상이 나타났다. 초등학교 1학년이라도 옛날에는 책상 앞에 앉아서 수업 중에는 떠들지 않는 것을 확실히 터득하고 있었다. 그러나 요즘 어린이들은 조용히 앉아 있지 못하고 교실을 여기저기 돌아다니며 떠들든지 싸우든지 하여 좀처럼 수업이 되지 않는다. 나는 대학생조차 강의 중에 사담이 많아서 자주 화를 낸 적이 있는데, TV의 영향인가도 생각하였지만, 초등학교부터 학교에서 예절 교육을 하지 않았기 때문으로 알고 있다. 아니 가정에서 예절 교육을 하지 않았기 때문이다. 어느 쪽이든 간에 이와 같은 학교의 저속화라고만 말할 수 없는 상황의 원천에는 전술한 프랑스의 수학자 Diudonné와 같이 '인간 정신의 영광을 위하여'수학을 하려고 하는 사람은 거의 없을 것이다.

내가 이상에서 말한 여러 가지 수학교육 연구는 이와 같이 곤란한 상황에서 어떻게라도 하여 어린이에게 진정한 수학을 배우게 하려고 하는 노력인 것이다. 그것은 어린이와 국가 사회의 장래에 반드시 좋은 결과를 가져올 것이라고 믿기 때문이다.

확실히 미래의 수학자나 고도의 수학 이용자를 양성하는 것은 수학교육의 중요한 과업이다. 그러기 위해서는 그 재능을 기를 기회를 주고, 최종적으로는 우수한 수학자에게 맡기는 것이 필요하다고 생각한다. 그러나 수에 있어서 너무나 많은 일반인에 대한 수학교육은 어떻게 하면 좋을까? 이것은 우리들 수학 교육 연구자, 수학 교육자가 생각해야 할 일로, 그러기 위해서는 두 가지 일이 중요하다고 생각한다.

첫째는 기초적인 것을 확실히 익히게 할 것과, 둘째는 수학에 대한 흥미를 느끼게 할 것의 두 가지이다.

우선 첫째는 '기초적인 것'이란 어떤 것인가 하는 것 자체가 중요한 연구 문제이다.그러기 위해서 평상시에 필수적인 것과 장래의 학습에 필요한 것이 있다. 확실히 '계산'을 할 수 없으면 오늘날에도 일상 생활에 지장이 있다.

그렇지만 전자계산기를 값싸게 살 수 있는 오늘날에는 옛날만큼 필산 훈련은 필요 없을 것이다. 오히려 계산의 구조와 그것에 관한 개념, 응용 방법을 이해하는 것이 중요할 것이다. 또한 수학은 단지 계산만이 아니라 일상의언어와 같이 생활에서도 장래 학습의 기초가 되는 개념이나 지식을 준다.

둘째는 우리들은 먼저 어린이가 필요로 하는 것 중에 매우 조금 밖에 가르치지 못한다는 것을 인정해야 한다. 어쩌면 전혀 가르칠 수 없을 지도 모른다. 어린이는 자신에게 필요한 것은 스스로 배우도록 하지 않으면 안 된다. 즉 스스로 문제를 해결할 수 있는 어린이가 되지 않으면 안 된다. 그러기 위해서 교사가 할 수 있는 것은 수학에 흥미를 갖게 하고 수학을 학습하는 데 자신감을 갖게 하는 것이다. '수학은 재미있다. 나도 배울 수 있다'고 어린이가 생각하게 되면 그것으로 수학교육은 대성공이다. 유감스럽게도, 일본에서는 이 점에서는 완전히 실패하고 있다. 즉, 수학이 가장 싫고 수학에 자신이 없는 어린이를 대량으로 만들어 버렸기 때문이다.

일본의 실패를 '他山之石'으로 하여, 한국에서는 훌륭한 수학교육을 이룩해 갈 것을 기대하면서 저의 강연을 마치겠습니다.

<번역: 임문규(공주교대)>

참고문헌

Howson & Wilson: School mathematics in the 1990's. (ICMI Study Series, Cambridge University Press, 1986)