大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 9 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.1, 51-80. July 1999

수학교육과 구성주의

이 경 화*

Ⅰ. 들어가는 말

수학을 잘 하면 머리가 좋고 논리적이라는 것, 수학은 객관적이고 확실한 지식이라는 것, 수학은 모든 학문의 기초라는 것 등은 오늘날 더 이상 유지되기 어려운 생각이다. 대학의 교양선택과목 가운데 어느 것보다 인기가 없고, 중·고등학교 학생들이 가장 혐오하는 교과로도 단연 수학이 손꼽힌다. 수학책은 잠자기에 가장 적합할 만큼 두껍고 지루하게 쓰여 있다는 평을 받는다. 쓸모는 없으면서 복잡하고 골치아픈 것을 권위에 의하여 강제로 부과하는 대표적인 교과로 소개되기도 한다. 당연히 수학은 시간이 나면 배우고 싶어하는 취미로서도, 알아야 할 소양으로서도 선택되지 못한다. 이러한 이유로 수학 교사와 연구자들은 유용성과 적극성을 수학교육과 관련짓기 위하여 노력하고 있다.

수학교육에서의 구성주의는 적어도 유용성과 적극성이라는 두 가지 조건을 만족하는 것으로 소개되고 있으며, 그 실천을 위한 다양한 교수·학습 전략이 제시되고 있다. 이러한 교수·학습 전략이 유용성과 적극성을 동반하면서 수학교육의 실제를 개선하고 바람직한 방향으로 안내하는 것이라면 그리고 그것이 구성주의를 토대로 하였을 때에만 가능한 것이라면 당연히 구성주의를 받아들여야 할 것이다. 그러나, 유용성과 적극성을 동반하지 못하거나, 동반하더라도 수학교육을 바람직하지 않은 방향으로 이끌 가능성, 더욱이 유용성과 적극성을 동반하지 않으면서 과거의 방법보다 더 못한 상태를 낳을 가능성을 배제해서는 안될 것이다. 새로운 것이 언제나 좋은 것은 아니라는 지극히 평범한 교훈을 수학교육의 역사에서는 너무 많이 확인해왔다. 한편, 구성주의가 또는 구성주의적 주장이 수학교육에서 과연 새로운 것인가라는 의문도 제기될 수 있다. 본 고에서는 이러한 문제들을 수학교육 이론으로서의 구성주의에 대한 이해를 통하여 살펴보고자 한다. 이를 위하여 구성주의의 수학관과 수학교육관, 수학교육 실제와 구성주의의 세 가지 문제를 살펴보고자 한다. 먼저 인식 대상으로서의 수학이 철학에서 또는 인식론에서 어떻게 다루어졌는지, 학문으로서의 수학에는 오늘날 어떤 변화가 생겼는지 확인함으로써 구성주의 수학관을 이해하고자 노력할 것이다. 구성주의의 수학교육관에 관해서는 구성주의의 수학교육에 관한 문제의식, 현재 제시되고 있는 구성주의 수학 교수·학습 원리를 확인함으로써 살펴볼 것이다. 수학교육 실제와 구성주의에 관해서는 구체화된 구성주의 수학수업사례를 전통적인 수업사례와 비교하고 분석함으로써 살펴볼 것이다. 분석의 준거로는 교수학적 변환

* 청주교대

론이 사용될 것이다.

II. 펼치는 말

1. 구성주의 수학관

가. 인식 대상으로서의 수학의 변화

수학에 대한 인식의 역사는 다른 어떤 학문보다 오래되었다. 도구학문이라는 명성에 걸맞게 수학은 다양한 학문의 역사에 초기부터 등장한다. 플라톤에게 수학은 비가시적 대상을 논리적으로 탐구하는 학문으로서 철학자 군주의 필수적인 덕목이었다. 철학적 체계의 제 1 원리를 찾느라 고심하였던 데카르트에게 수학은 방법론 구축의 가능성을 확신시키는 實例였다. 인지발달의 과정에 관심을 둔 삐아제가 이른바 발생적 인식론을 제시할 때는 수학이 인지발달의 판단기준, 예컨대 형식적 조작 단계에의 도달 여부를 판단하는 한 가지 기준으로 제시되었다. 비트겐슈타인이 수학자이자 논리학자인 러셀을 만나 인공언어 또는 이상언어로서의 수학이 가진 매력에 심취하였을 때는 철학의 문제를 언어에 대한 분석으로 해결할 수 있다는 아이디어로 작용하였다(엄정식, 1984). 이들 각각의 경우에 인식 대상으로서의 수학이 가지는 특성을 확인하고 구성주의적 시각에서의 수학의 특성과 비교할 필요가 있다.

기하학을 모르는 자는 들어오지 못한다는 경고가 그의 아카데미아에 적혀있었다는 플라톤은 앎을 감각이 아니며, 상기(회상)이고, 발견이라고 생각하였다. 플라톤에 의하면, 인식의 대상은 감각적 사물과 인간 인식의 원형이라고 할 수 있는 이데아의 세계에 존재하고, 이데아에 대한 탐구를 통하여 '보다 명료한 자기 인식을 추구해 가는 발견'이 곧 인식의 과정이다. 플라톤에게 인식 대상으로서의 수학은 이데아의 세계에 존재하는 것으로서 물리적인 시공간과 별도의 고유한 존재양식을 가지며, 감각에 의하여 판단되는 것과는 달리 지성으로 하여금 탐구하도록 전면적으로 권유하는 영원불변의 지식이었다. 예를 들어, 수 1은 보는 것으로 또는 그 밖의 다른 감각으로 이해할 수 있는 것이 아니며, 영혼의 사고과정에 의하여 '하나'라는 것이 도대체 무엇이며 어떤 방식으로 존재하는지 생각해야 한다는 것이다. 수학은 이와 같이 눈에 보이지 않고 오직 사고 속에서만 다룰 수 있는 것이며, 눈에 보이는 것을 그대로 받아들이는 '의견'과는 달리 객관성과 절대성을 확보하고 있는 지식이다(임재훈, 1998, pp. 32-43, 92-93 & 182-184).

합리론의 대표자인 데카르트는 아리스토텔레스의 세계관, 자연관과 코페르니쿠스와 케플러 그리고 갈릴레오 등의 이론의 대립으로 혼란스러웠던 시대를 살았다. 이론 사이의 대립으로 인한 혼란과 근본적으로는 고전 철학에 대한 회의와 씨름하였던 데카르트는 어떤 가치 또는 지식이 오래되었거나 대단한 지위를 누리고 있다고 해서 더욱 진리에 가까워지는 것은 아니라고 생각하게 되었다. 역사적으로 가치가 있다고 생각해온 지식 또는 당시에 지배적이었던 학문에 대한 데카르트의 회의는 영원불변의 확고한 지식으로서 또 엄밀한 연역체계의 대표로서 추앙받아온 그리스 기하학에 대한 의심과 분석으로 이어졌다. (Störig, pp. 406-416). 그리스 기하학에 대하여 데카르트는 '인식할 수 없는 이데아'를 '모호하고 우연적인 방법으로' 탐구하는 것으로 비판하고, 확실하고 의심할 수 없는 인식의 대상만을 일반화된 원칙에 따라 탐구하는 것이 필요하다고 생각하였다. 이러한 생각에 따라 데카르트는 진리 탐구의 일반적인

원칙을 주관적 직관과 연역이라는 객관적 추론 양식의 조합에 의하여 세웠다. 여기서 직관은 인식의 최초 단계에서 순수하고 주의깊은 마음이 의심으로부터 완전히 해방되도록 빠르고도 판명하게 얻는 개념이며, 연역은 진행되어가는 각 단계에서 명석한 통찰을 가지고 마음의 계속적이고 중단 없는 활동에 의하여 알려진 참된 여러 원리로부터 도출되는 긴 연쇄의 고리로 설명되었다(엄정식, 1984, pp. 37-57).

직관과 연역의 합리적인 사용을 통하여 의심과 모호성이 없는 지각을 꿈꾸었던 데카르트는 '어떤 문제이든 수학 문제로, 어떤 수학 문제이든 대수 문제로, 어떤 대수 문제이든 한 방정식의 풀이로 환원하여 해결해야 한다'는 원칙을 제시하였다(우정호, 1998, p. 78). 이 원칙으로부터 인식 대상으로서의 수학에 대한 데카르트의 관점을 짐작할 수 있는 바, 데카르트에게 수학은 의심할 수 없는 최초의 직관에서 출발하여 오직 연역에 의하여 참된 결론에 도달할 수 있는 이상적인 지식이었다. 모든 편견이 제거된 단순한 상태로의 환원이 언제나 가능한, 필연적으로 진리인 인식 대상이었다. 기하학적 도형에 대한 감각적 판단의 요소를 제거하고 오직 참된 분석과 연역추론에 따르는 대수적 관점으로만 이루어진, 정신 속에 내재하는 명석하고 판명한 관념이었다. 데카르트에게 인식 대상으로서의 수학은 여전히 감각의 세계가 아니라 정신의 세계에 존재하는, 확고하고 엄밀하며 변덕스러운 경험으로부터 멀리 떨어진 그야말로 이상적이고 안정적인 것이었다.

합리론과 경험론의 통합을 통하여 인식론의 새로운 지평을 열었다고 소개되는 칸트에게 수학적 진리는 선험적이고 종합적인 것이었다. 칸트는 수학적 진리가 (산수의 경우에는) 시간 또는 (기하학의 경우에는) 공간에 관한 우리의 선험적 직관을 전제로 하는 그런 식의 필연적 진리라고 생각하였다(Hamlyn, 1970, p. 271). 그리고, 2에다 3을 더하면 5라는 것은 사람이면 '누구나 다 알고 있다'는 점에서 보편성을 가진 것으로 다루었다. 이것은 경험에서 나오는 것이 아니라 선험적 판단을 통하여 알 수 있는 것이며, 이렇게 하여 만들어지는(구성되는) 지식은 의심할 수 없는 확실한 것이라고 생각하였다. 이러한 의미에서 유클리드 기하도 공간에 관하여 유일한 이론 체계임을 주장하였다. 요컨대 공간에 관하여 우리가 생각할 수 있는 것은 오직 유클리드 기하 뿐이라는 것이다[1](정대현, 1990, p. 38).

삐아제는 널리 알려진 바와 같이 아동의 인지 발달이 감각운동 단계, 전조작 단계, 구체적 조작 단계, 형식적 조작 단계를 거쳐서 이루어진다고 설명하였다. 삐아제는 특히, 논리수학적 지식을 물리적 추상화에 의하여 얻은 경험적 지식과 구분하고 그 획득 여하에 따라서 인지 발달의 수준이 달라진다고 보았다. 반영적 추상화는 가역적이고 정합적이며 전체적인 조작 체계로의 인지발달을 가능하게 하고 결국 논리수학적 지식의 획득을 가능하게 하는 사고 과정이다. 반영적 추상화 또는 논리수학적 지식의 획득은 형식적 조작 단계에의 도달 여부를 판단하게 하는 근거로 활용된다(김응태 외, 1989, pp. 130-154).

형식적 조작 단계에 나타나는 주요한 인지적 특성은 가설-연역적 사고, 명제논리적 사고, 반성적 사고, 일반화된 개념적 사고를 한다는

1) 유클리드 기하가 공간에 관한 유일한 기하라는 칸트의 아이디어는 19세기 중반 비유클리드 기하의 탄생으로 거부되었고, 이를 계기로 수학은 물론 철학에서도 확실성을 주제로 한 논의가 활발하게 이루어진 것으로 생각된다.

것이다. 또한 이상적 사회를 그리며, 확률개념을 이해하고 사용하며, 공간개념이 우주로 확대되고, 무한개념을 인식하며, 윤리에 대해 의문을 가지고, 음유를 이해하며, 자신의 장래 이상을 설계한다는 것 등이다(앞의 책, pp. 142-143). 이들 여러 가지 인지적 특성은 개인마다 다른 것이 아니고 형식적 조작 단계에 이르면 공통으로 지니게 되는 것이다. 예를 들어, 삐아제는 가능성을 비교하거나 조합문제를 해결하는 능력, 치환능력의 발달과 더불어 각 아동은 확률 개념을 형성하며 시간적으로 차이는 있지만 성인이 되면 확률현상에 관하여 공통적인 개념과 판단력을 지니게 된다고 설명한다. 이러한 공통의 발달이 가능한 것은 이른바 '인식 주관'이 있어서 확률현상에서의 행동에 대한 일반화된 조정을 가능하게 때문이라는 것이다(Piaget, 1969). 사실, 인식의 발생 과정에 관심을 두었고 그것이 발달에 의하여 진행됨을 확인한 삐아제에게 수학적 지식의 객관성이나 존재성은 문제될 것이 없었다. 삐아제에게 있어 인식대상으로서의 수학은 절대적이고 확고한 지위를 가지는지 여부는 불분명하며, 다만 모든 주체들에게 공통된 인식 주관이 있어서 해당하는 환경에의 적응과정을 따라 행동과 조작의 조정이 일어나고 반영적 추상화의 결과로 얻게 되는 일반화된 지식이었다.

분석철학을 구축한 비트겐슈타인도 한 때는 수학에 심취했었다. 그는 특히 논리학자로 일컬어지는 프레게와 러셀을 만났고 이들로부터 매력적인 수학적 언어를 전수받았다. 여기서 비트겐슈타인이 수학적 개념이나 방법이 아니라 수학적 언어에 매혹되었다는 점이 관심을 끈다. 수학적 언어를 능숙하게 다룰 수 있게 된 비트겐슈타인은 철학자의 사명이 언어를 잘못 사용함으로써 생겨난 철학적 문제들을 해소시키는데 있다는 결론을 얻게 된다(엄정식, p. 58). 비트겐슈타인은 플라톤과 같이 존재를 향한 외부지향적인 탐구도 아니고 데카르트와 같이 사유를 명석판명하게 하는 내부지향적인 성찰도 아니며 다만 언어를 그 사용맥락에 의거하여 명료화하는 관계지향적인 방법에 의하여 철학의 문제를 해결하고자 하였다. 진리와 인식의 문제를 둘러싼 전통적인 논쟁을 해결하기 위하여 언어에 대한 분석을 강조함으로써 확실성 추구의 방향을 급진적으로 전환하였다는 평가를 받고 있는 비트겐슈타인은 바로 그 점 때문에 철학사에서 플라톤, 데카르트, 칸트에 의한 대전환과 비교되고 있다. 특히 후기 비트겐슈타인은 언어에 관한 전기의 입장 즉 러셀식의 분석을 통해 어떤 어휘의 진정한 의미를 밝혀내는 것을 거부하고 그 어휘가 실제로 어떻게 쓰이고 있는지를 파악하는 것이 중요하다는 입장을 택하였다(Picher, pp. 193-210).

앎이란 무엇이며 어떻게 알게 되는가라는 인식론의 근본적인 문제는 소크라테스, 플라톤, 데카르트, 칸트, 삐아제 등 많은 철학자, 인식론자, 심리학자 등에 의하여 끊임없이 다루어져 왔다. 인식 대상으로서의 수학은 이들 여러 관점에서 공통적으로 확실성 또는 객관성을 예외적으로 완전히 또는 상당히 만족시키는 지식으로 다루어졌다. 소크라테스나 플라톤, 데카르트, 칸트는 수학적 지식의 확실성 또는 객관성에 의심을 품지 않았으며 오히려 수학에서 확인한 확실성이나 객관성을 다른 영역까지 확장하고자 하는 입장을 취하였다. 이에 비하여 삐아제는 인식 대상으로서의 수학에 아동이 어떻게 반응하며 어떤 과정에 의하여 도달하는가를 주요 관심사로 삼았기 때문에 굳이 존재론 또는 수학적 지식의 확실성의 문제에 얽매이지 않았다. 그러나, 비트겐슈타인에 이르면, 인식 대상으로서의 수학은 고차적인 사고 수준에서 발견 또는 구성되는 확실하고 객관적인 지식이

라기보다 문제 상황에서 사용되는 여러 언어 가운데 하나로 파악된다. 비트겐슈타인에 의하면, 수학을 하는 것은 발견하거나 발명하는 것이 아니라 수학적인 상황에서 사용되는 언어를 이해하고 보다 쓰임새있는 언어로 발전시켜 가는 것이다. 여기서 객관성이나 확실성은 문제가 되지 않으며 맥락에 따라서 특별히 더 객관성을 요구하거나 포기할 수 있다. 인식 대상으로서의 수학에 관한 삐아제와 비트겐슈타인의 입장은 이른바, 급진적 구성주의(radical constructivism)와 사회적 구성주의(social constructivism)의 수학관으로 채택된다.

급진적 구성주의자의 대표로 손꼽히는 글라저스펠트에 의하면, 구성주의에서는 기본적으로 앎의 의미나 결과보다는 과정에 관심을 둔다. 글라저스펠트는 지식에 대한 회의주의자의 문제제기에 대하여 전통적인 대응은 늘 지식이 어떤 독립된 세계로서 존재한다는 가정아래 이루어졌고 바로 그 때문에 실패로 끝났다고 주장한다. 글라저스펠트에 의하면, 이제 희망없는 노력을 계속하는 것보다는 지식에 대한 개념을 바꾸는 것이 필요한데, 우리에게 훨씬 중요한 것, '우리의 경험세계에서 우리가 할 수 있는 것'을 생각하는 것이 필요하다. 글라저스펠트는 이에 대하여 다음과 같이 설명한다.

> 나의 모든 숙고의 배경에는, 인식론을 존재론으로부터 철저하게 분리하자는 시도가 존재합니다. 내가 보기에 서양 철학의 인식론의 비극은 바로 "내가 인식하는 것이 이미 거기에 존재한다"는 얼핏 보기에는 대단히 그럴싸한 그러나 어처구니 없는 가정들로부터 출발한다는 것입니다. ... 나에게 인식론은 "내가 어떻게 지식을 산출하는가, 또 내가 무엇을 훌륭한 쓸모있는 지식으로 간주할 수 있는가 아니면 그럴수 없는가?"라는 의미에서의 지식에 대한 질문입니다. (Schmidt, p. 408)

지식에 대한 존재론적인 가정을 벗어나는 한편, 글라저스펠트는 지식의 객관성 역시 하등 고려해야 할 지식의 본성이 아니라고 주장한다. 지식에 대한 주관적인 구성은 상호주관성(또는 간주관성 intersubjectivity)을 획득하면서 충분히 의미있고 가치롭게 작용할 수 있다는 것이다.[2] 그는 삐아제의 설명과 마찬가지로 물리적 경험과 논리수학적 경험을 구별하며 환경에의 적응 활동에 의하여 나름대로의 지식을 구성할 뿐 발견하는 것이 아니라고 설명한다 (1991b). 예를 들어, 책상 위에 있는 한 개의 사과를 보고 '하나'라는 것을 깨닫거나 여러 개의 사과를 보고 그 '복수성'을 깨닫는 과정을 글라저스펠트는 다음과 같이 설명한다.

> 사과를 아는 것은 경험의 장에서 하나의 특정 사물을 분리시키고, 그것을 사과라는 단어와 연상시키며, 사과라고 말하는 일종의 감각경험에 의하여 가능하다. 그러나, '하나' 또는 '여러 개'를 알기 위해서는 이와 같은 감각경험 자체가 아니라 그것에 이차적으로 주관적인 조작을 반복하고 그렇게 반복한 행동에 대한 반성으로부터 정신적으로 '하나'와 '여러 개'에 대한 개념을 구성할 수 있어야 한다. … 이러한 정신적인 구성은 부모나 교사가 대신해줄 수 없는 것이고 오직 주체의 적극적인 인식에 의하여 가능하다(1995, pp. 13).

글라저스펠트에 의하면, 구성되는 것은 행동에 대한 반성을 통하여 행동양식으로서 획득한 조작(operation)이다. 이 조작은 객관적이고 확실한 것이 아니라 주관적이고 불확실한 것일 수 있다. 예를 들어, 정삼각형을 그릴 때 우리

---

2) 우정호(1994)는 이 점에 있어서 글라저스펠트가 삐아제의 이론과 다른 입장에 서 있다고 설명한다. 삐아제의 이론은 이른바, 인식주관(epistemic subject)의 작용을 강조하고 있으며, 이 점에서 합리주의적 철학관에 보다 가깝고, 지식의 객관성에 대하여 완전히 배제하고 있는 것으로 생각하기 어렵다는 것이다.

는 그것이 불완전하게 그려진다는 것을 알고 있고, 이에 대하여 플라톤은 그것이 이데아로서만 존재하기 때문이라고 설명하겠지만 구성주의에서는 신비롭거나 신화적이기보다 합리적인 설명을 원한다는 것이다. 글라저스펠트에 의하면, 정삼각형을 정적인, 완성된 이미지로 생각하는 것이 아니라 정삼각형을 그리고 활용하며 다른 도형과의 관계를 이해함으로써 조작적으로 구성하는 것이 중요하다(1995, p. 14).

한편, 지식의 구성에 있어 개인보다 사회의 작용에 무게를 두는 사회적 구성주의자 저겐(Gergen, 1995)과 어니스트(Ernest, 1991)는 어떤 지식이 타당한 것으로 결정되는 역사적·사회적 맥락의 중요성을 강조한다. 이러한 관점에 따르면, 의미는 개인의 주관성을 통해서가 아니라 공동체의 관습에 의하여 이해되는 것이고, 특히 언어가 중요하며 사회적 상호작용과 언어를 사용하는 상황이 중요하다. 언어는 별도로 존재하는 세계를 반영하지 않으며 개인의 정신을 표현하지도 않고, 더욱이 순수한 언어는 존재하지도 않으며 공동체 내의 특정한 상황에서 필요한 기능을 수행할 뿐이다. 이 설명에서는 인식의 과정 또는 개인의 인식이 어떻게 발달되는가에 관한 논의는 찾을 수 없다. 이러한 의미에서 사회적 구성주의는 인식론이 없는 구성주의로 간주되기도 한다(조연주 외, 1997, p. 69)[3].

사회적 구성주의에서도 수학적 지식이 확실하고 객관적인 것이라고 생각하지 않는다. 어니스트에 의하면, 인류가 발전하기 위해서는 수학이 확실하다는 생각을 버려야 하며, 이는 아무리 안전해도 어머니의 뱃속에서 나와야 하는 것과 마찬가지이다. 불확실성을 인정한다는 것은 어니스트에 따르면, 사회적 합의를 지식의 새로운 기준으로 택하는 것을 의미한다. 수학자들의 활동을 통하여 보건대 수학적 지식은 안정된 형태에 도달하기 이전에 끊임없는 논쟁을 겪어야했고, 결국은 다름아닌 사회적 합의를 통하여 그 논쟁의 고리고리를 넘겨왔다. 수학자들의 활동이 곧 수학적 지식을 만드는 활동이며, 그 과정에서 사회적 합의는 암암리에 또는 명시적으로 작용하였다. 수학이 확실하다고 생각하는 것은, 수학적 지식이 발생되는 감동적인 순간보다는 그 발생의 과정을 정당화하기 위한 냉혹한 과정에 주목하는 것이다. 특히, 수학이 발견되는 감동적인 순간은, 어니스트에 따르면, 여러 가지 오류에 좌절하며 그 오류를 수정하기 위한 피나는 노력의 순간들을 거치고 그 결과로 어떤 합의에 이르는 순간으로 이어진다. 이는 바로 라카토스의 이른바 준경험주의와 맥을 같이한다. 라카토스의 수리철학은 어니스트가 보기에 수리철학이 갖추어야 할 조

3) 사회적 구성주의는 비고츠키 이론에서 그 기원을 찾기도 한다. 비고츠키 이론에서 개인의 이성은 사회적 구성주의와 마찬가지로 사회적 부산물이며 교육에서 중요한 것은 협력과 대화이다. 차이가 있다면, 사회적 구성주의에서는 사회의 축소판으로서 상호의존적인 행위형태로서의 인간관계 그 자체를 중요하게 생각하는 반면, 비고츠키의 이론에서는 인간관계의 심리적 과정을 설명하는 데 관심을 둔다. 심리적 과정에 관심을 두면 정신의 작용에 초점이 주어지고 사회적 상호작용은 부차적인 요소에 불과하다. 사회적 구성주의에서는 협상, 협동, 갈등, 설득, 사회적 상황에 관심을 두고 심리에는 관심을 두지 않는다. 한편, 리차드(J. Richards)는 저겐(1995)의 사회적 구성주의가 인식론적인 논의를 피한다는 점에서 비판의 여지가 있다고 생각한다. 개인의 마음에 대한 고려가 없으며 오직 집단으로서의 사회만 논의의 대상으로 하고, 사회적 존재로서만 개인을 볼 때 개인적 세계와 사회적 세계가 어떻게 연관되는 지 알 수가 없다는 것이다. 대화에서 중요한 것은 한 아동을 대화로 이끄는 과정이지 대화 그 자체가 아니라는 것이다. 리차드에 따르면, 사회적 구성의 의미를 보다 완화된 관점에서 취하는 것이 필요한데, 예를 들어, 수학은 사회적으로 구성되는 인간의 활동이며 역사와 전통과 문화를 가지는 한편, 개인은 각자 자신의 수학을 구성하는 것으로 보아야 한다. 학생 개인만의 활동을 통해서도 또 오직 사회적 맥락에서의 대화만을 통해서도 지식의 구성을 설명할 수 없다. (조연주 외, 1997, pp. 35 & 69)

건을 대부분 만족시킨다. 어니스트에 의하면, 라카토스의 이론은 우선 수학적 지식의 본질과 그 타당성 그리고 발생의 맥락에 관하여, 이어서 수학이 과학과 기술, 기타 분야에서 유용하다는 것에 관하여, 그리고 수학자들의 활동과 수학사를 포함하는 수학적 실제를 설명하고 있다.[4)]

어니스트는 지식의 오류가능성에 주목한 라카토스와, 언어를 수학적 지식의 기원으로 확인한 비트겐슈타인을 기반으로 자신의 수리철학을 구축하였다. 이들 두 사람은 각각 수학적 지식이 확실하지 않다는 어니스트의 생각을 확인시켜주었고, 무엇보다 수학적 지식의 본질과 발생, 발전의 메카니즘에 대한 새로운 아이디어인 "사회성"에 도달하게 하였다. 어니스트의 주장을 간단하고 급하게 요약하면 다음과 같다. 수학적 지식의 기초는 언어이며, 언어가 그러한 것처럼 수학적 지식도 사회적 기초를 가진다. 수학적 지식의 발생과 발달은 개인의 주관적 지식이 공표되고 그 공표된 지식이 라카토스의 발견술을 거치면서 수정되어 이루어지는데, 언어가 객관적인 판단기준을 제공하는 바, 이는 사회적 발생이며 사회적 발달이라 할 수 있다. 사회적 기초와 사회적 발생, 사회적 발달로 구성된 지식은, 확실한 것은 아니지만 사회적 합의를 얻어냈으므로 객관성을 확보한 것으로 보아야 한다. 결국, 가장 우선되어야 할 것은 지식에 대한 판단기준으로서의 객관성을 사회성으로 대치하는 일이다(1991, pp. 34-40).

지금까지 살펴 본 바에 의하면, 구성주의에서 수학은 독립적으로 존재하는 확실하고 객관적인 지식이 아니다. 개인이 환경과의 상호작용에 의하여 주관적으로 구성하거나, 사회적 합의를 얻어낸 역사적·문화적 성격의 지식에 불과하다. 그러므로, 구성주의자들은 수학적 지식의 구성 과정, 그 과정에서 개인과 사회의 작용에 관하여 관심을 둔다.

나. 학문으로서의 수학의 변화

수학적 지식의 객관성과 확실성을 부정하는 구성주의적 수학관은 수학 내부의 발달에 의하여 그 설득력을 얻고 있다. 본 절에서는 학문으로서의 수학이 19세기 이후 어떤 변화를 겪었는지 살펴보고 구성주의 수학관과 이러한 변화의 관계를 확인할 것이다.

구성주의 철학의 창시자로 일컬어지는 칸트도 수학적 지식의 객관성과 확실성에 관해서는 의심하지 않았었다. 칸트는 공간을 인간의 마음에 직관적으로 이미 존재하는 체계로, 유클리드 기하학은 인간의 선험적 판단에 의하여 그 진리성을 확인할 수 있는 것으로 보았다. 이러한 설명은 19세기 비유클리드 기하학의 발전으로 심각한 타격을 입게 되었다. 수학자들은 학문으로서의 수학의 성격 또는 지위에 관한 의혹과 두려움을 가지게 되었고, 칸트의 관점에서 벗어나 수학적 지식의 진리성, 그 진리성을 확인하는 방법, 객관성과 확실성에 관한

4) 그러나, 어니스트에 의하면, 라카토스는 수학의 확실성에 관하여, 수학적 발견술의 객관적인 근거에 관하여, 수학적 응용의 본질에 관하여, 수학사를 수리철학의 핵심으로 간주한 것에 관하여는 설명하지 못하고 있다. 어니스트가 라카토스의 수리철학에 대체로 동의하면서 얻어낸 가장 아쉬운 두 가지는 수학의 확실성을 둘러싼 직접적인 논의가 없다는 것과 오류가능한 수학을 수정하는 동안에 이루어진 대화의 가치에 보다 주목하지않았다는 것이다. 어니스트가 보기에 오류를 수정하고 어떤 합의에 이르는 동안 끊임없이 이루어지는 라카토스의 대화는, 수학적 지식의 발생과 진리성에 관하여, 언어사용과 언어규칙이 모종의 역할을 한다는 것을 보여준다. 이는 바로 비트겐슈타인의 이른바 관습주의와 맥을 같이한다. (1991, p. 40) 이와같이 어니스트는 라카토스의 수리철학에서 부족하다고 생각되는 부분을 비트겐슈타인의 철학으로 메꾸려 하였다.

가능성을 논의의 대상으로 삼았다. 논리주의, 직관주의(또는 구성주의), 형식주의는 이 시기에 수학의 확실성을 입증하기 위하여 노력한 수리철학이다. 러셀을 중심으로 하는 논리주의는 순수수학을 논리로 환원하여 확실성을 보장받고자 노력하였으나 여러 가지 패러독스를 해결하지 못하여 실패하였다.[5] 브로우베르를 중심으로 하는 직관주의는 수학적 존재를 구성가능성으로 대치하고, 수학적 진리는 유한 번의 단계로 구성되는 증명에 의하여 확인될 수 있다는 입장을 택하였으나, 고전 수학의 많은 부분을 포기해야 한다는 결론에 도달하였다. 힐베르트를 중심으로 하는 형식주의는 수학을 의미 없는 기호의 형식적 계산으로 대치함으로써 확실성을 보장받고자 하였으나 역시 실패하였다(이용률 외, pp. 73-90). 20세기 전반부에 수학자들은 학문으로서의 수학이 지니는 성격에 대한 고민과 논쟁으로부터 자유로울 수 없었다. 함린(1970)은 이것을 '수학에 관한 회의주의'라고 표현한다(p. 285).

한편, 20세기에 들어서면서 수학은 급격하게 발달하였다. 또한 다른 분야의 지식과 마찬가지로 수학도 다양한 분야로 나뉘어졌다. 이러한 수학의 발달적 특성은 수학교육에서의 구성주의를 뒷받침하는 근거로 활용되고 있다. 학문으로서의 수학이 급격한 변화를 겪으면서 과거에 수학적이라고 간주되었던 특성, 예를 들어, 추상성, 논리성, 확실성 등은 일부 수학의 특성으로 변화되었고, 이러한 특성과는 거리가 먼 분야가 소개되었기 때문이다. 퍼지(fuzzy)이론, 프랙탈(fractal) 기하 등은 이러한 대표적인 예로 간주되고 있다.

퍼지이론은 공학 분야에 다양하게 응용됨으로써 그 유용성을 인정받는 대표적인 현대수학이다. 코스코(Korsko, B., 1993)에 의하면, 퍼지 이론은 수학의 세계가 수학이 기술하는 세계와 맞지 않는다는 문제의식에서 체계화되었다. 두 세계는 다른데, 하나는 인공적이고 다른 하나는 실제이며, 하나는 깔끔하며 다른 하나는 지저분하다는 것이다. 코스코는 다음과 같이 확률론을 비롯한 전통적인 수학관과 논리에 관하여 비판적인 입장을 취한다.

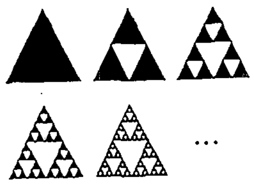
> 과학의 진리는 정도의 문제이며, 항상 보다 높은 수준을 붙잡으려 한다. 그러나 아직도 과학의 언어, 수학과 논리의 언어, 그리고 컴퓨터 프로그래밍은 흑과 백이다. 그것은 단지 100% 옳거나 100% 틀린 진술들만을 다룬다. … 확률은 흑백 그림의 세계를 바꾸거나 위협하지도 않았다. 그것은 단지 어떻게 흑백 세계에 대해, 그리고 그 속에서 노름을 하는가를 보여줄 뿐이다. … 만일 우리의 추론이 논리를 가진다면, 그것은 잘해야 퍼지다. 우리는 오직 단 하나의 결정 규칙을 가지고 있다. 이는 우리가 10학년 기하 시간에 배운 형식 논리와는 별로 관계가 없다. 퍼지 논리는 서양의 논리가 끝나는 곳에서 시작한다(pp. 26-41).

퍼지 이론에 따르면, 퍼지 집합은 일상적인 현실에 관한 논리를 표현함에 있어 종래의 집합보다 편리할 뿐 아니라 더 적합하다는 장점이 있다. 예를 들어, 키가 큰 사람의 모임은 집합이 될 수 없다는 것이 과거의 입장이었다면, 퍼지이론에서는 '키가 크다'라는 속성에 수학적인 이차의 조작만 덧붙이면 퍼지집합을 정의할 수 있다고 생각한다. 말하자면, 키가 2m인 사람을 1로 1m인 사람을 0으로 표현하고, 해당 수치에 따라 어느 범위의 사람을 키가 큰 것으

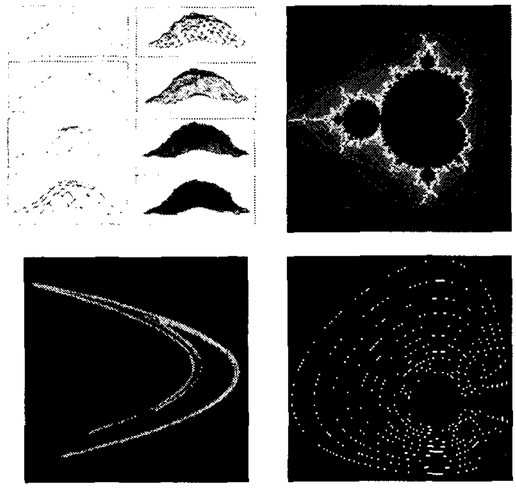
5) 논리주의 프로그램의 실패와 좌절은 한 때 러셀의 이론을 토대로 철학적 입장을 정교화 하였던 비트겐슈타인이 前期의 입장을 전면 거부하고 새로운 틀 위에서 철학을 전개한 것과 무관하지 않을 것으로 생각한다.

로 규정할 수 있다는 것이다. 여기서 1이나 0의 기준은 상황에 따라 달라질 수 있는데, 한국 사람의 경우와 미국 사람의 경우에 각각 다르게 설정할 수 있다. 과거 확률론에서는 어떤 대상의 확률적 속성 또는 특정 확률값을 가지는 대상의 존재성에 대한 이해를 주요한 목표로 삼았으나, 퍼지이론에서는 현재 주어진 대상의 속성은 이미 알고 있는 것으로 하고(예를 들어, 현재 어떤 사람의 키는 알고 있는 것으로 하고) 필요에 따라 그 속성에 대한 규정을 하는 것(키가 큰 편에 속한다고 판정하는 것) 더 나아가 그 규정에 따라 이후의 조치를 취하는 것에 관심을 둔다(임정대, 1985, pp. 152-154).

또 하나 다양한 분야에서 폭넓은 관심을 끄는 수학으로 프랙탈 기하가 있다. 프랙탈 기하는 오른쪽 그림과 같이 반복되는 규칙에 따라 도형을 구성하는 과정에 관심을 둔다. 그림에서 반복되고 있는 규칙은 삼각형의 각 변의 중점을 연결한 후에, 만들어지는 세 개의 삼각형 중에서 가운데 삼각형을 제거하는 것이다. 이 과정을 무한히 반복하면 처음 삼각형의 넓이는 0에 점점 가까워지며, 만들어진 각 부분은 원래의 전체 모습과 똑같이 복제된 것이다. 다음 그림은 이러한 반복 과정에 의하여 만들어진 것들이다. 복제할 도형과 반복하는 규칙에 따라 다양하고 아름다운 그림이 만들어진다. 이들 그림은 컴퓨터의 계산력과 그래픽 기능에 전적으로 의존한다. 그 안에 들어있는 규칙 또는 수학적 성질은 아주 간단하지만 자연계의 여러 현상이나 물질을 정교하게 표현할 수 있다. 프랙탈 기하는 수학적 아이디어가 아름다운 그림과 연관될 수 있다는 점에서 또 과거의 수학적 결과들을 확인하고 정련하는 데 도움을 준다는 점에서 그 가치를 인정받고 있다.



<시어핀스키 삼각형>



<여러 가지 프랙탈 기하의 예>

프랙탈 기하의 창시자로 알려진 만델브로는 전통적인 수학관과는 다른 것을 추구하는 프랙탈 기하가 어떻게 탄생하였는지에 관하여 다음과 같이 말한다.

> 오늘날 예견하지 못한 신비한 컴퓨터의 도움으로 기하학이 다시 발전하고 있으며 나는 이를 환영하는 바이다. 나의 행운은 눈이 잘 훈련되었으며, 오랜 기간 동안 선생님들이 기하학을 잊고 눈을 무시하라는 충고를 했음에도 다양한 과정을 통해 기하학에 정렬과 헌신을 쏟을 수 있었기 때문에 가능했다. 오늘날 과학은 더 많은 다양함을 조절할 수 있으며 예리하고 희망적인 생동하는 눈을 가진 사람을 필요로 한다.(Peinz, Jürgen, Saupe, Maletsky, 1991, p. xii)

퍼지 이론과 프랙탈 기하는 각각 전통적인 수학 분야로서의 확률론과 기하학이 추구하던

방향을 이탈하여 독자적인 영역을 구축하였다. 가장 중요한 특징은 두 이론 모두 현실성 또는 실제성을 추구한다는 것이다. 퍼지 이론에서는 대상의 속성이 애매할 때 수학적으로 어떻게 규정할 것인가의 문제보다는 주어진 대상의 수학적 속성을 어떻게 이용할 것인가의 문제를 연구한다. 이러한 특징 때문에 전통적으로 확률론이 통계학보다 실용적이지 못한 반면에 퍼지이론은 광범위하게 그 적용성을 인정받고 있다. 프랙탈 기하는 논리적이고 추상적인 방법으로 도형을 다루었던 전통적인 기하학과 달리 고사리, 참나무, 산, 구름 등 실재하는 자연물을 대상으로 최대한 원래의 대상과 가깝게 구현하는 것을 목표로 한다. 수학적인 아이디어가 추상적인 것으로 보이지만 아름다운 그림을 그릴 수 있게 하는 주된 요소이며, 특히 놀라울 만큼 신비로운 그림이 지극히 간단한 수학을 수십만 번 되풀이함으로써 얻어진다는 특징이 있다. 이들 수학에서 다루는 것은 더 이상 이상화되고 단순화된 상황이 아니라 복잡하고 변화가능한 현실이다. 수학은 모델화된 인공적 산물이 아니라 현실과 자연의 산물이며, 사고를 통해서가 아니라 감각에 의하여 접근할 수 있다는 생각이 이러한 수학의 발달에 의하여 널리 확산되었다.

수학교육을 구성주의적으로 변화시키고자 하는 연구자들은 수학기초론에서 수학자들이 수학의 확실성을 입증하지 못한 것에 또 수학이 현실과 자연에 대한 과도하게 단순화된 모델로서의 위치를 버리고 보다 현실과 자연을 가깝게 표현하고 이해하려는 위치로 옮겨가고 있다는 점에 주목한다. 추상보다는 직관을, 사고보다는 경험을, 모방보다는 창조를 이러한 배경 위에서 강조하며, 수학교육에 있어 컴퓨터가 이러한 것을 가능하게 할 것이라고 주장한다(Forman, & Pufall, 1988). 결론적으로 구성주의 수학관은 '주관적이고 불확실하며 불완전하고 실제와 같이 복잡한, 사회적 합의에 도달한 것으로서의 수학'으로 표현된다.

2. 구성주의 수학교육관

본 절에서는 먼저 구성주의가 전통적인 수학교육에 관하여 어떤 점에서 비판을 하고 있는지, 기존의 수학교육 연구에서의 비판과 어떻게 구별되는지 살펴볼 것이다. 이어서 현재 제시되고 있는 수학 교수 · 학습의 원리는 무엇이고 어떤 특징을 나타내는지, 수학교육에 대한 구성주의의 문제의식과 어떻게 관련되는지 살펴볼 것이다.

가. 수학교육의 주요 문제와 구성주의

우리나라의 어느 유명한 학습지에서는 예를 들어 4+9를 수십번 반복하여 연습하도록 한다고 한다. 그러한 문제를 대하는 대부분의 학생들은 어떻게 같은 문제가 또 나왔는가를 불평하기보다는, 가능하면 많은 경우를 미리 접하고 연습해야 수학에서 좋은 성적을 얻을 수 있다는 생각을 모종의 원리처럼 받아들인다. 여기에는 연습이 곧 학습이라고 하는 믿음이 깔려 있다. 이러한 형태의 학습은 이른바 '훈련과 연습'에 의존하는 것으로 비판의 대상이 되어왔다. 예를 들어, 브라우넬은 학교수학이 이해할 수 있는 개념과 원리, 절차가 잘 조직되어 있는 체계로서 다루어져야 하며, 기계적이고 무의미한 것이 아니라 의미충실한 학습이 일어나도록 해야 한다고 주장하였다. 삐아제의 이론을 수학학습 심리학으로 재정립하였다는 평가를 받는 스켐프(Skemp)는 이해의 상태를 두 가지로 구별하였다. 스켐프에 따르면, 학습의 보상이 즉각적이고 분명하게 나타나지만 진

정한 이해라고 보기 어려운 것은 도구적 이해의 상태에, 시간이나 노력이 많이 들지만 전이력이 큰 것은 관계적 이해의 상태에 해당한다. 그는 기계적이고 무의미한 연습은 도구적 이해의 상태에 이르게 하며 이것은 진정한 학습이 아니라고 비판하였다(강완, 백석윤, 1998, p. 107, p. 160).

급진적 구성주의의 대표자로 손꼽히는 글라저스펠트도 수학교육의 문제를 지나친 반복 또는 연습으로 설명한다. 삐아제가 그러했듯이 글라저스펠트는 아동이 물리적 대상의 속성 뿐 아니라 자신이 물리적 대상에 가한 '행동'의 속성을 반성함으로써 수개념을 발달시키는 것이지 수와 관련된 지식을 반복적으로 연습함으로써 학습하는 것이 아니라고 생각하였다. 이러한 의미에서 학습을 돕는 자료 또는 상황을 제시할 수는 있어도 학습의 성공을 보증하는 확실한 연습 과제나 프로그램은 만들 수도 없고, 제시해서도 안 된다고 지적한다(1991). 교사가 만약 반복 연습에 의하여 수학을 가르친다면 시험에서는 좋은 성적을 얻도록 할 수 있으나 진정으로 이해를 하지는 못하게 하는 것임을 주장한다. 예를 들어, 스키를 신고 경사면에 서있는 사람처럼 경미한 자극에도 쉽게 균형을 잃고 판단이 마비되어 아무 일도 못하게 됨을, 그러므로, 진정한 의미에서의 수학적 앎을 얻은 것이 아님을 지적한다(1995, p. 364).

사회적 구성주의자 어니스트는 수학을 가르치고 배움에 있어 가장 중요한 내용이며 도구가 문제(Problem)와 조사(Investigation)라고 설명한다. 어니스트에 의하면, 수학의 교수/학습에서 가장 중요한 것은 의문을 가지는 또는 탐구하는 활동이다. 문제와 조사는 탐구과정의 도구이면서 동시에 탐구 과정 그 자체 또는 탐구의 내용이고, 무엇보다 탐구의 목표이다. 그가 파악하기로는 지금까지 문제해결학습이나 발견학습 등을 강조해온 이론에서 문제와 조사는 주로 탐구의 출발을 돕는 도구의 의미를 가진 것이었다. 이 경우에 학습자들은 탐구를 장려받지만, 교사가 제공하는 경로를 따라 정해진 스타일의 문제와 조사를 바탕으로, 정해진 어떤 목표에 이르는, 탐구를 가장한 강요된 수업에 여전히 참여하게 된다는 것이다. 문제를 가지고 조사를 하려는 마음을 가지며, 특히 어떻게 조사해야 하는지에 관하여 생각하는 것, 이는 그 자체로 훌륭한 수학교육의 목표로 그리고 내용으로 받아들여져야 한다는 것이다. 이러한 원리에 터해야만 어니스트는 진정한 의미에서 수학교육이 이루어질 수 있다고 생각한다(1991, pp. 283-295).

글라저스펠트(1991)와 어니스트(1991)는 공통으로 기계적인 반복에 의한 수학학습이 수학의 기초가 절대적이고 확실하다는 믿음에서 비롯된다고 주장한다. 예를 들어, 4+9를 수십 번 반복함으로써 수학을 학습하는 현상은 객관적이고 확고한 지식 체계를 전수한다는 전통적인 수학관 때문이라는 것이다. 특히, 4+9가 함의되어 있는 환경 또는 맥락과 분리하여 4+9를 다루는 것은 학습자로 하여금 사고를 가로막고 반영적 추상화나 자발적 탐구, 사회적 상호작용의 대상으로 수학을 대하지 못하게 한다고 지적한다. 요컨대, 학습 내용은 교사에 의하여 사전에 결정되는 것이 아니라 학생에 의하여 선택되거나 조정되어야 한다는 것이다.

구성주의가 수학교육의 주요 문제로 제시하는 다른 한 가지는 교사 중심의 수업 또는 수동적 학습이다. 소크라테스가 노예소년을 가르친 일화도 구성주의의 시각에서는 비판의 대상이다. 알려진 바와 같이 이 일화에서 소크라테스는 그전에 수학을 배운 적이 없는 소년으로 하여금 주어진 정사각형의 넓이가 2배인 정사각형은 그 대각선을 한 변으로 하는 것임을

'깨닫게' 하였다. 처음에 노예 소년은 주어진 정사각형의 변의 길이를 2배하면 새로이 만들어지는 사각형의 넓이가 주어진 사각형의 넓이의 2배가 된다고 '잘못' 생각하였다. 소크라테스는 수학을 전혀 모르는 노예소년이 자기가 알고 있다고 생각하고 자신있게 대답하였지만 '잘못' 알고 있었던 내용을 확인하고 바른 길을 찾아가도록 하였다고 주장한다. 마지막 부분에서 소크라테스는 소년이 꿈꾸는 것과 같은 상태에 있으며, 그것은 지식이 아니라 오직 올바른 의견에 불과하다는 것, 그렇지만 그것은 거듭되는 다양한 질문에 의하여 지식으로 바뀔 수 있다는 것을 지적한다(함린, 1978, p. 19; 김웅태 외, 1989, pp. 262-269; 이홍우, 1997, pp. 216-227).

글라저스펠트는 아동의 이해를 돕는 안내자로서의 교사를 말하지만 소크라테스처럼 안내에만 의존하도록 하는 것은 잘못되었다고 주장한다. 세상이 중요한 것이 아니라 우리가 경험하는 세상 그리고 세상을 경험하는 방식이 중요하므로, 오로지 안내에 의해서만 교육이 이루어지는 것은 잘못되었다고 보는 것이다. 개인적으로 가지고 있는 경험을 근간으로 어떻게 행동해야 할지 결정하는 것이 중요하지 세상 자체의 성향(또는 교사가 제공하는 지식의 성향)에 맞추어 행동양식을 결정할 필요가 없다는 것이다. 수학적인 지식도 개별적인 경험 또는 감각운동적인 토대에 근거하는데 예를 들어, 5가 무엇인지, 곱셈이나 나눗셈이 무엇인지 알려면, 어느 정도는 그것을 몸으로 행동할 수 있어야 한다고 주장한다(슈미트, 1986, pp. 405-438). 이러한 설명에 따르면, 노예 소년에게 소크라테스가 힘들여 설명하고자 하는 수학이 노예 소년의 기존 경험에 들어 있지 않았다는 점, 특히 주어진 수학적 상황에 대하여 소년은 어떻게 조작하고 생각해야 할지 모른다는 점 때문에 비판의 대상이 된다. 주어진 정사각형, 그 정사각형의 넓이, 새로이 만들어야 할 정사각형 등 소년에게 제시된 현실은 소년 스스로 아무런 조작을 할 수 없는 대상이다. 교사 중심의 수업은 이러한 맥락에서 비판의 대상이 된다.

어니스트는 수학교육의 정치학(The Politics of Mathematics Education)에서 멜린 올센(Stieg Mellin-Olsen, 1987)이 말하고 있는 '학습자의 의식화'가 수학을 가르치고 배움에 있어 가장 중요한 요소라고 주장한다(1991). 멜린 올센에 따르면, 학습자는 교사와 동등하게 수업에 참여할 권리와 의무가 있으며, 특히 자신에게 닥친 상황을 이해하고 문제점이 무엇인가를 인식하려고 끊임없이 노력해야 한다. 학습자는 정치에 있어 피지배자에 해당되므로 스스로 현실에 관심을 갖고 적극적으로 참여해야 한다는 것이다. 그렇게 하지 않으면 피지배계급이 지배계층만의 이익을 위하여 사회에 매몰되는 것처럼 학습자도 자신에게는 아무런 의미 없는 일을 누군가 다른 집단의 이익을 위하여 하게 된다. 이러한 관점에 따르면, 노예 소년은 의식화되지 못하였다는 점에서 진정한 학습을 이루지 못하였다고 볼 수 있다. 자신에게 닥친 상황을 이해하거나 문제점을 찾지 못하였으며, 다만 갑작스런 소크라테스의 요구에 응하여, 소크라테스가 이끄는 대로 원하지 않는 생각들을 하게 되었다는 것이다.

결론적으로 구성주의에서는 훈련 프로그램이 아니라 맥락으로서의 교육 내용을, 교사가 아니라 학습자 스스로의 노력과 선택에 의하여 조정할 수 있는 방식으로 다루어야 한다고 주장한다. 구성주의와 전통적인 수학교육관의 중요한 차이는 학습 내용과 학습 방법 모두에서 발견할 수 있다. 사실, 수학에서는 그대로만 하면 답을 얻게 하는 공식 또는 알고리즘을 많이

찾을 수 있다. 이것은 인류의 수천년에 걸친 지혜의 집결체로서 수학의 역사는 그러한 공식 또는 알고리즘을 개발해온 역사로 생각되어 왔다. 지금까지 수학을 배우는 목적 가운데 하나는 그러한 공식이나 알고리즘을 구사하는 능력을 키우는 것이었다(우정호, 1998, p. 25). 전통적으로 이와 관련된 문제는 공식이나 알고리즘을 개념적으로 이해하지 않고도 반복에 의해서 또는 암기에 의해서 익힐 수 있다는 점 때문에 발생하는 것이었다. 그러나, 구성주의에 따르면, 공식이나 알고리즘은 그것이 발생되거나 사용되는 상황에서, 그것도 학습 소재로 선택되었을 때, 탐구나 조사의 대상으로 다루어질 수는 있어도, 언제나 반드시 학습되고 연습되어야 하는 것은 아니다. 고정불변의 가치있는 학습 내용은 없으며 수학에 있어서도 이것은 예외가 아니라는 것이다. 결국, 세상이 중요한 것이 아니라 그 세상을 이해하고 움직이는 인식 주체가 중요하고(급진적 구성주의), 어떤 지식도 당대의 전문가들의 합의의 결과일 뿐 객관적이고 확실한 것이 아니라는(사회적 구성주의), 수학에 관한 시각의 근본적인 변화만이 수학교육의 주요 문제를 해결할 수 있다는 것이다.[6)]

나. 수학 교수 · 학습 원리로서의 구성주의

현재 교육이론으로서의 구성주의적 관점은 연구자들에 따라 다양한 방법으로 분류되고 있다. 황윤한(1998)은 구성주의 철학을 삐아제의 인지적 발달 이론, 브루너의 구성주의자 이론, 비고츠키의 사회 발달 이론으로 분류하였다. 또한 콜린스와 브라운 그리고 홀룸의 인지적 도제(cognitive apprenticeship) 이론과 스피로, 조나센의 인지적 유연성(cognitive flexibility) 이론을 인지적 발달 계열에 속하는 것으로, 브랜스포드의 정황교수(anchored instruction) 이론과 라브의 참여 학습(situated learning) 이론을 사회 발달 계열에 속하는 것으로 보았다(1998, p. 9)[7)]. 개일은 사회적 구성주의(social constructivism), 급진적 구성주의(radical cpnstructivism), 또다른 사회적 구성주의(social constructionism), 인지적 구성주의(information-processing constructivism), 인공지능학적 접근(cybernetic systems), 사회문화적 접근으로 분류하였다(조연주 외, 1997, p. 4).

박태호(1999)는 개인을 강조하는 경우를 인지구성주의로, 사회를 강조하는 경우를 사회구성주의로 분류하고 인지구성주의 계열에 삐아제, 글라저스펠트를, 사회구성주의 계열에는 비고츠키와 저겐을 포함시켰다(pp. 64-65). 나딩스(Noddings, 1990)는 목적지향성과 지식 추구 능력을 가진 사회적 존재로서의 인식 주체를 상정하는 방법론적 구성주의와 발달이론으로 인식을 설명하는 인지적 구성주의로 분류하였다. 박영배(1996)와 임재훈(1997)은 수학교육에서의 구성주의를 삐아제의 조작적 구성주의, 글라저스펠트의 급진적 구성주의, 어니스트의 사회적 구성주의로 분류하였다.

위와 같이 여러 가지 방법의 분류가 이루어지고 있기는 하지만 연구자마다 분류하는 기준으로 택하고 있는 것은 개인과 사회에 얼만큼의 무게가 실리는가 하는 것이다. 다음과 같은 쇼터의 설명에서도 이를 확인할 수 있다.

구성주의는 급진적 구성주의와 사회적 구

6) 조용기(1998)는 이러한 의미에서 객관주의에 동화되는 것이 아니라 조절되는 것으로서, 패러다임이 완전히 다른 것으로 구성주의가 이해되어야 함를 주장한다.(pp. 1-10)

7) 여기서 특이할만한 것은 브루너의 이론이 인지 발달 계열에도 사회 발달 계열에도 속하지 않는 것으로 분류되었다는 점이다. 황윤한에 따르면 브루너는 삐아제의 연구에 기반하고 있으면서도 최근의 몇몇 연구에서 학습의 사회적 · 문화적 측면에 관심을 둠으로써 사회적 구성주의를 옹호하고 있다.(같은 글, pp. 11-12)

성주의로 대별할 수 있다. 주요한 차이점은 '실재'에 대하여 한편에서는 경험세계를, 다른 한편에서는 대화를 강조한다는 것이다. 급진적 구성주의에서는 경험세계에 대한 개인의 인지적 노력을 강조하며, 사회적 구성주의에서는 대화를 통하여 전통을 만들어가는 것이 중요하다고 생각한다. ... 급진적 구성주의에서 지식은 세계가 아니라 개인 자신이 작업할 수 있는 경험세계를 반영하기 때문에, 교수・학습은 내적이고 지적이며 개인적인 성격을 띤다. 사회적 구성주의에서 개인은 소외된 존재가 아니라 타인과 끊임없이 상호작용하고 의사소통하면서 사회적 기능과 실제를 개발한다. 교수・학습은 대화를 통한 상호작용에 의하여 이루어지는 것으로 본다(조연주 외, 1997, pp. 48-57).

개인에 무게를 두는 구성주의에서 교수・학습 원리의 배경은 삐아제의 반영적 추상화 개념이다. 삐아제는 구체적인 대상에 대한 직접 또는 간접적인 활동을 내면화하고 조정하여 새로운 행동과 새로운 대상을 구성하는 과정으로 반영적 추상화를 설명한다. 반영적 추상화를 수학인식론으로 이해하고 이를 수정, 보완하여 교수/학습의 문제에 접근해야 한다고 주장하는 듀빈스키(Dubinsky, 1991, 6장)에 따르면, 내면화, 조절, 대상화, 일반화, 가역적 사고가 각각 반영적 추상화의 요소에 해당한다. 이들 여러 활동에 의하여 기존의 인지도식이 새로운 것으로 발전되어 나갈 수 있게 된다. 아동의 사고에서도 반영적 추상화가 발견되며, 수학의 학문적 발달에 결정적인 역할을 한 것이 바로 (수학자들에 의한) 반영적 추상화이다. 이는 반영적 추상화에도 역시 수준이 있다는 것을 암시한다. 이 관점에 의하면, 결국 수학교육은 반영적 추상화를 통하여 또 반영적 추상화 수준의 향상을 통하여 아동 스스로 수학을 구성하도록 하는 것을 목표로 한다.

사회에 무게를 두는 구성주의에서 교수・학습 원리의 배경은 비고츠키의 근접발달영역 개념이다. 비고츠키는 학습자의 학습을 학습할 영역에 관한 전문적 지식과 기술을 가진 사람이 도와줄 경우 학습자 개인이 스스로 도달할 수 있는 인지적 발달수준보다 더 나은 수준에 이를수 있다고 보았다. 학습자의 학습을 도와주는 사람이 어느 경우에는 부모가 될 수도 있고 대부분의 경우처럼 선생님이나 동료 학생들일 수도 있다. 이 때 교수적 도움은 기존의 지식이나 기술을 전달하는 것이 아니고 안내나 조언의 형태를 띤다. 안내나 조언은 학습자 스스로 완전히 문제해결의 전 과정을 다룰 수 있는 단계에 이를 때까지 관여 정도를 점진적으로 줄여가면서 종국에는 완전히 사라지도록 한다(강인애, 1997, p. 74). 이 관점에서 수학교육은 사회적 상호작용의 내면화를 통하여 아동 스스로 수학을 구성하도록 하는 것을 목표로 한다.

개인과 사회의 역할에 대하여 위에서 살펴본 바와 같이 다른 입장을 취하기는 하지만, 각각의 관점에서는 개인만의 또는 사회만의 작용을 가정하지는 않는다. 사회적 구성주의는 급진적 구성주의의 급진성을 완화하고 비고츠키의 이론을 통합한 것으로 볼 수 있기 때문에 당연히 개인의 구성적 측면을 간과하지 않는다(박영배, 1996; 임재훈, 1998; 조용기, 1998 등). 개인의 관점을 강조하는 급진적 구성주의자 글라저스펠트도 '구성'이 자의적으로 형성되지 않으며, 오히려 사회적인 그리고 자연환경 속에 사는 사회화된 개인들이 따를 수밖에 없는 생물학적인, 인지적인, 사회적인 문화적인 조건들에 따라서 이루어진다고 보았다(1986, pp. 12-13).

인간은 분명히 아주 유사하게 구축된 인지체계를 소유하며, 늘 상호작용을 하기 때문에, (대상이라고도 불리는) 그들의 상호작용 단위

들은 그야말로 충분히 닮아가게 된다. 개개의 개체들은 오직 하나의 경험가능한 세계, 즉 자신의 체험세계만이 존재한다는 그리고 각자가 가지는 체험세계들이 단지 부분적으로만 서로 중첩된다는 점에는 보통 주목하지 않는다. … 비록 두뇌 자체가 "바깥으로 향하는 창문"을 가지는 것은 아니지만, 우리의 두뇌에 의해서 구성된 현실은 엄연히 하나의 사회적 현실이다. 그 인지적 현실은 주체의존적이지만 '자의적'이라는 의미에서의 주관적인 것은 아니다. "공동체적인 현실을 개체속에서 구성한다'는 공식으로써, 구성주의자들은 우리가 일상생활속에서 직관적으로 대략 하나의 동질적인 현실속에서 산다는 점을 고려하는 것이다.

구성주의가 위에서 살펴본 바와 같이 개인과 사회에 얼만큼의 무게를 두는가에 따라 크게 두 가지 흐름으로 나뉘지만, 각각의 입장에서는 개인의 인지적 노력과 사회적 상호작용을 우선순위나 중요도에 있어서의 차이가 있을 뿐 지식의 구성에 있어 모두 필요한 것으로 보고 있다. 그러므로, 구성주의가 교수·학습의 원리로 제시될 때에는 이러한 두 흐름이 개인적인 인식의 노력이나 사회적 상호작용에의 참여에 있어서 적극성을 강조하는 형태로 나타난다.[8] 예를 들어, 박선미(1999)는 구성주의 교수·학습 이론의 특징을 다음과 같은 다섯 가지로 제시하였는데, 급진적 구성주의의 입장과 사회적 구성주의의 입장이 동시에 반영되어 있는 것으로 생각된다. 첫째, 이해는 환경과 상호작용함으로써 이루어진다. 둘째, 인지적 갈등이나 당혹은 학습의 자극이 되고, 학습할 내용의 특징과 조직을 결정한다. 셋째, 학습은 지식의 증가나 조율이 아닌 인지적인 재구조화를 의미한다. 넷째, 지식은 학습자에 의하여 자주적으로 구성된다. 다섯째, 지식은 사회적 협상을 통하여 진전되며, 공감적 이해의 '생장성'에 대한 평가를 통하여 발전된다(111-115). 이들 원리에서 개인과 사회는 함께 강조되어 있으며, 특히 환경과의 상호작용과 인지적 갈등을 강조하는 첫 번째 원리는 급진적 구성주의와 사회적 구성주의적 주장이 한꺼번에 들어있는 것으로 생각할 수 있다. 강인애(1997)의 다음과 같은 설명에서도 개인과 사회의 무게는 어느 한 쪽으로 치우쳐 있다고 보기 어렵다. "학습자의 학습에 대한 주인의식, 자아성찰적 실천, 협동학습 환경의 활용, 학습자의 학습을 돕는 조언자이며 배움을 같이하는 동료학습자로서의 교사, 구체적 상황을 배경으로 한 실제적 성격의 과제가 교수·학습 상황에서 강조되어야 한다(pp. 20-25)."

수학교육 연구에서 나타나는 구성주의적 교수·학습 원리 역시 급진적 구성주의와 사회적 구성주의가 혼합된 형태로서 개인의 적극성을 탐구와 상호작용에의 참여 모두에서 강조하고 있다. 예를 들어, 박경미(1995)는 수학교육상의 방법적 원리로 다음과 같은 다섯 가지를 제시하였다. 첫째, 인지적 갈등을 해결하기 위한 모색을 통해 구성 활동이 활발하게 일어나므로, 학생들이 문제의식을 갖고 반영적 추상화를 시도할 수 있게 문제 상황을 조성해준다. 둘째, 학생들에게 자치권을 주어 스스로 문제를 책임질 수 있게 한다. 셋째, 학생들의 수학적 개념화 과정과 유사한 은유를 줌으로써, 이를 사고에 투영시켜 구성 활동이 일어나도록 유도한다. 넷째, 소집단 상호작용이나 협조가

---

8) 조용기(1998)는 구성주의가 단순히 능동적 활동만을 강조하는 것이 아니라 지식의 적합성 또는 맥락성을 강조하는 것으로 이해되어야 한다고 주장한다. 교육에서 맥락적 이해가 중요하고, 맥락은 곧 삶이며 自實한 것이고, 사회성을 가지며 다양한 것으로 다루어져야 한다는 것이다. (pp. 133-149) 여기서 개인과 사회는 분리할 수 없는 것이며 그것이 맥락화되어야 하는 것으로 강조되고 있다. 이 관점에 따르면, 구성주의 수학교수·학습 원리는 개인에게 삶으로서의, 사회로서의 맥락을 제공하는 방법론이 된다.

원활하게 이루어지도록 학습 상황을 조성해준다. 다섯째, 면접이나 관찰과 같이 과정에 중점을 둔 평가 도구를 수시로 활용한다. 박영배(1996)는 학생 중심적 개별화, 발문중심적 상호작용, 의미 지향적 활동, 반영적 추상화 네 가지를 수학 교수·학습 원리로 제시하였다. 여기서는 자주적 학습의 의미가 강조되어 있으나 구성 활동이 의미를 찾도록 교사가 적극적으로 관여하는 것으로 가정하고 있어서 현재의 수학교육 실제와 구성주의를 연결할 수 있도록 하고 있다.

결국 개인과 사회는 수학적 앎을 가능하게 하는 필수적인 요소이며, 이것은 맥락이나 상황 속에 통합되어 있는 것으로 보아야 한다. 그러므로, 수학 교수·학습 원리는, 학습자가 적극적으로 스스로의 반영적 추상화를 꾀하도록 하는 한편, 사회적 상호작용에 참여하고 내면화하도록 하는 어떤 맥락 또는 상황의 제시와 관련된다. 급진적 구성주의와 사회적 구성주의 등이 예리하게 나뉘어 반영되기보다는 개인과 사회가 각각 의미와 구성의 원동력으로서 통합되어 있으며, 앎의 과정을 삶으로 삶의 과정을 앎으로 변화시켜 나가는 것에 초점을 두고 있는 것이다. 여기서 수학적 의사소통의 개념이 중요해진다. 스테퍼(Steffe, 1991)는 다음 설명에서 학생과의 의사소통이 교사가 구성주의를 실현하는데 대단히 중요함을 지적한다.

> 교사는 학생들과 의사소통하는 방법을 알아야 하며, 학생들을 목표 지향적인 활동에 참여시키는 방법을 알아야 하고, 학생의 수학을 알아야 하며, 가능한 수학적 환경의 조직 방법을 알아야 한다. 다양한 경험, 특히 학생들의 수학적 경험을 알아야 하고, 학생들을 위한 수학을 알아야 하며, 반성과 추상화를 유도하는 방법을 알아야 한다. 학생들끼리 대화하도록 하는 방법, 학습을 오래 지속하도록 하고 동기 유발하는 방법을 알아야 한다. 연구자 자신이 다른 연구자 또는 교사와 수학적, 교육적으로 의사소통하는 방법을 알아야 한다(p. 191).

3. 수학교육 실제와 구성주의

수학교육 실제에 반영된 구성주의의 특징과 문제점에 관하여 논의하기 위하여 이하에서는 네 가지 수업 장면을 살펴볼 것이다. 첫 번째 수업은 연구자와의 일대일 대화에 의하여, 두 번째 수업은 학생과 학생의 협동에 의하여, 세 번째 수업은 교사와 학생의 전체적인 대화에 의하여 이루어진다. 이 세 수업은 구성주의적 관점에 터하고 있으며, 네 번째 수업은 구성주의가 비판하고 있는 전통적인 관점에 서있다.

각 수업은 교사, 학생, 수학적 지식의 세 측면에서 분석될 것이다. 구성주의에서 요구하는 교사와 학생, 수학적 지식의 의미와 얼마나 가까운가, 만약 다른 측면이 있다면 어떤 점에서 다른가를 확인할 것이다. 이어서 교수학적 변환론의 측면에서 다시 각 수업을 분석할 것이다. 이로부터 구성주의적 관점은 전통적 관점과 교육 실제에서 어떤 차이를 보이며 그 의의와 문제점은 무엇인가 살펴볼 것이다.

가. 수업사례 관찰

1) 수업사례 1

다음은 이차 부등식의 풀이 과정에 대하여 교사와 학생 사이에 이루어진 일대일 대화이다(P. Cobb, 1994, pp. 111-112).

문제: $x^2+x+1 > 0$를 구하라.

교사: (부등식을 가리키며) 이게 뭐지? 이런걸 우리가 무엇이라고 부를까?

학생: 이차방정식이요.

교사: 방정식?
학생: 아니다. 부등식이요.
교사: 이 문제를 풀 때 구하는 값은 무엇이지?
학생: 좌변이 0이 될 때의 값을 찾아요.
교사: 그게 무슨 말이니?
학생: 0보다 얼마나 큰지 그리고 정말로 0보다 큰지 확인해요.
교사: 좀더 정확하게 말해볼래? 구하는 값이 무엇일까? 구하고자하는 그래서 마지막에 적어야하는 값이 무얼까?
학생: x^2+x+1……. 여기서 x^2하고 x를 구한 다음… 대입해서 맞나 확인하고, 이 방정식…, 이 부등식이요.
교사: 다시 말해볼래? 구하는 값이 뭐지? 의자, 연필, 책상인가?
학생: 어떤 수요.
교사: 확실한 어떤 수라고?
학생: 예, 한 가지 값이요.
교사: 특정한 수라……, 그게 뭐지?
학생: 대입해서 해를 구할 수 있어요.
교사: '해를 구한다'는 것이 무슨 뜻이지?
학생: 바로 해라구요. 부등식을 만족시키는 것 말이예요.
교사: 어떻게 하면 되는지 알고있니?
학생: 아마….($x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$ 라고 쓰면서) 여기 루트 -3이 생기니까, 해는 없을 거예요.
교사: 그래서?
학생: 그래서 이건 성립하지 않는 식이예요.
교사: 무슨 뜻이지?
학생: 어떤 것을 대입해도 0보다 작거나 아마 0이 될 테니까 0보다 클 수는 없어요.

먼저 위의 대화에서 교사는 부등식의 의미나 해결 방법을 제시하거나 설명하지 않았다. 학생의 대답을 듣고 간단한 질문에 의해서만 잘못을 교정하거나 학생 스스로 아이디어를 전환하도록 하였다. 학생이 이해하지 못하는 부분을 알고 있으면서도 "이런걸 우리가 무엇이라고 부를까? 좀더 정확하게 말해볼래? 다시 말해볼래?"와 같이 학습 주제에 관한 직접적인 사항보다는 학생의 행동을 스스로 반성하게 하는 질문으로 일관하고 있다는 점에서 교사 중심의 틀을 벗어난 수업이라고 할 수 있다

학생은 부등식과 그 해결 방법에 관한 자신의 생각을 말하였다. 그러나, 자주 방정식과 혼동을 일으켰고 끝내 주어진 문제가 잘못되었다는 결론에 도달하였다. 여기서 학생이 무엇을 잘못 알고 있는지가 명확하게 드러난다. 이 문제는 다른 접근 방법으로, 예를 들어, 그래프를 그려봄으로써 접근하면 단번에 해결되는데도 학생은 전혀 그래프를 생각하지 못하고 있으며, 방정식의 풀이 방법, 근의 공식의 의미 등에 관한 불완전한 이해가 오히려 학생으로 하여금 새로운 접근을 하지 못하게 하고 있다. 결국 문제 해결은 실패로 끝났고 교사로부터의 도움이 필요한 단계에 이르렀다.

이 수업에서 다루어진 지식은 '부등식의 이해와 해결에 관한 것'이다. 교사는 학생에게 이것을 다루도록 유도하고 있으나 학생에게 배울 내용에 관하여 선택과 자율성을 부여하는 것으로는 보이지 않는다. 학생이 이 문제를 해결하고 싶어한다거나 이 문제를 해결하는 동안 흥미로움을 느끼는 것으로도 보이지 않는다. 대화는 언제나 교사로부터 출발하며 대화의 소재나 형식은 교사가 결정한다. 학습 내용이 되고 있는 지식은 객관적이고 확실한 것으로 다루어지고 있으며 학생으로 하여금 획득되어야 할 대상으로 여겨지고 있다. 지식을 자주적으로도 교사와의 상호작용에 의해서도 구성한다고 보기 어려우며 다만 학생의 생각을 보다 많이 확인하였다는 의의를 갖는다.

2) 수업사례 2

다음은 교사가 구성주의적 관점에 터하여 학급 전체와의 상호작용을 통한 교수·학습을

하는 수업장면이다(박영배, 1996, p. 180).

T: 오늘은 여러분과 재미있는 산수 공부를 하겠습니다. 여러분들 책상 위에 무엇이 있습니까?

S: 동전하고 블록이요.

T: 여러분들이 어렸을 때 집에서 이런 블록 가지고 놀이를 해 본적 있지요? 놀이를 통해서 우리들이 산수 공부를 해보겠습니다. 알겠습니까?

S: 네.

T: 먼저 선생님을 봅니다. 칠판에 있는 것을 여러분들이 눈으로 딱 보고 선생님이 물어 보는 것에 대해서 대답해 보세요. 자 여기 빨간 색과 파란색 동전이 있지요? 개수가 어떤지 아는 사람? 개수가 어떻습니까? 바로 손들고 대답하세요. 은경이!

S: 똑같습니다.

T: 똑같아요?

S: 네.

T: 다른 사람도 그렇게 생각합니까?

S: 네.

T: 빨간 색과 파란색이 똑같다?

S: 거기, 짝을 지워 보면 되잖아요.

T: 2개씩 짝을 지워 본다. 아주 잘 대답을 했습니다. 이번에 선생님이 바꿔 보겠습니다. 잘 보고 대답해 보세요.

S: 네.

○
○
○ ○ ○ ○ ○ 적
● ● ● ● ● ● ● 녹

T: 자 또 한번 봅시다.

S: 네.

T: 빨간 색이 많나 파란색이 많나 알아봅시다. 어떤 게 더 많은지 알아봅시다. 어떤 게 더 많습니까? 강철수 얘기해 봐요

S: 빨간 색이 더 많아요.

S1: 똑같애.

T: 또 송경숙!

S: 파란색이 더 많아요.

T: 또 박용빈!

S: 똑같습니다.

T: 똑같아요? 지금 세 가지 의견이 나왔네. 강철수는 어떻게 해서 빨간 색이 더 많다고 생각했어요?

… (중략) …

T: 어땠어요?

S1: 재미있었어요.

S2: 골치 아팠어요.

T: 골치가 왜 아플까? 왜 그럴까? 자 선생님이 여러분이 1학년인데 1학년 산수를 워낙 잘하니까 2학년 꺼를 배워 볼까 해요. 여러분 스스로, 선생님이 가르쳐 주는 게 아니고 2학년 것을 생각해서 알아보려고 해요. 그런데 앞에 친구들은 잘했어요.

T: 한번 헤아려봐요. 전부 몇 갤까요? 블록이?

S: 43개요

T: 43개요? 잘 모르겠는데 알기 쉽게 한번 해볼까? 잘 모르겠는데 선생님이 보기 쉽게 놓아볼까? 끼우지 말고 그냥 붙여 놓아도 되겠는데, 그렇지...

S: 43

T: 잘 모르겠는데 보기 쉽게 놓아볼까? 10개 있는 게 보기 좋지? 이것 한번 해봐요. 몇 갠가? 43? 이걸 이쪽에 놓으면 낫겠네. 왼쪽에, 보기 좋게, 알기 쉽지요? 34 같군, 다시 한번. 43이 수정이가 숫자 쓰는 대로 보기 좋게 놓는 게 좋겠어요. 요거는 묶음, 요거는 낱개다. 대충 놓아도 되요.

T: 이게 몇 개지요? 10개 10, 20, 30, 40, 50. 그 다음 9개. 그러면 59개예요. 자 준호는 요거 몇 개예요? 수정이가 한거 한번 보자. 준호는?

박영배는 이 수업에 대하여 다음과 같은 분석 결과를 제시한다(같은 책, p. 129).

> … 둘째, 학생들은 자기 스스로 받아올림이 있는 두 자리 수의 덧셈 알고리즘을 찾아낼 수 있다. 셋째, 학생 스스로 찾아낸 두 자리 수의 덧셈 알고리즘은 전통적으로 학교에서 가르치고 있는 오른쪽에서 왼쪽으로, 즉 일의 자리수부터 계산하는 방법이 아니고 왼쪽부터 오른쪽으로 즉 십의 자리수부터 계산하는 방법이었다. … 다섯째, 수학 교실에서 학생 중심적 개별화의 원리에 입각하여, 학생의 지

적 자율성을 중요시한다면, 자신의 조작 활동을 반성하여 경험을 새롭게 조직할 수 있도록 하는 수업 환경 설정에 힘써야 한다. 또, 학생 스스로의 발명을 소중하게 다루지 않으면 안 된다고 생각한다. 특히, 학생에게 납득이 가지 않는 규칙을 그 이유를 이해시키지 않고, 일방적으로 암기시켜서 계산 알고리즘을 적용시키고자 하는 교사 중심적이고 일방적인 전이 수업은 개선하지 않으면 안될 것이다.

이 수업에서 교사는 <수업사례 1>과 마찬가지로 다양한 질문을 통하여 수업을 이끌고 있다. 그러나, 앞의 수업과는 달리 이 수업에서는 다양한 아동의 답을 들을 수 있고, 특히 그 가운데에는 교사가 요구하는 답이 있어서 대화의 진행이 보다 학습 목표를 수행하기에 적합해 보인다. 여기서 어떤 아동은, '일대일 대응'을 통하여 배열이 달라도 개수가 같음을 이해하는, 즉 수의 보존개념을 가지고 있다. 그리고 이 아동이 그렇지 않은 아동에게 '짝지어 보면 된다'는 방법을 알려주고 있다. 교사는 바르게 대답한 아동에게 긍정적인 반응을 보이지 않고 다시 한 번 비슷한 상황을 제공하고 학생들의 반응을 확인한다. 더욱이 학생들로 하여금 '어떻게' 특정한 생각을 하게 되었는지 설명하고 공적인 비판의 대상이 되도록 하고 있다.

여기서 수학적 지식은 '놀이를 통한 재미있는 산수'로 표현되고 있다. 그 놀이는 교사에 의하여 계획되고 진행되었지만, 전통적인 것과 다른 알고리즘에 도달하게 하였다. 학생들이 얻은 지식은 '받아올림이 있는 두 자리 수의 덧셈 알고리즘'이었으며, 이것은 교과서에 제시되어 있는 것과 상당히 다른 형태를 한 것이었다. 1학년 학생들이 스스로의 노력으로 2학년에 배우는 알고리즘을 전통적인 것과는 다른 것으로 '발명'하였다는 점에서 이 수업은 구성주의 관점을 이상적으로 구현한 것으로 소개되고 있다. 그러나, 위의 대화에서 교사는 '보기 쉽게 놓아볼까? 10개 있는 게 보기 좋지? 이것 한번 해봐요.'라는 말을 통하여 여러 개 블록을 헤아릴 때 10의 자리부터 주목하도록 하고 있으며 이 관점을 여러 번 연습하도록 하고 있다. 이 점에서 전통적인 알고리즘과 다른 것을 발명한 것은 학생 나름의 탐구활동에 의한 것이라기 보다는 교사에 의하여 준비되고 유도되었다고 볼 수 있다. 또 교사와 학생 사이에 오간 이 수업에서의 수학적 지식은 불완전하고 다양한 것이라기 보다는 방향이 분명하고 객관적인 것이었다.

3) 수업사례 3

다음은 학생 사이의 토론에 의하여 이루어지는 수업의 예이다(T. Wood, P. Cobb, E. Yackel, D. Dillon, 1993, pp. 48-53).

문제 : 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = ?

앤: 이 문제에 관해서는 내 의견에 반대하지 않는 것이 좋을 것 같은데.(앤은 표준알고리듬으로 5개의 12를 더한다.) 60이야. 넌 59라고 하겠지만.

론: 내가 그럴까?

앤: 자, 들어봐 ... 2, 4, 6, 8, 10. (2가 써있는 열아래) 여기에 "o"를 쓰고, (1이 써있는 열의 위에) 여기에는 1을 쓰고, 1, 2, 3, 4, 5, 6. 그러니까 60이 맞지?

론: (한참후에) ... 난 아직 모르겠는데, 맞는지 세봐야 알겠어.

론: 기다려봐. 이건 10이야. 자, 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10 (다섯 개의 2를 더하고 있다).

앤: (1이 써있는 열위에) 여기에 1을 쓰면, 1, 2, 3, 4, 5, 6. 60.

론: 610?

앤: 아니, 좀 잘 들어.

론: 잘 모르겠어.

앤: 봐, ... 12 더하기 12 더하기 12 더하기 12. 12가 몇 개 있지?(그리고 숫자들을 세로로 쓴다.) (속

으로 5번 헤아린다.) 5?

론: 그래. (문제에 있는 12의 개수를 세면서) 1, 2, 3, 4, 5.

앤: 2, 4, 6, 8, 10. 자, 이제 잘 들어. 여기에 "o"라고 쓰는 거야....

론: 알았어.

앤: 이 위에는 1을 쓰고.

론: 그건 "o" 가 아니잖아.

앤: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

론: "o"가 아니고 10인데.

앤: 아니지.

론: "o"가 아니라구. 10이잖아. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

앤: 자, 잘 들어.

이 순간 론은 교사에게 달려간다.

앤: (교사에게) 그는 이해를, 이해를 못해요.

론: (동시에) 알 수가 없어요. 2를 모두 더하면 10인데, 앤은 10에서 1만 택한다구요.

교사: 왜냐하면, (잠시 말이 없다가) 그 이유는 간단하지가 않구나.

앤: 2 더하기 2. 2, 4, 6, 8, 10. 10이라구요.

론: 그래, 10이야.

앤: 여기에 "o"이라고 쓰고, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

론: (동시에) 네가 어떻게 하고 있는지, 그 방법을 말하란 말이야. 난 이해할 수가 없다구.

여기서도 수업의 내용은 '덧셈 알고리즘의 구성'이라는 미리 결정되어 있는, 객관적이고 확실한 지식이다. 그러나, 교사의 개입 없이 학생들 사이의 자유로운 토론으로 대부분의 수업이 이루어지고 있다. 앤이라는 학생은 이미 알고리즘을 배운 적이 있어서 적용하고 있으며 론이라는 학생은 그 알고리즘에 대하여 이해하려고 노력하고 있다. 문제는 알고리즘을 알고 있는 앤이 론에게 그 의미를 설명하지 못하는 것에서 비롯된다. 앤의 설명은 절차를 소개하는 것으로 이루어져 있으며 왜 그렇게 하는가를 앤 자신도 알지 못하는 것으로 보인다. 또한 론은 십진수의 자리값에 대해서도 이해하지 못함으로써 받아올림의 필요성이나 방법을 전혀 생각하지 못하는 것으로 보인다. 론은 교사의 설명을 듣는 대신 앤의 설명을 듣고 있으나 학습에 진전을 이루지는 못하고 있다. 이 수업은 가지고 있는 수학적 개념의 수준차이나 수학적 성향차이가 바람직한 수학적 의사소통에 어떤 식으로 문제를 일으키는지 알 수 있게 한다.

이 수업에서 교사는 학생들의 토론에 동등하게 참여함으로써 문제를 해결하기 어려운 입장에 처한 것으로 보인다. 아마도 교사는 두 학생 각각에게 필요한 설명을 해야 할 것이고, 적어도 이 주제에 관해서는 두 학생이 다시 토론한다고 해도 '알고리즘을 발명'하기는 어려울 것이다.

4) 수업사례 4

다음은 중학교 2학년 확률 단원의 연습문제가운데 원탁에 특정수의 사람을 앉히는 경우의 수 구하는 문제를 지도하는 수업이다. 교사는 이번 시간 내내 이 한 문제를 가르치고 있으며, 그만큼 이 문제가 중요하고 이해하기도 어려운 것으로 생각하고 있다. 교사가 수업을 주도하기는 하지만 여러 학생들을 지적하여 발표시키는 방법으로 학생참여를 꾀하고 있다(이경화, 1993, 부록).

수업주제 : 여사건의 확률

교사: 양진영이 나와보세요. 10명을 원탁에 배열하는 방법, 그게 문제에 나왔다. 어떻게 풀까? 선생님이 어떻게 하라그랬니?

진영: 아홉, 열명을요, 그 원탁에 배열하는건요, 일렬로 배열하는 거는 열명을 어떻게 놓는가에 따라서 10가지가 됩니다. 그렇기 때문에 10, 9, 8,

7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 곱한 다음에 10가지가 한 가지로 쳐지기 때문에 10으로 나눠줍니다.

교사: 아, 참 잘했어요. 무슨 말인지 이해되요? 아, 10까지 하니까 너무 길다. 그럼 여섯명을 원탁에 배열하는 방법, 강정훈 나오세요. 여섯명을 일렬로 배열하는 방법, 너 왜 여섯명을 일렬로 배열하는 방법이 시험문제에 나왔다. 그러면 어떻게 풀어야 할 것이냐?

정훈: 일렬로 배열하는 방법이 원탁에서 여섯가지는 한 가지로 치니까요, 6곱하기 4곱하기 3, 아니, 6곱하기 5곱하기 4곱하기 3곱하기 2곱하기 1 한 다음에요, 6으로 나눠요.

교사: 그렇게해도 참 좋고, 그 다음에 선생님이 어떻게 하는 것이 가장 좋다고 했죠? 저기 제일 뒤에 강상목이 앞으로 나오세요. 빨리 나오세요. 선생님이 어떻게 하는 것이, 여러분, 시험문제에 나오면 어떻게 하라 그랬죠? 어떻게 하라 그랬어요? 여섯명을 원탁에 배열하는 방법?

상목: 한 명을 한 자리에 고정시키고 나머지 다섯 사람을…, 5, 4, 3, 2, 1 곱해서.

교사: 응, 참 잘했죠. 그죠? 여섯명을 원탁에 배열하는 방법, 한 명을 고정시키면 나머지 다섯 자리는 어떻게 되요? 돌아갈 수 있어요, 없어요?

학생들: 없어요.

교사: 한 명을 고정시키면 다섯 자리가 다 다르다고 취급할 수 있죠. 그래서 다섯 명을 배열하는 방법, 다섯 명을 일렬로 배열하는 방법과 똑같아요. 여러분 그런거 풀 수 있겠어요, 인제? 저기 또 누구를 시켜볼까? 서창진 앞으로 나와보세요. 세 명을 원탁에 배열하는 방법.

창진: 원탁에 세가지가 모두 같기 때문에 3곱하기 2곱하기 1을 3으로 나눠줘요.

교사: 참 잘했죠, 그죠? 응 그렇게 해도되고, 우리 더 쉽게 어떻게 한다고 했지? 선형이 앞으로 나와봐. 세 명을 원탁에 배열할 때 더 쉽게 어떻게 해요?

선형: 한 자리를 고정시키구요.

교사: 응, 한 명을 고정시키고.

선형: 한 명을 고정시키고, 나머지 2를 2 곱하기 1해요.

교사: 응, 나머지 두 명을 일렬로 배열하는 것과 마찬가지예요. 그럼 뭐가 되요? 2곱하기 1이 되죠. 자 이번 시간에 학습목표는 선생님이 아주 거창하게 적었는데, 뭐라고 하면 좋겠니?

학생들: 원탁에 배열하는 문제

교사: 원탁에, 다 같이 한 번 불러 봅시다. 뭐를 했는지. 원탁에 배열하는 경우의 수를 구할 수 있다. 학습목표가 이렇게 구체적으로 나왔어요. 여러분 구할 수 있어요?

학생들: 예.

이 수업을 이끈 교사는 구성주의적 관점을 접한 적이 없으며, 평소대로 또는 전통적인 방법으로 수업에 임하였다. 그러나, 학생의 참여를 늘리려고 노력하였음을 알 수 있다. 학생의 말은 교사의 말 못지 않게 많다. 학생의 표현 속에는 수학이 들어 있으며 약속된 틀이 있고, 앵무새에 비유될 만큼 교사의 말을 흉내내고 있다. 이 수업에서 학생의 참여는 늘어났지만 앞의 세 수업과 다른 관점에 서있음을 알 수 있다. 이 수업은 전통적인 평가 방식에 의할 때 분명히 학습 목표에 도달한 것으로 볼 수 있다. 평가되는 내용에 대하여 학생들은 정확하게 대답하고 있으며 그 시간이 끝나면 '무엇을 배웠는지' 알 수 있다. 학습 목표의 설정, 학습 내용의 선정과 조직에 있어서 학생은 완전히 배제된다. 학생은 많이 말하고 있지만 수업의 대부분 또는 중심 부분을 교사가 장악하고 있다.

여기서 다루어지는 수학적 지식은 물론 의심할 수 없이 객관적이고 확실한 지식이다. 교사는 이 수업의 전반부에서 학생들이 좋아하는 인기 연예인들을 원탁에 앉히려면 어떤 방법이 있는지 설명하였고, 공식의 형태로 정리하여 제시하였다. 설명은 학생들을 조용히 집중하도록 하면서 제법 오랜 시간 동안 이루어졌고, 나머지 시간에는 위의 대화와 같이 반복하여 유사한 연습문제를 해결하였다. 구성주의 관점에서 볼 때 이 수업은 학생의 자유가 지식에

관하여 또 지식을 다루는 방법에 관하여 허용되지 않는다는 점에서 비판의 대상이 된다.

나. 수업사례의 분석

수학교육에 대하여 구성주의는 그 동안 많은 연구에서 제시한 것과 같이 반복과 교사 주도의 수업을 문제점으로 제시하고 있다. 그러므로 그 개선안 또는 방법적 원리에 있어서도 학생의 참여를 늘리고 탐구를 하도록 환경을 조성하는 등 거의 차이가 없는 것을 제시하는 것으로 보인다. 그러나, 앞에서 이미 확인한 바와 같이 표면적으로는 같은 문제를 제기하고 있지만 구성주의는 수학교육에 있어서 근본에 해당한다고 할 수 있는 철학과 인식론적 변화를 주장함으로써 전통적인 입장과 차이를 보이고 있다. 수정이나 보완의 측면이 아니라 전통적인 관점을 전면 거부하고 새로운 틀을 받아들일 것을 제안하고 있는 것이다.

앞 절에서는 구성주의가 수학교육으로 구체화되었을 때 철학적·인식론적 변화가 얼마나 이루어지고 있는지 전통적인 수업과 어떤 정도의 차이를 보이는지 확인해보았다. 아직까지 수학교육에서는 학습자가 자율적으로 학습내용을 선택하고 학습 방법을 조정하기보다 교사에 의한 안내에 의존하면서 다만 학생의 참여를 늘리고 그 다양성을 인정하는 정도로 구성주의가 구현되고 있음을 알 수 있었다. 이렇게 불완전한 의미에서의 구성주의가 소개되고 있기 때문에 심리적으로는 구성주의에 동의하면서도 따라야 할 교수·학습 원리로서는 막연하고 모호한 것으로 또는 과거의 제안과 그렇게 다른 것이 아니라고 생각하는 경향이 있다. 그러나, <수업사례 4>에서는 앞의 세 관점과 비교할 때 지식에 대한 학생의 활동이 보다 제한된 성격을 띠고 있으며(이해는 교사의 설명으로부터 하고 연습에 의하여 기능을 익히는 식으로), 주어진 시간에 미리 정한 수업 목표에 도달해야 한다는 원칙이 암암리에 작용하고 있었다는 점에서 구성주의와 전통적인 관점의 차이를 짐작할 수 있다. 구성주의적 수업과 달리 전통적인 수업에서 교사는 이해나 연습의 과정에서 완전한 권위를 가지고 있었고, 수학적 지식은 학생으로부터 의심이나 탐구의 대상이 아니라 오직 이해되고 연습되어야 할 대상으로 다루고 있음을 확인할 수 있었다.[9] 이 예는 구성주의 수업과 전통적인 수업이 분명한 차이를 보이지는 않지만 세밀하게 분석하면 분명히 다른 점이 있음을 시사한다.

이론과 실제의 관계는 구성주의에서도 예외 없이 그 격차로 인한 혼란을 야기하고 있다. 이론적 결론을 그대로 실제의 용어로 바꾸는 것도, 실제의 문제를 이론에 의거하여 단번에 해결하는 것도 교육에서는 용납되지 않는다. 수학 교육 장면에서 구체화된 구성주의를 바르게 이해하고 그 교육적 의의를 신중하게 검토하는 것은 이러한 점에서 시급하다. 이와 관련하여, 강완(Kang, 1990)에 의하여 구체화된 교수학적 변환론이 지식에 관한 존재론적 논의에 얽매이지 않고 교육 실제에 대하여 신중한 분석을 허용함으로써 구성주의에 대한 오해나 무리한 적용의 폐해를 막는 데 도움이 될 것으

9) 물론 이러한 교사의 수업은 그 나름대로 그렇게 될 수밖에 없는 '맥락'이 있었다. 여러 학급을 대상으로 같은 내용을 같은 방법으로 가르쳐서 비슷한 평가 결과를 얻어내는 것이 교사의 중요한 임무가운데 하나이며, 수학을 배우기 싫어하고 어려워하는 학생에게 보다 편리하고 쉬운 방법으로 수학을 가르치는 좋은 방법이 이 수업에서와 같은 '잘 조직된 설명'과 '반복 연습'이기 때문이다. 구성주의 관점에서 볼 때에는 비판의 대상이 되지만, '현실적인 여건을 고려하면(전통적인 관점에 의해서가 아니라)' 이 교사는 수학을 가르치고 학생들을 다루는데 있어 상당한 안목을 가지고 있는 것으로 보아야 한다.

로 생각된다. 특히, 위의 수업사례 분석에 의하여 알 수 있었던 바, 수학교육에서의 구성주의가 지식 그 자체를 자유로이 선택하여 학습하도록 하기보다는 주어진 지식을 주어진 환경에서 자유롭게 탐구하고 다양한 결과에 도달하는 것을 강조하는 형태로 구체화되고 있어서 교수학적 변환론에 입각한 분석을 가능하게 한다. 현재 다루고 있는 또는 다루어야 할 지식이 무엇인가에 관한 혼란을 생략하고 그 지식을 어떻게 다루는가에 주목하기 때문이다. 특히, 교수학적 변환론은 교육적인 의도로 수학적 지식을 다룰 때 어떤 의미와 문제점이 있는지에 관심을 두기 때문에, 구성주의 수업과 전통적인 수업을 이해하고 비교하는 데 적합하다.

교수학적 변환의 과정, 학습의 과정은 背景化/個人化와 脫背景化/脫個人化 개념으로 설명될 수 있다. 본래 이 두 개념은 일반적으로 앎의 과정을 설명하는데 이용된다. 배경화/개인화는 깨닫는 과정에서 (맥락화 또는 맥락의 이해를 위하여), 탈배경화/탈개인화는 깨달은 지식을 일반적으로 표현하는 과정에서(지식의 구성을 위하여) 일어난다. 배경화/개인화는 형식화된 지식이 생명을 찾는 과정을, 탈배경화/탈개인화는 방만하게 확장된 지식이 안정된 표현형태로 정돈되는 과정을 나타낸다(Kang, 1990). 배경화/개인화와 탈배경화/탈개인화 개념으로 수학수업을 보면, 반영적 추상화와 사회적 상호작용, 맥락의 이해와 탐구 등 교사와 학생이 하는 활동을 구체적으로 이해할 수 있다. 다양한 방법으로의 탐구와 적응행동은 배경화/개인화 과정으로, 간주관적인 또 사회적 합의에 도달함으로써 지식을 구성하는 것은 탈배경화/탈개인화 과정으로 볼 수 있다.

교사는 학생들의 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화를 돕고 특히 두 과정이 균형과 조화를 이루도록 해야 할 책임이 있다. 수업에서 또는 독자적인 학습 상황에서 학생들로 하여금 두 과정을 자연스럽게 주도하도록 하는 것이 교사의 역할이라고 할 수 있다. 그렇지 않고 교사의 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화가 학습자의 그것을 대신한다면(설명이후에 공식화된 지식을 연습시키는 식으로), 마찬가지로 교과서 저자의 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화가 교사와 학생의 두 과정을 대신한다면(다른 아이디어를 고려하지 않고 확고하게 따라야 할 지침으로 교과서를 사용하는 식으로), 바람직한 수학교육을 기대하기는 어려울 것이다. 교수학적 변환론에서는 이러한 잘못을 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정의 과도한 중시나, 경시에 기인하는 것으로 보고 있다. 메타 인지 이동(meta-cognitive shift), 형식적 고착(formal abidance), 토파즈식 외면치레(Topaze effect), 죠르단식 외면치레(Jourdain effect)는 각각 배경화/개인화와 탈배경화/탈개인화 과정을 지나치게 강조하거나, 간과함으로써 발생하는 그러한 극단적인 교수 현상을 표현한다(Brousseau, 1984, pp. 110-119; Kang, 1990, pp. 35-41).

메타-인지 이동이란 수학적 지식의 배경화/개인화에 주목한 나머지 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식 자체로부터 교수학적 고안물로 옮겨가는 것을 의미한다. 형식적 고착[10]이란 메타-인지 이동과 정반대로 배경화/개인화 측면을 간과하고 수학적 지식의 형태를 연습시키는 것을 말한다. 일반화된 공식을 제시하고 그 공식의 의미보다는 학생들이 공식을 익숙하게 사용할 수 있도록 연습시키는 과정에 주목하는 현상을 표현한다. 토파즈식 외면치레는 탈배경화/탈개인화 측면을 지나치게 강조하는 현상을 표

10) Brousseau(1986)는 이 현상을 '메타-수학적 이동'이라고 하였으며, Kang(1990)은 교과서 분석을 하면서 그 이름을 '형식적 고착'으로 바꾸었다.

현한다. 교사는 학생들에게 수학적 지식을 가르쳐야 한다는 책임을 가지고 있으며, 종종 학생들에게서 학습의 증거를 확인하고자 한다. 때로는 교사가 명백한 힌트를 제공함으로써 학생들의 학습을 유도하기도 하는데, 이 경우에 학생들은 교사가 원하는 답을 하기는 하지만 그 의미를 알고 있지는 못한다. 죠르단식 외면치레는 탈배경화/탈개인화 측면을 간과하는 현상을 가리킨다. 학생들이 보이는 사소한 반응을 마치 학문적인 지식을 알고 있는 증거인 것처럼 해석하는 것이다.

앞 절에서 살펴본 네 가지 수업을 교수학적 변환론에서 제시하고 있는 배경화/개인화와 탈배경화/탈개인화 개념 그리고 극단적인 교수현상에 비추어 분석할 수 있다. 이하에서는 누가, 무엇을, 어떻게 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화하고 있는가를 살펴보고자 한다.

<수업사례 1>의 경우, 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화는 교사의 조언을 받으면서 학생이 시도하고 있는 것으로 보인다. 그러나, 학생은 이미 가지고 있는 지식과 혼동을 일으켰고 그 혼동 때문에 현재 무엇을 어떻게 해야 할지 모르는 채로, 교사가 질문하는 의도도 모르는 채로 수업에 참여하고 있다. 학생은 방정식에 관한 지식을 떠올리면서 배경화/개인화를 시도하고 있으나 방향을 잡지 못하고 있으며, 앞서 다루어진 내용 또는 자신의 대답을 상호 관련지우지 못함으로써 탈배경화/탈개인화에도 실패하고 있다.

<수업사례 2>의 경우, 배경화/개인화는 교사에 의하여 유도되는 것으로 보인다. 교사는 블록을 사용하여 한 자리 수부터 표현하도록 하고 있으며, 그 과정에서 수의 보존개념을 확고히 함으로써 두 자리 수 덧셈 알고리즘에 접근하기 위한 배경과 방법을 제공하였다. 탈배경화/탈개인화 역시 교사에 의하여 이루어지는 것으로 보인다. 블록을 '보기좋게' 배열하고, '10개씩 묶어서' 헤아리도록 하는 교사의 발언은 학생들로 하여금 덧셈 알고리즘에 주목하게 하기보다는 모여있는 블록을 세는 것에 관심을 기울이도록 하였다. 학생들은 두 자리 수의 덧셈이 어떤 맥락에서 사용되고 어떤 방법으로 형식화할 수 있는지 생각하지 않으며, 이 수업의 처음부터 강조된, '여러 개의 블록을 10개씩 묶어서 세는 것'을 익히고 반복하는 것으로 보인다. 이런 점에서 학생 스스로의 힘으로 알고리즘을 발명하였다고는 보기 어려우며 교사의 안내에 의하여 (어떤 의미에서 그것이 덧셈 알고리즘인지도 모르고) 덧셈을 반복하고 있는 것으로 보인다. 교사는 탈배경화/탈개인화 과정에 적극적으로 개입하였으며 이 때문에 '토파즈식 외면치레' 현상을 낳은 것으로 보인다.

<수업사례 3>에서는 교사의 도움 없이 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화가 시도될 때 어떤 문제가 발생하는지 알 수 있다. 이 수업에서 한 아동은 이미 탈배경화/탈개인화된 형태로 지식을 소유하고 있으며, 다른 학생은 그 지식의 타당성을 확인하고 있다. 이 때문에 주어진 덧셈식에 대하여 배경화/개인화는 이루어지고 있지 않는 것으로 보인다. 예를 들어, 학생들은 이런 식의 덧셈이 사용되는 상황, 이와 같이 반복하여 더하는 의미 등을 전혀 문제삼지 않고 있다. 배경화되거나 개인화되지 않은 채로 탈배경화/탈개인화가 시도되고 있으며 이 때문에 학생 사이의 의사소통은 더욱 어려워 보인다.

<수업사례 4>에서는 교사의 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화가 학생의 그것을 대신하고 있다. 특히, '선생님이 어떻게 하는 것이 가장 좋다고 했죠?, 시험문제에 나오면 어떻게 하라 그랬어요?, 그렇게 해도 되고 우리 더 쉽게 어떻게 한다고 했지?'와 같이 학생의 언급내용은

물론이고 언급의 형태까지도 결정하여 따라하도록 함으로써, 탈배경화/탈개인화 과정을 강조하고 있다. 이 점에서 형식적 고착의 가능성이 있다.

결국 <수업사례 1>과 <수업사례 3>은 학생에게 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화에 대한 대부분의 과정을 맡기고 있으나 실패하는 것으로, <수업사례 2>와 <수업사례 4>는 교사가 적극적으로 개입함으로써 두 과정에 성공하는 것으로 분석된다. 한편, <수업사례 2>에서는 탈배경화/탈개인화 과정에 교사가 적극적으로 개입함으로써 토파즈식 외면치레를 일으키는 반면, <수업사례 4>에서는 의미에 대한 이해나 확인을 간과하고 반복적으로 주어진 공식에 대입하도록 함으로써 형식적 고착 현상이 일어나고 있음을 알 수 있다. 여기서 두 가지 문제를 생각할 수 있다. 하나는 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정이 수업에서 반드시 일어나야 하는가 하는 것이고, 다른 하나는 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정에서 교사가 어느 정도의 영향력을 가지는 것이 바람직한가 하는 것이다.

만약 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정이 수업에서 반드시 일어나야 한다고 하면 <수업사례 1>과 <수업사례 3>은 수학교육에 실패한 수업의 예가 될 것이다. 그러나, 이 생각은 구성주의에서 강력하게 거부되는 아이디어 가운데 하나이다. 구성주의에서는 수업목표를 일부 학생들이 달성하지 못할 수도 있으며, 이해에는 본래 여러 수준이 있어서 한 번에 성취되기보다 장기적인 안목에서 바라보아야 함을 분명하게 밝히고 있기 때문이다(Pirie & Kieren, 1992; 박영배, 1996, pp. 106-107에서 재인용). <수업사례 1>과 <수업사례 3>은 학생으로 하여금 수학적 지식을 나름대로 다룰 수 있게 하였다는 점에서 비록 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화에는 실패하였지만 그 의의를 인정받을 수 있다. 그러나, 이들 수업은 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정을 간과함으로써, 죠르단식 외면치레나 토파즈식 외면치레의 위험에 노출되어 있다. 이 두 가지 현상은 구성주의가 실제로 옮겨지면서 발생할 수 있는 문제상황을 잘 표현해준다. 예를 들어, 학생들이 말하는 무의미하거나 지나치게 잘못된 말들이 모두 수학적으로 의의가 있는 것처럼(수학과 관련이 있는 것처럼) 포장하거나, 탐구는 할만큼 했으니까 (그 활동과 무관하게) 교사나 교과서의 지식을 받아들이는 것으로 구성주의 수업이 이루어졌다고 생각할 수 있다. 관련성이 없는 이야기로 소모적인 토론을 계속하더라도 아무튼 적극적으로 참여만 하면 구성주의가 실천되는 것으로 본다거나, 다양한 생각을 하도록 했지만 결정적인 순간에 교사의 지식을 강요함으로써 수업의 목표를 달성하였다고 해서 구성주의가 구현되었다고 할 수는 없음을 이러한 분석에 의하여 확인할 수 있다.

두 번째 문제, 즉 학생에 의한 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화에 교사가 미쳐야 할 영향력의 정도는 '필요한' 순간에 '적절하게'라는 식의 모호한 설명으로 제시되는 경우가 많다. 어떻게 하는 것이 바람직한 안내이고 어떻게 하는 것은 강제에 해당하는지, 또 방임과 자율성의 존중을 어떤 기준으로 판단할 것인지의 문제가 이와 관련된 것이다. 결국 안내와 촉진의 의미를 어떻게 해석하는가의 문제는 다시 교사나 연구자의 몫으로 남겨진다. 본 고의 경우, <수업사례 2>에서 교사는 다양한 학생들의 의견을 듣고 반영하면서(그것이 이미 교사가 계획한 것과 같은 것이라 할지라도) 안내한 것이므로 학생들에게 탐구와 표현의 기회를 주었다는 점에서 구성주의적인 접근으로 인정받았고(박영배, 1996), <수업사례 4>에서 교사는 오

직 미리 계획한 자신의 사고를 따르도록 안내함으로써 또 표현의 자유를 허락하지 않았다는 점에서 구성주의적인 접근으로 인정받을 수 없는 것으로 보인다.

III. 맺는 말

슈미트는 다양한 목소리를 담고 있는 구성주의 담론이 인식의 관심을 인식대상으로부터 인식과정으로 또 그런 과정의 구체적인 경험적인 조건들로 바꾼다는 점에서 공동 지휘되고 있다고 보았다(1986, p. 8). 수학교육 이론으로서의 구성주의 역시 구체적인 경험적 조건으로 수학교육의 문제를 해결하고자 하는 것으로 보인다. 수학교육 환경의 변화와 학생의 참여, 의사소통의 문제가 이러한 배경 위에서 자주 논의된다. 그러나, 이들 문제는 표면적인 유사점 때문에 구성주의가 과거의 이론과 어떤 점에서 다른 것을 주장하고 있는지 이해하기 어렵게 한다. 본 고에서는 인식대상으로서의 수학에 관한 관점의 변화와 더불어 현대 수학의 특성, 수학교육에 관한 구성주의의 문제의식, 수학교육 실제와 구성주의 등을 주제로 수학교육에서의 구성주의를 이해하고자 노력하였다. 논의의 결과는 다음과 같다.

첫째, 구성주의에서는 수학이 독립적으로 존재하는 확실하고 객관적인 지식이 아니라, 개인이 환경과의 상호작용에 의하여 주관적으로 또는 사회적 합의를 얻어냄으로써 구성한 역사적 · 문화적 성격의 지식이라고 본다. (구성주의 수학관)

둘째, 구성주의에서는 수학교육의 문제가 수학이 객관적이고 확실하다는 믿음에서 비롯되므로 이러한 믿음에서 벗어나야만 극복된다고 주장한다. 개인과 사회는 수학적 앎을 가능하게 하는 필수적인 요소이며, 이것은 맥락이나 상황 속에 통합되어 있는 것으로 생각한다. 그러므로, 수학 교수 · 학습은, 사회적 상호작용을 내면화하도록 하는 어떤 맥락 또는 상황에 참여하여, 적극적으로 스스로의 반영적 추상화를 꾀하도록 함으로써 가능하다. (구성주의 수학교육관)

셋째, 구성주의가 수학교육 실제로 옮겨지면서 안내자나 촉진자로서의 교사의 역할은 안내의 정도나 방법에 있어서 다시 해석의 여지가 있으며, 학생의 적극성은 지식 자체에 대해서라기보다 지식을 다루는 방법에 관해서 구현되고 있다(수학적 지식은 학생에 의하여 선택되거나 수정되는 것으로서가 아니라 교수학적 변환의 의도에 따라 미리 선택되고 결정된다). 전통적인 수업에 비하여 구성주의 수업에서는 불완전하고 불확실한 상태로 지식을 다루는 것이 허용되거나 보다 많은 시간 동안 수정 · 보완할 기회를 제공한다. 그리고, 교사가 적극적으로 안내하는 수업이라도 학생의 활동을 장려하거나 학생의 의견을 다양하게 듣고 반영한다면 구성주의를 실천하는 것으로 본다. (구성주의 수학교육의 실제)

넷째, 교수학적 변환론에 비추어 구성주의적 수업을 볼 때, 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정은 수업에서 언제나 누구에게나 같은 방법, 같은 수준으로 이루어지는 것이 아니다. 이 점 때문에 죠르단식 외면치레나 토파즈식 외면치레의 위험에 노출되어 있다. 이에 반하여 전통적인 수업은 교사가 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화 과정을 대신함으로써 형식적 고착의 위험이 있다. (교수학적 변환의 특징)

수업은 한 시간으로 끝나는 것이 아니라 한학기, 일년 동안 지속되어야하며, 이 기간 동안 교사는 많은 학생들의 발전과 성공을 책임지게 된다. 구성주의 이론에서 제시하는 다양

한 결론은 때로는 너무 복잡하여 일년에 한 번도 시도하기 어려운 원리(이 경우 교사는 이래도 안되고 저래도 안된다는 식의 복잡한 역할을 부여받는다)로 보이기도 하고, 때로는 단번에 유용한 수학을 적극적으로 다룰 수 있게 하는 원리(이 경우 학생들의 발전과 성공은 장기적인 안목에서 평가되어야 하는 것으로 다루어진다)로 보이기도 한다. 구성주의를 무조건 거부하거나 무리하게 적용하는 문제를 이와 관련하여 이해할 수 있다. 사실, 이론에 대한 거부나 무리한 적용의 문제는 실천적인 측면을 고려해야 하는 교육이론으로서는 피할 수 없는 것이다. 또한, 구성주의를 비롯한 수학교육 이론 어느 것도 전면적으로 거부하거나 무리하게 적용하는 과정에서 그 힘이 발휘될 수 없음은 분명하다. 구성주의가 교육적으로 어떤 잠재력과 문제점을 가지고 있는지에 관한 논의가 계속되고 있는 요즈음, 교사나 연구자가 수학교육 이론으로서의 구성주의를 실천적인 측면에서 이해하는 한 가지 방법은 실제 수업(구성주의가 반영되었건 그렇지 않건 간에)을 관찰하고 그 의의와 문제점을 분석하는 것이다. 이러한 의미에서 교수학적 변환론은 구성주의를 수학교육 실제와 관련하여 이해하는 좋은 관점과 방법으로 이용될 수 있다. 아마도 구성주의가 수학교육에 어떤 영향력을 가지고 있다면 이러한 교사 또는 연구자의 노력에 의해서 드러날 수 있을 것이며, 문제점을 가지고 있다면 역시 이러한 노력에 의하여 거부되거나 수정·보완될 수 있을 것이다.

참고문헌

강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

강완, 백석윤 (1998). 초등수학교육론. 서울: 동명사

김응태, 박한식, 우정호 (1989). 수학 교육학 개론. 서울대학교 출판부.

박선미 (1999). 구성주의 교수·학습 원리에 다른 지리 수업 구성. 초등교과교육연구, 109-137. 한국교원대학교 초등교육연구소.

박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

박태호 (1999). 구성주의 패러다임의 측면에서 본 작문 이론의 전개 동향. 초등교과교육연구, 62-95. 한국교원대학교 초등교육연구소.

엄정식 (1984). 확실성의 추구. 서울: 서강대학교 출판부.

이경화 (1993). 학교수학의 교수학적 변환에 관한 연구: 중학교 2학년 확률 지도를 중심으로. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

이용률 외 8인 (1998). 초등수학교육론. 서울: 경문사.

이홍우 (1997). 지식의 구조와 교과. 증보판. 서울: 교육과학사.

임재훈 (1998). 플라톤의 수학교육 철학 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

임정대 (1985). 수학적 존재와 인식, 서울: 청문각.

정대현 (1990). 지식이란 무엇인가: 지식개념의 일상언어적 분석. 서울: 서광사.

조용기 (1998). 구성주의 교육을 위한 입문: 구성주의 교육의 조절. 김종문 외 13인.(편) (1998). 구성주의 교육학 (pp.1-10). 서울: 교육과학사.

______ (1998). 구성주의 교육의 구성. 김종문 외 13인(편) (1998). 구성주의 교육학. (pp.133-149). 서울: 교육과학사.

황윤한 (1999). 교수·학습 이론으로서의 구성주의. 초등교과교육연구 (pp.1-34). 한국교원

대학교 초등교육연구소.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problems en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **4**, 165-198.

_______ (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In Steiner, H. G., *Theory of mathematics education(TME)* (ICME 5--Topic Area and Miniconference: Adelaide, Australia, pp.110-119), Bielifeld, F. R. Germany.

Clement, J. (1991). Constructivism in the classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, **22(5)**, 422-428.

Cobb, P.(1990). Multiple perspectives. In L. P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transformings children's mathematics education: international perspectives.* (pp.200-215).

_______ (1994). *Learning mathematics: Constructivist and interactionist theories of mathematical development.* Kluer Academic Publishers.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1988). Curriculum and teacher development: Psychological and anthropological perspectives. In E. Fennema, T. P. Carpenter & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating reaearch on teaching and learning mathematics.* (pp.92-131). Madison, WI: Wisconsin Center for Educational Research, University of Wisconsin-Madison.

_______ (1993). *Rethinking elementary school mathematics: Insights and issues.* NCTM, Inc.

Confrey, J. (1990). What constructivism implies for teaching. *JRME Monograph 4*, 107-122.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking.* Kluwer Academic publishers.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* The Falmer Press.

Forman, G. & Pufall, P. B. (Ed.). (1988). *Constructivism in the computer age.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Gergen, K. H. (1995). Social construction and the educational process. In L. P. Steffe & J. Gale (1995). *Constructivism in education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers, 17-39.

Goldin, G. A. (1990). Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics. *JRME Monograph* **4**, 31-47.

Hamlyn, D. W. (1970). *The theory of knowledge.* 이병욱 (역) (1986). 인식론. 서울: 서광사.

_______ (1978). *Experience and the growth of understanding.* 이홍우 외 (공역) (1991). 경험과 이해의 성장. 서울: 교육과학사

Hiebert, J. (Ed.) (1986). *Conceptual and procedural Knowledge: The case of mathematics.* Londen: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Kamii, C. (1990). Constructivism and beginning arithmetic(K-2). In T. J. Cooney(Ed.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s,* 22-30. National Council of Teachers of Mathematics.

Korsko, B. (1993). *Fuzzy thinking.* 이호연, 공성곤 (역). (1995). 퍼지식 사고. 서울: 김영사.

Lakatos, I.(1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge University Press. 우정호 (역). (1991) 수학적

발견의 논리. 대우학술총서 번역 37. 서울: 민음사.

Mellin-Olsen, S., (1987). *The politics of mathematics education.* Kluer Academic publishers.

Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. In *JRME Monograph* **4**, 7-18. National Council of Teachers of Mathematics.

Peinz, H. O., Jürgen, H., Saupe, D., Maletsky, E. (1991). *Fractals for the classroom: Strategic activities volumn one.* 신인선, 류희찬 (공역). (1998). 수학교사를 위한 프랙탈 기하. 서울: 경문사.

Peterson, I. (1988). The *mathematical tourist: snapshots of modern mathematics.* W. H. Freeman and Company. 김인수, 주형관 (공역) (1998). 현대수학의 여행자. 서울: 사이언스북스 (주)

Piaget, J. (1969). D. Coltman(trans.) (1977) *Science of education and the psychology of the child.* New York: Penguin Books.

Picher, G. (1964). *The philosophy of Wittgenstein,* 1964, 박영식 (옮김) 비트겐슈타인의 철학: <논고>와 <탐구>에 대한 이해와 해설, 서광사, 1987.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics* **23**, 505-528.

Schmidt, S. J. (Ed.) (1987). *Der diskurs des radikalen konstruktivismus.* 박여성 (역) (1995). 구성주의. 서울: 도서출판 까치.

Steffe, L. P. (1990). Inconsistencies and cognitive conflict: A constructivist's view. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* **12**(3 & 4), 99-109.

_______ (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education,* 177-194. Kluwer Academic Publishers.

Steffe, L. P. & Gale. J. (1995). *Constructivism in education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers. 조연주, 조미헌, & 권형규 (공역) (1997). 구성주의와 교육. 서울: 학지사.

Störig, H. J. (1970). *Kleine weltgeschichte der philosophie.* 하재창 (역) (1990). 서양철학사. 서울: 배재서원.

Von Glasersfeld, E. (1990a). Environment and communication. In L. P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education* (pp.30-38). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

_______ (1990b). An Exposition of constructivism: Why some like it radical. In *JRME Monograph* **4**, 19-29. National Council of Teachers of Mathematics.

_______ (1991a). *Radical constructivism in mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

_______ (1991b). Abstraction, re-presentation, and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In L. P. Steffe(Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp.45-67). New York: Springer-Verlag, Inc.

_______ (1995). A Constructivist Approach to Teaching. In L. P. Steffe & J. Gale (1995). *Constructivism in Education* (pp.3-15) New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Wheatley, G. H. (1991). Constructivist perspectives on science and mathematics learning. *Science Education*, 75(1), 9-21.

Woo, J. H. (1994). Radical constructivism v.s. Piaget's operational constructivism in the mathematics education. *MERGA*, *17*(**1**), 9-30.

Mathematics Education and Constructivism

Kyeong Hwa Lee

The paper reviews of the constructivist view of mathematics and mathematics education. First of all, we shall study how mathematics has been treated as an object of cognition in philosophy or cognitive theories, what is changed in modern mathematics. It can lead us to understand the constructivist perspective on mathematics. Secondly, we will examine the view, the teaching and learning principles of mathematics education based on constructivism. Didactic transposition theory will be used as a frame of reference for this examination.