大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 9 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.1, 81-109. July 1999

현실적 수학교육에 대한 고찰
- 초등학교의 알고리듬 학습을 중심으로 -

정 영 옥*

1. 서 론

최근 수학교육계의 동향은 '수학은 인간의 활동'이라는 관점 하에 그에 따른 교수학습에 대한 많은 연구들이 진행되고 있는 실정이다. 이러한 관점은 궁극적으로는 수학 인식론에 대한 근본적인 변화에 기인한 것이라고 생각할 수 있다. 즉, '새수학'의 실패 이후로 그 대안으로 대두된 구성주의가 그 바탕을 이룬다고 할 것이다. 이러한 구성주의는 객관적이고 절대적인 실체를 거부하는 좀더 심오한 수리철학적인 문제는 덮어두더라도, '인간은 능동적인 학습자'라는 것을 더욱 강조하면서 우리의 수학 교육 현실에 전환의 계기를 마련하고 있다. 이러한 동향에 발 맞추어 우리나라의 7차 수학교육과정에서도 구성주의를 그 기초로 활동을 중시하며 자기주도적 학습이 가능하고, 창의적이며 다양한 사고의 여지가 있는 교육과정의 개발이 진행되고 있다. 또 최근에는 미국수학교사협의회가 1990년대의 수학교육의 방향을 제시한 '수학교육과정과 평가의 새로운 방향'을 발표한 이래 2000년대를 위한 'Standards 2000'을 준비하고 있으며, 이는 1990년대의 맥을 이으면서 그 동안의 많은 경험을 살려서 더 많은 것들을 보완하고, 특히 최근 10년간 급속히 발달해온 컴퓨터를 수학 학습에 좀더 적극적으로 반영하고자 하는 것이다.

그러나, 이러한 '인간활동으로서의 수학'을 강조하는 수학교수학습이 구성주의에만 유일한 것은 아니다. 이미 1970년대 초부터 활동으로서의 수학을 기본 전제로 수학교수학습에 대한 이론적·실제적 연구를 시행해 온 '현실적 수학교육'이 바로 그 한 예가 될 수 있을 것이다. 이는 네덜란드의 1970년대의 IOWO연구소의 초등학교 수학교육과정 연구를 위한 'Wiskobas' 팀으로부터, 1980년대의 OW&OC, 1990년대는 Freudenthal 연구소[1]로 개칭된 Freudenthal의 아이디어를 지지하는 사람들이 수 십 년간 연구해 온 수학교육의 한 사조를 일컫는다. 이 사조는 한편으로는 미국에서 네덜란드로 밀려올 것 같은 '새수학'에 대한 반작용이었고, 다른 한편으로는 그 당시 네덜란드 수학교육의 지배적인 접근방식인 '기계적 수학교육'에 대한 반작용이기도 하였다. 약 30년이라는 기간동안 Freudenthal의 '이상적 현실주의'가 그 지지자들의 '현실적 현실주의'로 더욱 구체화되고 보완되어 왔고, 이러한 보완과정에서 기본적인 기능에 대한 더 많은 초점이 맞추어져 왔다 (Treffers, 1991-1).

* 진주교육대학교

1) IOWO는 Institute for Development of Mathematics Education, OW&OC는 Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center를 의미하는 네덜란드어의 약자이고, Freudenthal Institute의 정식 명칭은 Developmental Research for Mathematics and Informatics Education(OWIO)이다.

우리는 구성주의, 즉 인간은 능동적인 학습자임을 인정하면서, 때로는 학생들에게 얼마나 많은 주도권을 주어야 하는가에 대해 자문하지 않을 수 없다. 학생들이 지식을 스스로 구성해 간다는 것이 교육 실제에 어떻게 반영되어야 하는지에 대해 숙고할 필요가 있는 것이다. 이러한 점에 대해 본 논문은 활동으로서의 수학을 강조하면서 학생들의 지식과 이해의 성장을 위해서 실행과 연구를 지속해 온 현실적 수학교육에서 나름대로의 해결책을 찾아보고, 이러한 시도를 통해서 앞으로의 우리 나라의 교육과정 개발과 수업개선을 위한 한 가지 틀을 제시하고자 하는 것이다. 이에 서론에 이어 2 장에서는 현실적 수학교육의 핵심원리를 다루고, 3 장에서는 수업이론에 대해서 고찰하고, 4 장에서는 현실적 수학교육에서 이루어지는 알고리듬 학습과정의 일부를 살펴봄으로서 이러한 원리들이 구체화되는 과정을 분석해 보고, 5 장에서는 현실적 수학교육과 구성주의를 비교 고찰하며, 마지막으로 결론에서는 요약과 더불어 제언을 하고자 한다.

2. 현실적 수학교육의 핵심원리

현실적 수학교육은 '인간 활동으로서의 수학'이라는 관점에 그 뿌리를 두고, 재발명과 점진적인 수학화, 수준이론, 교수학적 현상학을 그 핵심원리로 삼고 있다. 첫 번째 원리인 '점진적인 수학화'와 '안내된 재발명'은 수학자의 활동을 모든 학습의 중심에 놓는 Freudenthal의 관점에 기초한다.

> '그것은 문제해결활동이며, 문제들을 찾는 활동이지만 또한 교과 내용을 조직하는 활동이기도 하다. 이는 현실로부터의 문제들이 해결되어야 한다면 수학적 패턴에 따라 조직화되어야 할 현실로부터의 문제일 수 있다. 그것은 또한 더 나은 이해를 위해서 좀더 넓은 문맥 속에 또는 공리적 접근 방식에 의해 새로운 아이디어에 따라 조직화되어야 할 여러분 자신의 또는 다른 사람들의 새로운 또는 기존의 결과들인 수학적인 문제일 수 있다.'(Freudenthal, 1971, p. 413-414)

이러한 조직화 활동이 '수학화'라고 불린다. 그에 따르면, 어린 아동을 위한 수학교육은 무엇보다도 일상적 현실을 수학화하는 것에 목표를 두어야 한다. 그러나, 그들의 수준에 맞는 수학을 수학화하는 과정도 역시 중요하다. 학생들은 개념학습이나 문제해결 절차에서 이루어지는 일반화하기, 추측하기, 반성하기, 정당화하기, 증명하기, 모델링, 기호화, 정의하기, 도식화하기 등의 수학적 활동을 경험할 기회를 가져야 한다. Treffers(1987)는 수학화의 수평적 형태와 수직적 형태를 구분하였다. 전자는 문맥 문제를 수학적 문제로 전환하는 것을 포함하고 후자는 수학적 문제를 더 고차원적인 수준으로 끌어올리는 것을 포함한다.

이에 동반되는 안내된 재발명 원리(Freudenthal, 1973)에 의하면, 학생들은 수학이 발명된 과정에 유사한 하나의 과정을 경험할 기회를 가져야 한다. 즉, 학습 과정은 학생들이 스스로 결과를 찾을 수 있도록 계획되어야 한다. 이를 위해 수학사나 아동들의 비형식적 지식과 전략이 교육과정 설계를 위한 근원이 될 수 있다. 교육과정 개발자는 이러한 것들을 근원으로 한 사고실험을 바탕으로 학생들이 스스로 답에 이르는 경로를 상상하는 것이 중요하다. 일반적으로 사람들은 다양한 범위의 사고와 전략을 가능하게 하는 문맥 문제들을 찾을 필요가 있으며, 점진적인 수학화의 과정을 통해서 가능한 학습경로를 찾아가도록 하는 것이 필요하다.

둘째, 수준이론에 관하여 살펴보면, 수학화는 수준 상승과 밀접한 관련을 갖는다. 수준 상승이라는 아이디어는 Freudenthal의 수학 학습 개념의 핵심에 있다. 한 수준에서의 조작 활동이 다음 수준에서 분석의 대상이 된다. 한 수준에서의 조작 대상이 다음 수준에서는 교과 내용이 된다. 이러한 그의 수준이론은 Van Hiele의 수준이론을 기초로 하고 있지만, Van Hiele 이론은 거시적인 반면 Freudenthal의 수준은 미시적이다. Van Hiele(1986)은 여러 가지 사고 수준에 대한 그의 아이디어를 수학교육에서의 많은 문제들을 위한 해석의 틀로 도입한다. 그는 교사와 학생간의 의사소통 과정을 분석하였고 교사와 학생들이 사용하는 개념의 의미가 서로 다르다는 것을 관찰하였다. 비록 같은 용어들이 사용되었지만, 그것들의 의미는 서로 다른 준거틀에 기반을 두고 있다. 교사들은 그들 나름대로 자신이 가르칠 내용에 관한 여러 가지 관계들의 틀을 가지고 있지만 학생들은 그렇지 않다. 그 결과 그러한 틀의 존재를 미리 가정하는 주장들에 대한 논의가 불가능하다. 쌍방이 모두 같은 틀을 가지고 있을 때만 자유롭게 논증을 기초로 의견일치에 도달할 수 있다. 그의 이론을 학교수준에 적용하기 위해서는 기초 수준, 제 1 수준, 제 2 수준이 중요하다. 기초수준에서는 관계적인 틀이 아직 존재하지 않는다. 기초 수준에서의 교과내용에 대한 탐구는 기초적인 관계들의 형성으로 유도될 수 있고, 이는 차례로 하나의 틀이 생기도록 상호 연결될 수도 있다. 학생들이 그러한 틀을 확립하자마자 제 1 수준에 도달하게 된다. 다음 수준은 제 1 수준의 과정들이 반성이 되고 따라서 제 2 수준의 사고 대상이 될 때 시작된다. 예를 들면, Van Hiele은 수 개념 발달을 위한 수준 이론을 다음과 같이 전개한다(Van Hiele, 1986, p. 98). 기초 수준에서는 여전히 관찰 가능한 여러 가지 양 및 물리적 실체를 포함한 행동에 결합되어 있다. 제 1 수준에서는 수와 양 사이의 관계가 탐구의 대상이 되며, 관계적 틀이 만들어지기 시작한다. 예를 들면, 기초수준에서는 '넷'이라는 개념이 정사각형의 꼭지점 등과 같은 시각적 실체와 '하나, 둘, 셋, 넷…' 의 수열의 한 단어와 같은 특성들이 묶여 있을 수 있는 반면, 1 수준에서는 그것은 관계적인 틀 내에서 연합된다. 즉, 2+2나 2 곱하기 2 , 5-1의 관계적 틀이 형성된다는 것이다. 어떤 경우든 그것은 이미 구체적인 영역에서는 벗어난 것이라 볼 수 있다. 제 2 수준에서는 관계자체가 탐구의 대상이다. 이때 수들 상의 논리적이고 의미 풍부한 구성을 가능하게 하는 결합이 이루어진다. 그러나 이것은 수들 사이의 관계에 대한 탐구이고 아직은 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈간의 관계는 다루지 못한다. 이러한 수준의 구분은 절대적인 것은 아니다. 예를 들면, 두 번째 산술수준은, 대수를 위한 기초 수준으로 생각될 수 있다.

이러한 수준이론이 시사하는 바는 수학 수업은 사용되는 여러 가지 개념이 학생들에게 아주 친숙한 수준에서 시작되어야 하며 그 목표는 관계적 틀의 형성이어야 한다는 것이다. 즉, 교육과정을 구성할 때, 고립된 기능이나 기본적인 사실을 목표로 하기보다는, 여러 가지 교과과정, 여기서는 수와 수 사이의 관계적인 틀이 구성되도록 고려해야 한다는 것이다.

이러한 관계적 틀의 구성을 Gravemeijer (1994, p. 24)는 Skemp의 수학교육에 대한 관점과 연결시킨다. Skemp는 도식(schemata)을 기초로 한 학습 관념을 구성한다. 도식(schema)이라는 말은 지식이 기억 속에 저장되는 되는 방법, 즉 기본적인 지식의 항목들의 일관적 체계를 언급한다. 그의 이론의 기초는 인지심리학에 있으며, 도식들의 두 가지 중요한 기능을

다음과 같이 보고 있다. 첫 번째, 도식은 현존하는 지식을 통합한다. 두 번째, 도식은 새로운 지식의 획득에 있어서 정신적인 보조로서 기능한다. Skemp는 도식에 기초한 학습을 '관계적 이해'라고 하고, 이것을 '도구적 이해'와 대립시킨다(1987). 관계적 이해는 무엇이 어떻게 이루어지는 것을 알고 왜 그런 방식으로 될 수 있는지를 아는 것을 의미한다. 따라서, 관계적 틀의 창조는 도식의 증대나 재구조화 및 조정하는 것으로 해석할 수 있다. 관계적 틀의 발달은 아주 점진적인 성장 과정, 즉 단계화될 수 있는 과정으로 특징지을 수 있다. 이러한 단계화는 학습과정의 구조화를 위한 기초를 제공한다. 다른 말로 하면, 구조화는 관계적 틀의 점진적인 구성으로 해석된다. 따라서, 이러한 수준이론에서 고려하여야 할 것은 아동이 이러한 수준의 비약과 관계적 틀을 형성할 수 있도록 어떤 교육과정과 교수학적 방법을 취하는가 하는 점이다.

세 번째 원리인 교수학적 현상학은 이러한 수준의 비약을 가능하도록 취해야 할 교수학적 조처를 위한 하나의 준비가 될 수 있다. Freudenthal(1983)은 현상학적 방법을 통해 수학을 분석함으로써 수학을 인간의 활동으로 보고 수학적 활동의 본질을 수학화로 인식하였다. 수학화는 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하며, 수학화 과정은 현상과 본질의 교대 작용에 의한 수준 상승의 불연속적 과정이라고 볼 때, 교수학적 현상학은 이런 현상과 본질의 상대적인 관계를 교수학적 측면에서 논하는 것이라 할 수 있다. 이와 같은 관점에서 보면, 역사적으로나 개인적으로나 수학적 개념, 아이디어, 구조의 형성은 많은 현상을 다루어 봄으로써 심상을 구성하고 나중에 이론화할 수 있는 기반을 만들어 주는 것이 중요하다. 또한, 교수학적 현상학은 현실을 수학의 응용을 위한 근원으로만 보는 것이 아니라 현실 속에서 직관적 관념을 개발하기 위한 또는 심상을 구성하기 위한 개념 형성의 근원을 찾는 것을 목표로 하고 있다. 우리가 수학을 실제적인 문제들을 해결하는 과정에서 역사적으로 발달된 것으로 본다면, 추상적인 수학을 구체화한 구체물에 의존하기보다는 이러한 발달 과정을 가능하게 했던 문제들을 현시대의 응용에서 찾아보는 것이 합리적일 것이다. 형식적 수학은 상황고유의 문제 해결 절차와 개념을 다양한 상황들에 대해 일반화하고 형식화하는 과정에서 출현되었다고 생각할 수 있다. 따라서, 이러한 교수학적 현상학적 탐구의 목표는 상황특유의 접근 방식이 일반화될 수 있는 문제 상황들을 찾고, 수직적 수학화의 기초로 간주할 수 있는 패러다임적인 해결 절차들을 발전시킬 수 있는 상황들을 찾는 것이다.

현실적 수학교육은 Treffers(1987)가 수평적 수학화와 수직적 수학화에 대한 구분을 통해 기존의 수학교육 사조를 기계적, 구조적, 경험적이라 부르고 수학화를 중시하는 네덜란드의 수학교육을 현실적이라고 부른데 기인한다. 이러한 수평적 · 수직적 수학화의 공공연한 진술에도 불구하고, 현실적 수학교육은 '실세계 수학교육' 말하자면 수평적 수학화가 중시되는 수학교육으로 이해하기 쉽다. Freudenthal(1991)이 지적하듯이, 수평적 수학화라고 표현되는 것과 수직적 수학화라고 표현되는 것 사이의 경계는 잘 정의되지 않는다. 핵심적인 것은 '현실'이라는 것이 무엇을 의미하는가 하는 것이다. Freudenthal(1991, p. 17)은 '나는 '현실'이라는 용어를 어떤 상식의 단계에서 실제적으로 경험되는 것에 적용하고자 한다'라고 말한다. 그에게 있어서 현실은 감각적 경험과 해석의 혼합물로 이해된다. 이는 수학 또한 개인의 현실의 일부가 될 수 있다는 것이다. 현실은 정

적인 것이 아니라 당면한 개인의 학습과정의 영향을 받아 성장하는 것이다. 이것이 또한 Freudenthal의 '현실에서 출발하고 현실에서 머무르는 수학'에 대한 표현(1991, p. 18)이 어떻게 이해되어야 하는가를 보여주는 것이다. Van den Brink(1991-1, p. 80)는 '현실적'이란 '아동들이 그 상황을 상상하고, 자신의 아이디어, 경험, 환상을 구현할 수 있다'는 의미임을 주장한다. '상상하다'의 네덜란드 번역은 'zich REALISIEren'이다(Van den Panhuizen-Heuvel, 1998). 따라서, 네덜란드 수학교육 개혁이 '현실적'이라고 불리는 이유는 현실 세계와의 연결성 때문만이 아니라 아동들의 마음속에서 무엇인가 상상할 수 있는 문제 상황들을 제시하는 것을 강조하는 것과 관련된다. 이것이 의미하는 바는 문제들이 학생들에게 제시되는 문맥이 실세계의 문맥일 수 있지만 항상 그럴 필요가 있는 것은 아님을 의미한다. 환상적인 동화의 세계 심지어는 형식적인 수학 세계조차도 그것들이 학생들의 마음속에서 현실적인 것으로 느껴진다면 문제를 위한 적절한 문맥들이 될 수 있다. 말하자면, 현실적이란 단순한 일상생활을 의미하기보다는 그것을 포함하는 더 광범위한 세계로 아동이 체험할 수 있고, 감정이입이 될 수 있으며, 자신의 여러 가지 경험을 혼합해서 생각하고 상상력을 불러일으킬 수 있는 상황을 의미하며, 그러한 상황에서 수학적인 세계로 들어서는 것이 수평적 수학화이고 수학적인 세계에서 좀더 추상적인 수학의 세계로 한 걸음 더 진전하는 것이 수직적 수학화이며, 이것이 또 아동의 현실이 되고 이러한 순환과정이 반복되면서 현실이 성장되어 가는 것이다. 따라서, 현실적 수학교육에서 중요한 것은 단순히 아동의 현실 세계에서 시작한다는 것뿐 아니라 수업상황 자체가 아동의 체험의 일부가, 즉 현실화되도록 하는 것이 중요한 것이라고 할 수 있다. 따라서, 모든 수업에서 수시로 이러한 현실의 세계와 수학의 세계가 교대되도록 하는 것이 중요하다.

요약하면, 현실적 수학교육에서 수학은 우선적으로 하나의 과정, 인간 활동으로 간주될 수 있다. 동시에 안내된 재발명 원리는 교사의 적절한 안내에 의해 이러한 활동을 통한 수준 상승에 의해 산물로서의 수학에 이르게 된다는 것을 의미한다. 이를 위해 아동의 상상력이 발휘될 수 있는 적절한 상황들이 마련되어야 하며, 이러한 체험된 수학을 통해서 아동들은 수학이 생의 일부가 되며 여전히 유용하게 인식되는 것이다.

3. 현실적 수학교육의 수업이론

현실적 수학교육의 수업이론은 안내된 재발명 원리와 점진적인 수학화를 구현해 나가기 위한 좀더 구체적인 원리로서 Treffers(1987)가 제안하였다. 이는 첫째, 현상학적 탐구, 둘째, 수직적 도구에 의한 연결, 셋째, 학생들 자신의 구성과 산물, 넷째, 상호작용수업, 다섯째, 학습 가닥의 연결이다. 이러한 원리들을 좀더 상세하게 살펴보면 다음과 같다.

3.1 현상학적 탐구

현실적 수학교육에서의 수업의 첫 번째 단계는 구체적인 문맥으로 시작된다. 문맥이란 '어떤 구체적인 수업 과정에서 학생들에게 열려 있는, 수학화되어야 할 현실의 영역' (Freudenthal, 1991, p. 73)을 의미한다. 이 단계에서는 수학화를 염두에 두면서 여러 가지 개념과 구조가 내포된 현실 상황을 탐구한다. 이러한 탐구에서 중요한 것은 여러 가지 개념과

구조의 본질적인 측면에 관한 풍부한 직관적인 관념 또는 비형식적 지식과 전략을 개발하도록 하는 것이다. 또한 구체적이라는 의미는 어린이들이 조작할 퀴즈네어 막대나 블록들과 같은 구체물과는 전혀 다른 것이다. 이는 '현실적'이라는 것을 의미하며, 아동이 상상하고, 그 자신의 경험을 활용하고, 자신의 비형식적 전략들이 표출될 수 있는 상황을 의미한다. 이 때 현실이란 개념, 아이디어, 연산 및 구조의 근원으로서도 또한 그것들을 응용하는 영역으로서도 공헌한다.

3.2 수직적 도구에 의한 연결

수학적 개념이나 기능을 학습하는 것은 장기간에 걸쳐서 진행되는 과정이고 다양한 추상화 수준에 따라 이행되는 과정이다. 수학교육의 중요한 문제의 하나는 이와 같이 추상적인 수학적 지식을 어떻게 가르치는가의 문제이다. 지금까지의 일반적인 방식은 그러한 추상적 지식을 구체화한 구체물을 제시하는 것이다. 그러나, 구체물의 사용이 실제로 아동들이 수학적 통찰에 도달할 수 있도록 도움을 주지는 않는다. 구체물에 의한 접근 방식은 이미 완성된 지름길로 곧바로 접근하도록 되어있기 때문에, 제시된 구체물 자체는 구체적일 수 있지만 그러한 구체물이 드러내어야 할 수학이 여전히 아동들에게는 추상적이다. 즉, 구체물에 의한 수업은 아동들의 상황적인, 비형식적 지식을 간과하기 때문에 아동들의 기존의 인지구조와 맞물리지 못한다고 볼 수 있다. 이에 Cobb(1987)은 교수학적 표현에 구현된 수학적 개념은 그것들을 이미 가지고 있어서 그 구체물에서 그것들을 인식할 수 있는 전문가들만 볼 수 있다고 말한다. 즉, 구체물에 의한 외적인 표현과 그 안에 들어 있는 정신적 표상은 일치하기 어렵다는 것이다. 구체물 행동과 그것을 통해서 도달해야 할 정신적 행동은 동형으로 보기 어렵다는 것이다. 이에, 현실적 수학교육에서는 아동의 비형식적 지식과 전략에 기초한 수업의 필요성을 주장하며, 이를 위해 모델의 사용을 중시한다. 이것을 현실적 수학교육을 위한 영역 특유 이론(a domain specific theory)라고 말한다. 이는 스스로 개발된 모델들을 기초로 구체와 추상을 중개하기 위한 접근 방식이다. 이러한 접근 방식은 상향식으로 진행되는데, 그 이유는 주도권이 학생들에게 있기 때문에다. 이러한 비형식적 지식과 형식적 수준 사이의 교량 역할을 하기 위하여 여러 가지 모델이 '…의 모델(of model)'에서 '…을 위한 모델(for model)'로 전환되어야 한다. 수학적 이해의 성장에 있어서 이러한 중요한 메카니즘을 간파한 사람은 Streefland였다. 지금까지의 구체물이 이미 존재하는 모델을 나타낸다면, 현실적 수학교육에서는 모델이란 학생들 스스로가 문제 해결 과정에서 개발한 것이다. 처음에는 상황에서 비롯된 '…의 모델'이 일반화와 형식화의 과정에서 결과적으로 그 자체로 하나의 실체가 된다. 그것이 수학적 추론을 위한 '…의 모델'로 사용될 수도 있다(Gravemeijer, 1994; Treffers, 1991-2; Van den Heuvel-Panhuizen, 1998).

이와 같이, 현실적 수학교육에서는 아동이 추상화가 증가하는 여러 수준들을 거쳐서 진행해가도록 적절한 모델들을 제공하는 것을 중시한다. 이는 처음 수준에서의 직관적, 구체적, 비형식적인 문맥과 결합된 조작과 반성적, 추상적, 형식적, 체계적 조작 사이의 수준 차를 연결하는 데 도움이 되도록 처음부터 여러 가지 자료, 화살표 기호와 같은 시각적 모델, 상황 모델, 도식, 다이어그램, 그리고 기호와 같은 수학적 수단들이 제공되거나 아동들에 의해

탐구되고, 개발되도록 한다는 것을 의미한다 (Streefland, 1990). 이 단계에서는 이런 수학적 수단들이 그대로 부과되기보다는 학생들이 그 문맥에 맞는 자신의 생각을 표현할 수 있는 수단들을 만들어 보는 단계가 포함되어야 한다. 또한 구체적 또는 추상적이라는 의미는 고정적인 것이 아니라 상대적인 것으로 받아들여야 한다. 즉, 저학년에서 추상적이었던 것이 고학년에서는 구체적인 것이 될 수도 있고 고학년에 가면 산술 체계 자체가 대수를 위한 구체적인 조작이 될 수도 있다.

3.3 학생들 자신의 구성과 산물

수준 상승은 반성적 사고에 의해서 촉진되며, 갈등이나 학생들 자신의 활동은 반성적 사고가 일어나도록 하는 데 도움이 될 수 있다. 학생들은 이미 학습한 학습 영역들을 반성하고 앞으로 무엇이 진행될 것인지에 대해 예상할 기회를 계속 가져야 한다. 이런 반성적 사고를 가능케 하고 학생들의 활동을 더욱 활성화하기 위해서는 주어진 문맥을 다루어 가는 것도 중요하지만, 어떤 단계에 이르러서는 좀더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다. 현실과 관련된 문제나 수학적인 문제로서 다양한 해결책과 때로는 다양한 수준에 따른 해결책을 허용하는 열린 문제나 해결되기 전에 자료나 준거들을 스스로 보충할 것을 요구하는 불완전한 문제 또는 모순이 되는 문제를 다루는 것도 필요하다. 또한 스스로 문제를 고안하고 기호나 용어, 도식 또는 모델을 고안하는 등의 활동을 통해서 학생들은 수업에서 수학화 과정을 스스로 경험해 갈 수 있다(Streefland, 1988).

현실과 관련된 열린 문제 또는 불충분한 문제를 해결한다는 것은 수학적 수단에 의해서 현실의 여러 가지 현상을 기술하고 조직화하는 것을 의미한다. 이런 활동이 지속되면 수학적 태도 즉 현실 상황을 수학화하는 수평적 수학화 능력을 개발하는 데 도움이 될 수 있다. 그리고 수학적인 자료를 조직화해 봄으로써 수학화의 기회를 극대화할 수 있다. 또한 학생들은 자신의 구성 활동을 통해서 잘못된 아이디어와 오개념을 드러냄으로써 반성적 사고를 촉진시킬 수 있다. 용어, 기호, 도식, 모델 등을 만들어 보게 하는 것은 수평적 수직적 수학화 모두에 공헌한다.

특히 아동의 자유로운 산물 중에 Van den Brink(1987)는 '교과서 저자로서의 아동'을 강조한다. 그는 이러한 활동을 1학년 산술에 적용하면서 '산술의 자유 예술'이라고 불렀는데, '자유'라는 말은 아동들이 모든 종류의 개인적 경험을 내보일 수 있기 때문이고, '예술'이란 아동들이 그들 자신의 수학을 창조하도록 초대되기 때문이다. 아동들은 수학을 잘하든 못하든 다음에 입학할 어린 아동들을 위한 수학책을 만든다는 데 대해 즉각적인 열의를 보인다. 아동들은 새로운 아이디어들을 많이 생각해 내는데, 교재와 유사한 문제 뿐 아니라 교재에서는 보기 어려운 교실상황을 소재로 문제를 만들기도 하고 어떤 학생은 유치원 학생들이 현재 소유하고 있다고 생각되는 만들기, 그리기, 세기 등의 기능을 고려한 후에 그 기능에 맞도록 계산 문제들을 각색하기도 한다. 또한 수학책에 넣을 게임으로도 실제적으로 아동들이 학교 교실 밖에서 하는 줄넘기, 구슬, 오랏말 놀이 등을 소재로 한 게임 등을 만들어 낸다. 특히 이러한 수학책은 또한 개별화에 적절하다. 즉, 아동은 이러한 과정에서 자신들의 수준을 드러내고 자발적으로 더 나은 성취를 하도록 자극한다는 것이다. 일부 아동들은 큰 수들을 더 빨리 도입하기도 하고 그것들을 다양한 문제와 응용에 사용하기도 한다. 따라서, 학생들

자신의 자유로운 구성과 산물을 통해 학생들은 스스로 수학 학습과정에 공헌할 수 있는 기회가 극대화된다고 할 수 있을 것이다.

3.4 상호작용수업

탐구 수업은 학생들 자신의 구성 활동뿐만 아니라 상호 작용 수업 즉 서로 상의하고, 참여하고, 타협하고, 협동하고, 개관할 기회가 주어지며 교사는 설명 위주가 아니라 조력자로서의 역할을 담당할 때, 효율적으로 이루어질 수 있다. 이런 과정에서 고려해야 할 점은 기본적으로 개별화하되, 다른 한편으로는 단일화할 수 있도록 수업 과정을 고안해야 한다는 것이다(Treffers, 1987, p. 261). Freudenthal(1991)은 협동과 상호 작용을 위해서 이질 학급 편성의 중요성을 강조해 왔다. 교과 내용은 다소 자체로서 완비된 여러 단원으로 분할되고 각 단원은 이수하는 데 몇 주간의 시간을 필요로 한다. 학생들은 같은 단원에서 같이 시작하고 계속 같은 상황에 머무르면서, 상의와 협동할 기회 그리고 반성과 반복의 기회를 갖는다. 각 학생은 개인적으로 연구할 기회를 갖고 그룹과 분리되지 않은 상태에서 자기 자신의 탐구 경로를 구성할 기회를 갖는다.

재발명에 의한 학습은 다양한 현실들로부터 출발해서 다양한 기법들을 개발하면서 자유롭게 문제들과 수학적 절차들을 구성하고 만들어 낼 기회를 목표로 한다. Streefland(1990)는 이러한 열린, 현실적 접근은 개별화되고 다양한 반응 패턴들을 불러일으키기 때문에, 상호작용을 위한 반복적인 기회들이 존재한다고 말한다. 학생들은 여러 아이디어들을 비교하고 교환하며, 서로 다른 수학화의 수준에서 문제의 해결책에 관해 논의할 것이고, 때로는 인지적 갈등 상황을 경험하면서 더 나은 진보를 위한 최선의 방법을 협의할 것이다. 일반적으로 자기 자신의 활동과 다른 사람들의 활동을 비교할 기회는 또한 자기 자신의 문제 해결방법을 반성할 기회도 제공한다. 집단 학습을 촉진하기 위한 상호작용의 요구는 학습을 위한 사회적 문맥으로서의 학교 학습 환경을 존중함으로써 충족될 수 있다. 이곳이 아동들 상호간에 아이디어들을 교환하고, 협의하고, 여러 주장들을 반박하고, 논의하는 일들이 장기적인 학습 과정에 공헌하고 진정으로 개별화된 교수를 위한 전제조건의 역할을 할 수 있는 곳이다. 동시에 상호작용은 전체 집단이 수학 학습에서 진보할 수 있도록 도와준다. 학생들이 개발한 비형식적인 전략들과 절차들을 구사할 수 있는 기회를 잘라버리기 보다는 그것들이 허용되고, 촉진되고 이용되도록 하는 것이 중요하다.

3.5 학습 가닥의 연결

장기 학습 과정으로 볼 때 과거의 학습과 미래의 학습은 서로 통합되어야 한다. 너무 작은 단계로 쪼개어 가르치거나 너무 체계적으로 가르치면 오히려 맥이 끊기는 결과를 초래한다. 수학화를 추구하는 수업에서는 학생들이 선호하는 비형식적인 방법을 억압할 것이 아니라 그것을 활용해야 한다. 예견 학습이란 이와 같이 선호하는 방법을 활용하는 학습을 의미한다. 즉, 체계적이고 형식적으로 다루기 전에 일상 언어로 표현된 상식적인 내용으로 접근할 수 있도록 다양한 비형식적인 기회를 제공함으로써 나중에 체계적인 학습의 발판이 되도록 하는 것을 의미한다. 이와 대응되는 개념으로 회고 학습이 있는데, 이는 오래된 학습 문제를 적절할 때마다 더 높은 견지에서 더 넓은 문맥에서 재고의 가치가 있을 때마다 회상하는 것을 의미한다. 일반화나 언어화가 이루어지자마

자 과거의 경험은 새로워지고 일반 법칙에 대한 특수한 사례로 이해되어야 한다. 이전의 생각을 재고해 보는 것은 더 깊은 이해를 가져온다. 따라서, 학습자에게는 예견 학습이 허용되고 자극되어야 하고, 회고 학습이 학습 습관이 되어야 한다(Freudenthal, 1991, pp. 118-119).

수학을 배운다는 것은 단편적인 지식과 기능을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 지식과 기능을 하나의 구조화된 전체로 조직하는 것이다. 따라서, 새로운 개념과 기능은 기존의 지식체에 동화되거나 아니면 기존의 지식체 자체가 이 새로운 개념과 기능에 의해 새롭게 조직되어야 한다. 따라서, 새로운 관점에서 기존의 지식을 살펴보는 기회를 마련해야 하고 교사는 이런 기회를 충분히 제공해야 한다. 따라서, 예견 학습은 하나의 새로운 개념과 기능을 알기 위한 출발점이며 회고 학습은 새로운 개념과 기능을 알았을 때, 기존의 지식체를 새로운 안목에서 보는 것을 말한다. 즉, 수학을 학습한다는 것은 단지 지식과 기능의 관련된 요소들의 모임을 마음속에 비축해두기보다는 잘 조직화되고 의미 있는 전체에 적합한 구조화된 지식과 기능들을 구축하는 것을 의미한다.

예견 학습과 회고 학습의 연장선상에서 학습 영역의 혼합을 생각해 볼 수가 있는데, 이것은 관련된 학습 과정을 전체로 보는 관점이다. 학습은 가능한 한 일찍부터 지속적으로 서로 얽혀 있는 여러 영역들로 조직되어야만 한다. 비와 분수는 처음부터 함께 다루어질 수 있다. 분리된 여러 대상을 비교하는 것은 하나의 대상을 여러 부분으로 나누어 비교해 보는 것과 같고, 수직선과 비례표는 비와 분수를 서로 관련짓는 수단이며 같은 아이디어에 대한 다른 표현이 된다. 비는 비례 관계로 연결되고 이것은 또다시 일차함수로 연결된다. 이와 같이 수학의 다양한 영역들이 횡적·종적으로 연결되어 전체적인 구조화가 이루어질 대, 수학을 여러 복합적인 상황에 응용할 수 있다. 또한 처음부터 응용과 순수수학이 결합되어야 하며, 현실이 수학적 구조와 개념의 근원이자 응용 영역이 되도록 지도되어야 한다. 따라서, 여러 가지 학습 가닥을 포함하고 있는 상황 모델로서 작용할 수 있는 문맥을 찾아내는 것이 중요하다.

4. 현실적 수학교육의 학습과정의 예

이 절에서는 현실적 수학교육의 학습과정의 예로 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 학습과정의 일부를 개관해 보면서 이러한 과정에서 기초가 되는 수학화의 과정, 교수학적 현상학, 수준이론을 포함한 여러 이론이 어떻게 적용되며, 어떤 문맥들을 통해서 앞에서 제시한 수업이론 원리들이 어떻게 구현되는지를 분석하고자 한다.

4.1 덧셈과 뺄셈

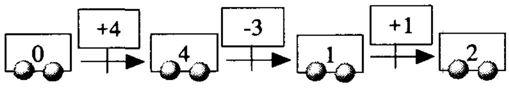
처음에 덧셈과 뺄셈을 지도할 때 중요한 것은 아동들의 주변에서 이러한 일들이 자연스럽게 일어나는 상황, 아동들이 경험한 상황들을 찾고 이것으로부터 아동들의 상상력과 직관적인 관념들을 불러일으키는 것이다. 이러한 과정에서 덧셈과 뺄셈을 인식해 내는 수평적 수학화의 과정과 적절한 기호법과 알고리듬의 개발이 이루어지는 수직적 수학화가 같이 일어나도록 하는 일이다.

현실적 수학교육에서 1학년 아동의 덧셈과 뺄셈은 버스에 대한 이야기 및 아이디어와 더불어 일련의 버스 그림들과 화살표 기호가 중요한 역할을 하며 덧셈과 뺄셈이 자연스럽게

동시에 이루어진다(Van den Brink, 1984; 1991-1).

버스에 승차하고 하차하는 사람들에 대한 수학 드라마를 상연하고 설명하는 이야기를 들려주면서 때로는 교실에서의 버스 놀이를 통해서, 아동들은 그 상황을 상상해야 하며 그럼으로써 버스에 대한 그들 자신의 아이디어, 경험, 환상들을 '현실화'한다. 이러한 이야기의 주인공은 난쟁이, 거인, 요정, 동화의 주인공 아니면 아동들이 잘 알고 있는 사람들이 될 수도 있다. 그러므로 이러한 유형의 수학교육을 '현실적'이라고 부르는 것이다. 때때로 아동들은 배우나 이야기하는 사람의 역할을 하고, 때때로 관찰자나 청취자의 역할을 한다. 이러한 방식으로 학생들은 앞으로의 수업을 위해 스스로 기여한다.

이러한 문맥에서 중요한 언어 수단은 우리가 잘 알고 있는 등호에 관련된 식이 아니라 화살표 언어이다. 얼마나 많은 사람들이 버스에 탔는지를 나타내는 수가 버스의 한 옆면에 기록된다. 화살표는 방향을 나타낸다. 버스가 버스 정거장에 오면 버스 정거장에 있는 표시는 얼마나 많은 사람들이 타고 내리는지를 보여준다(그림 1). 처음에 화살표는 버스와 관련된 장식으로 제공되지만 아동들은 곧 그 화살표에 대한 모든 종류의 상황들, 즉 우체국, 가게, 치과의사의 대기실, 볼링게임들을 생각해낸다. 그리고 나서 아동들은 그 화살표를 적절하게 장식한다.



<그림 1> 버스 문맥에서의 화살표 기호

Van den Brink(1984)는 버스 문맥, 여러 가지 극화 및 화살표 기호의 도입의 근거는, 계산하는 것은 그 자체가 역동적인 특성을 갖기 때문이라고 말한다. 즉, 계산을 하는 이유는 무슨 일인가 일어난다는 것이다. 책에서는 아무 일도 일어나지 않으며, 그림들은 정적이다. 아동들은 스스로 사건들을 고안해야 하는데, 이러한 목적에 화살표 언어가 도움이 될 수 있다는 것이다. 또한 산술 연극은 그림을 보는 것보다 계산이 아동의 현실 생활을 목적으로 하고 있다는 것을 의미한다. 산술과 무관해 보이는 사실이 산술 연극에서는 중요하며 이것은 산술을 아동의 놀이와 환상의 삶에 통합시킬 수 있다.

여러 가지 장식이 아동들에 의해 발명되고 나중에 학생들은 그것들을 생략한다. 이것이 화살표 합들이 일반화되는 방법이다 (Gravemeijer, 1994, p. 29). 이러한 문맥에 한정된 수학적 언어를 기초로 다른 상황에서도 사용될 수 있는 반 형식적인 화살표 언어가 개발되는 것이다(그림 2).

$$2 \xrightarrow{\quad +4 \quad} 6$$

<그림 2> 화살표 기호의 일반화와 형식화

이러한 버스 문맥 등은 재발명 원리의 흥미로운 예로 보여진다, 이 안에서는 여러 가지 기술을 위한 도구들이 양적인 변화를 기술하기 위해 사용된다. 결과적으로, 기술적 도구는 점점 더 중심이 되어가고 점점 더 현실로부터 멀어져 간다. 이 과정에는 두 가지의 수학적 과정이 있는데, 즉 형식화와 일반화가 이루어진다.

형식화는 '일상적인 언어'를 수학의 '형식적 언어'로 변화하는 과정과 관련된다. 시내버스의 경우에 승객의 수는 처음에는 일상적인 언어로 표현되며, 이는 이어서 정류장 표시와

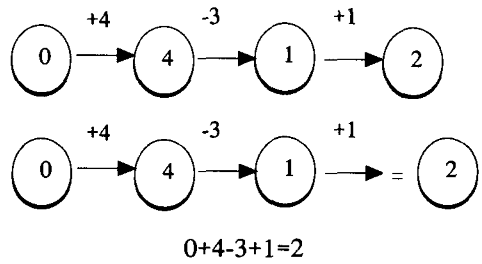
버스들의 열 또는 버스 사슬로 표현된다. 이 사슬은 결과적으로 꾸밈없는 화살표 언어로 도식화된다. 일단 학생들이 등호에 친숙해지면 그들은 여러 가지 사건이나 역동적인 상황에 대한 시각적인 준거가 없어도 형식적인 언어를 다룰 수 있다. 또한 정적인 상황들의 기술에 적절한 형식적인 언어도 다룰 수 있다.

일반화는 반복적인 것 또는 특별한 언어가 사용될 수 있는 영역의 확장을 말한다. 일단 학생들이 버스 정거장 화살표에 약간 익숙해지면, 이러한 화살표 언어는 볼링 게임, 병원의 대기실에서 기다리는 사람들과 같은 다른 상황에서도 사용된다. 일반화의 과정은 언어의 형식화가 동반된다. 정거장 표지판이 사라지고 화살표들은 더 이상 버스 정거장에서의 사건들로 해석되지 않는다.

이러한 과정이 화살표 모델에 의해서 덧셈과 뺄셈의 형식적 기호법으로 이행되어 가는 과정이고 앞에서 설명한 '…의 모델'이 '…을 위한 모델'로 전환되어 가는 과정이다. 이러한 모델을 통해서 아동들은 현실적인 문맥에서 시작해서 적절한 모델을 토대로 좀더 추상적인 수준의 수학으로 수준상승이 이루어지는 수학화의 경험을 하게 되는 것이다. Freudenthal은 아동의 수학화를 그들이 현실 세계와 기호의 세계를 앞뒤로 오가는 활동으로 간주한다. 문맥이라는 장식으로 꾸며진 화살표 언어는 이러한 언어적 현상을 뒷받침한다.

3+...=5와 그에 대응되는 시내버스 문제를 생각해 본다면 이러한 버스 문맥과 화살표 기호의 장점이 두드러지게 보인다. 시내 버스 문맥의 강점은 학생들이 무엇이 일어나고 있는가를 의식한다는 사실에 있다. 재발명 과정 덕분에 그들은 지금 좀더 형식적인 기호법으로부터도 현실 생활의 문맥을 상상할 수 있다는 것이다. 재발명을 통해 형식적인 기호법을 구성하는 것은 원래의 문맥으로 되돌아가는 것을 가능하게 한다. 즉, 시내버스 문맥은 수학적 활동에 의미를 부여한다.

그런 후에 화살표 언어는 정적인 비교를 포함하는 여러 가지 상황들 속에서 등호가 개발된 후에 결과적으로 표준적인 기호법 형태에 의해 대치된다(Van den Brink, 1984). 처음에는 버스 상황에서 화살표 언어가 탄생되고, 두 번째는 이야기의 마지막 상황을 나타내는 기호로 등호와 화살표 기호가 혼합되어 쓰이고, 그 다음으로 화살표 기호가 생략된다(그림 3).



<그림 3> 화살표 기호 → 등호

등호는 실제적으로 두 가지의 의미로 쓰인다. 하나는 <, >와 같은 상대적인 관계를 나타내는 기호로, 다른 하나는 보통 계산의 결과를 나타내는 결과적 기호로 사용된다. 등호의 이러한 두 가지의 의미에 대한 혼돈이 산술에서 나타나는 많은 어려움의 원인이기도 하다. 그러나 화살표는 순수한 결과적 기호이기 때문에 이러한 혼돈을 일으키지 않는다. 또한 화살표 기호는 연속적인 변화를 계속 나타낼 수 있다는 의미에서 등호보다 광범위한 응용영역을 가진다.

또한 이러한 단계에서 관계적 틀의 발달은 무엇보다도 퀴즈네어 자료를 사용한 수의 구조화에 의해 뒷받침된다. 관계적 틀을 확장하는데 있어서 수와 관련된 기본적인 사실들의 기

초를 형성하는 전략들이 공동 개발된다 (Gravemeijer, 1994, p. 29).

위에서 살펴 본 바와 같이 간단한 덧셈과 뺄셈 학습에서는 이러한 연산들이 자연스럽게 나타나는 버스 문맥으로 시작하여, 그 상황의 모델인 화살표 기호를 여러 상황에 사용하는 과정에서 일반화하고 형식화함으로써 형식적인 언어로 이행하며, 그러한 과정에서도 언제든지 문맥으로 되돌아 갈 수 있는 통로를 마련해 주면서 수학화의 과정을 경험하게 된다.

4.2 세로 덧셈과 뺄셈

학생들은 재발명 활동을 통해서 수학화 과정에서 핵심적인 역할을 수행함으로써, 형식적인 수학적 개념, 연산, 구조 등으로 이행하는 것이 용이해진다. 전통적인 수업은 학생들의 수동적인 수용 능력을 바탕으로 했기 때문에 조기에 형식적인 수학을 제시하게 되었고 그로 인하여 아동들에게 정신적인 퇴보 현상을 불러일으켰다고 볼 수 있다. 학습 과정에서 중시해야 할 것은 출발 단계에서 학생들의 비형식적 방법을 이용할 기회를 극대화시키는 것이고 자신들의 활동을 반성케 함으로써 단축과 간소화를 유도하고 자신에 대한 진단을 할 수 있는 기회를 제공할 수 있도록 해야 하며, 나아가서 표준의 형식적인 절차와의 접목이 이루어지도록 해야 한다. 여기서 교사는 역사적인 분석을 통해서 수학화에 대한 어떤 암시를 받을 수 있다.

세로 덧셈과 뺄셈의 경우에 큰 수의 십진법 기호 표현, 위치 기수법, 주판의 사용 등이 중요한 이정표이다. 학생들이 문맥을 통한 수업 도중에 스스로 이러한 장치들의 의미를 발견한다면, 오개념의 발생은 피할 수 있다. 십진법 체계의 학습과정을 살펴보면 다음과 같다 (Gravemeijer, 1994, pp. 68-73).

아동들에게 십진법 체계를 도입하기 위해, 분장한 목자가 스크린에 나타난다. 이 목자는 각각의 양에 대해 돌 하나씩을 주머니에 넣음으로써 그가 몇 마리의 양을 가지고 있는지를 일일이 기억하고 있다. 그러나 어떤 시점에서, 목자는 너무 많은 양을 갖게 되어서 돌 주머니가 그에게 너무 무거워진다. 목자의 문제는 아동의 문제가 된다. 그는 그것을 어떻게 해결할까? 목자의 답이 마지막으로 제시되면, 이는 또한 현실 문제에 대한 진짜 해결책으로 경험된다. 돌의 수가 너무 크면, 목자는 그의 손가락 수만큼의 10개의 돌들을 하나의 색돌로 바꾼다. 십의 묶음을 만드는 과정과 그 표현 및 해석은 동전들을 가지고 다시 행해진다. 이 예에서, 구체물의 기능은 Dienes 블록과는 다르다. 딘즈 블록을 사용할 때는 십을 밑으로 하는 묶음은 구체물에 이미 정해져 있다. 목자의 경우에는 어떤 문제를 해결하기 위한 아동들의 매우 의식적인 동의에 의해 이루어지는 것이다. 이 단계에서 활동은 아직 비구조화된 구체물을 가지고 이루어진다. 나중에 위치법 체계가 유사하게 구성된다. 단지 나중에 돈을 가지고 하는 활동이나 십진법 체계와 관련된 활동과 같은 구체물과 문맥들이 십진법이 공고히 되는 곳에 도입된다.

주판의 도입은 대개 목자의 경우에서와 마찬가지 방법을 따른다. 십을 밑으로 반복되는 묶음이라는 아이디어는 군주 이야기 속에서 다시 익히게 된다. 변덕이 생길 때마다, 군주는 그가 얼마나 많은 금조각을 가졌는지 알기를 원하였고, 그것들을 더 쉽게 세기 위해, 동전들이 십의 더미와 백의 더미들로 묶여졌다. 학급에서, 이 이야기는 동전들을 가지고 되풀이된다. 교환하고 묶는 활동이 그림과 더불어 연습된다. 나중에 주판이 도입되는데 이 또한 알고

리듬의 역사에서 주요한 역할을 해 온 장치이다. 서로 다른 막대들 위의 구슬들은 흐트러진 금조각들, 십의 묶음과 백의 묶음들을 나타낸다. 교환하고, 받아 내림과 받아 올리는 원리들이 금조각들을 묶고 푸는 과정을 배경으로 하여 개발된다. 단지 그렇게 한 후에 지필 알고리듬과 같은 것으로의 전이가 이루어진다. 이는 처음에는 잠정적인 단계들 또는 잠정적인 셈들을 적어 내려가는 충분한 기회를 주고 단지 한참 후에야 표준 알고리듬으로 축약된다.

이러한 지필 알고리듬에 대한 단축 과정은 Streefland(1988; 1990)에 의해 잘 나타난다. 덧셈에 대한 과정은 생략하고 뺄셈에 대한 학습 과정을 살펴보면 다음과 같다. 아동들은 '내 책은 53쪽이다. 나는 26쪽까지 읽었다. 이 책을 다 읽으려면 얼마나 더 읽어야 할까?'라는 문제를 처음부터 뺄셈으로 인식하지 않는다. 어린이들이 이 문제를 뺄셈 문제로 인식하지 않을지라도 이 문제를 풀 수 있다. 예를 들면, 26으로 시작해서 계속 세는 여수 세기 방법에 의해 그들은 26부터 53까지의 거리를 메우려고 노력할 것이다(그림 4). 이러한 다양한 방식들이 수직선이나 아직 구조화되지 않은 수직선 위에도 잘 표현될 수 있다. 이러한 수직선을 이용해서 적절한 기준점과 중간점들을 이용해서 계산해 나갈 수 있다.

(26)+4(30)+10(40)+10(50)+3(53) ⟶ 27
(26)+10(36)+10(46)+4(50)+3(53) ⟶ 27
(26)+4(30)+20(50)+3(53) ⟶ 27
(26)+20(46)+7(53) ⟶ 27

<그림 4> 여수 세기에 의한 뺄셈

또한 보통 일반적으로 암산에서 많이 사용하는 방법을 사용해서 계산할 수도 있다(그림 5) 어린이들에게는 이것이 아주 자연스러운 방법이며 동시에 그들 자신의 적절한 기호법을 발명할 기회를 제공한다. 점진적인 단축에 의해서 이것은 결과적으로는 올바르게 뺄셈 알고리듬이라고 불릴만한 것으로 유도된다(그림 6). 교사에게 이것은 아동들이 그들이 한 것에 대해 회고하고 이러한 활동을 자극할 계속적인 기회를 제공해주는 것을 의미한다. 이는 또한 이 과정에서 다음에 무엇이 학습될 것인가에 대한 예상을 포함한다.

여기서 세로 뺄셈을 학습해 나가는 과정을 살펴보면, 처음에 나타나는 여러 가지 표현들은 책을 읽는 방법과 많은 관련이 있으며, 대부분은 여수 세기의 방법을 사용하는 경우가 많다. 계산이란 아직 구체적인 절차이고, 아직 그 문맥에서 벗어나지 못하고 있다. 두 번째 수준에서 수직선과 암산 세로 산술과 같은 모델이 사용될 때도, 구체적인 것에 대한 언급은 비록 그것이 적절한 기호를 적용하는 데는 더 이상 필요하지 않지만 여전히 도움이 된다. 암산 세로 산술이 형식화되는 세 번째 또는 추상적 수준에서, 그 절차는 전적으로 형식적인 수체계 내에서 이해될 것이다. 이 때 뺄셈의 심층 구조가 명백해질 것이다. 이러한 수준들을 거치면서 뺄셈에 대한 심상과 문맥 문제로부터 뺄셈을 인식하는 수평적 수학화와 알고리듬을 형식화해 가는 수직적 수학화의 경험이 교대로 이루어지며, 아동들은 자신의 방법과 다른 아동의 방법을 비교 검토하며 활발한 상호작용이 이루어진다. 또한 뺄셈을 학습하는 데 현실적인 문맥들을 사용함으로써 뺄셈을 여러 상황에 응용할 수 있도록 한다.

84	84	84	84	84	84	84
21	22	23	24	25	26	27
60|3	60|2	60|1	60|0	60|-1	60|-2	60|-3
63	62	61	60	59	58	57

<그림 5> 암산에 의한 뺄셈

a) 8371	b) 8371		c) 8371
3754	3754		3754
5000-400+20-3=4617	5000		$5\,{}^{-}42\,{}^{-}3$
	-400	4600	462^{-3}
	+20	4620	4617
	-3	4617	
	4617		

<그림 6> 비형식적 뺄셈 전략

4.3 곱셈과 나눗셈

재발명 원리는 역사적 과정을 참조로 학생들은 발견된 수학을 그런 방식대로 재구성할 것을 희망한다. 물론, 수학적 지식을 구성 또는 재구성하는 것이 역사적 측면보다 훨씬 중요하다. Freudenthal이 재발명 원리를 선호하는 이유는 그것이 대부분의 성인 수학자가 새로운 수학적 아이디어에 친숙해지는 방법이기 때문이다. 현실적 수학교육에서는 수학사가 적절한 학습 경로를 찾는데 도움을 줄 수 있지만 학생들 자신이 발명한 풀이 절차들 또한 가능한 길을 제시한다.

Ter Heege(1985)는 대부분의 어린이들이 곱셈표를 맹목적으로 암기하는 것이 아님을 보여주었다. 그들은 오히려 좀더 쉬운 것으로부터 좀더 어려운 것들을 유도해 내는 전략들을 발명한다. 아동들이 기본적인 곱셈을 계산하기 위해 사용하는 전략은 일반적으로 여섯 가지가 있는 것으로 보인다. 이러한 전략들은 어떤 기본적인 사실들이 된다.

1. 아동들은 교환성질을 적용한다: $6\times7=7\times6$. 많은 아동들은 이 성질을 아주 잘 알고 있어서 그들은 이러한 '쌍둥이 합'을 거의 의식하지 않고도 사용한다. $7\times8=?$이라는 질문에 대해 아동들은 80의 반인 $8\times5=40$ 더하기 8 또 더하기 8이라고 말한다.
2. 아동들은 10을 곱하는 것, 즉 $7\times10=10$이 간단하다는 사실을 이용한다. 즉 7에 0을 덧붙이는 방법을 이용한다. 이러한 전략은 1번의 전략과 더불어 신속하게 기초 기능이 될 수 있다. 예를 들면, $6\times10=60$이 $6\times5=30$을 계산하기 위한 하나의 기반이고, 8×10은 8×9를 위한 기반이다.
3. 아동들은 두 배함으로써 어떤 곱셈들을 계산한다. $7\times2=14$를 기반으로 하는 아동들은 14를 두 배함으로써 7×4를 계산할 수 있다. 이는 종종 14+14를 계산함으로써 이루어진다. 이렇게 두 배하는 것은 받아 올림이 없기 때문에 아주 간단하지만, 28+28의 경우는 그렇지 않다. 이것이 7×8이 왜 7×4보다 더 어렵게 생각되는지에 대한 이유이다. 아동들은 $\ldots\times4$를 계산하기 위해 $\ldots\times2$를 기초로 사용한다. 그들은 이러한 전략에 아주 숙달되어서 그들은 적절히 이 두 배 전략을 좀더 일반적으로 적용할 수 있다. 즉, $\ldots\times8$은 $\ldots\times2$를 두 배함으로써 계산될 수 있다. 이것은 다음과 같은 패턴을 이룬다. 처음 $\ldots\times2 \longrightarrow \ldots\times4$, 나중에는 $\ldots\times4 \longrightarrow \ldots\times8$로 계산한다. 때로는 아동들이 $\ldots\times3$을 두 배함으로써 $\ldots\times6$을 계산할 것이다.
4. 아동들은 잘 알고 있는 곱셈을 반으로 나눈다. 단지 이러한 전략은 제한적으로 사용된다. 이것은 거의 예외 없이 $\ldots\times5$의 곱셈과 관련되는데, 이는 $\ldots\times10$을 반분해서 계산한 것이다. 예를 들면 6×10은 간단하다. 그 이유는 60의 반은 십 6개의 반을 택함으로써 계산될 수 있다. 아동들은 7×10의 반을 구하는 것은 더

어렵게 생각하는데 그 이유는 십 7개의 반을 택하는 것은 좀더 어렵기 때문이다.

5. 아동들은 피승수를 한 번 더 더함으로써 잘 알고 있는 곱셈을 증가시킨다. 7×5=35가 기초 또는 쉽게 계산되는 곱셈이라면, 아동들은 7×6을 35+7로 계산함으로써 해결할 수 있다. '한번 많게' 전략은 주로 ...×3을 계산하는데 적용된다. 그들은 ...×2로 시작하며 이것을 피승수를 한 번 더 더함으로써 이것을 증가시킨다. 어떤 경우에 우리는 아동들이 7×7=(35+7)+7와 같이 이러한 절차를 두 번 적용하는 것을 본다.
6. 아동은 피승수를 한 번 뺌으로써 잘 알고 있는 곱셈을 감소시킨다. 그들은 종종 7×9=70-7로 계산한다. 이 '한번 적게' 전략은 거의 대부분 ...×9에 사용된다. 이는 아주 간단한데 그 이유는 받아내림이 없기 때문이다. 예를 들면 우리가 이것을 8×8로 시작하는 8×7과 비교하면 우리는 이것이 훨씬 더 어렵다는 것을 안다. 64-8=56은 받아 내림을 필요로 한다. 이는 아동이 '한번 적게' 전략을 한 행에 두 번 사용하는 것, 예를 들면 7×8을 계산하는 데 7×8=(70-7)-7로 계산하는 것을 막을 수도 있다.[2)]

이와 같이, 아동들은 곱셈표를 맹목적으로 외우거나, 동수누가의 개념만이 아니라 자신들의 비형식적인 전략인 순서 바꾸기, 열 배 하기, 두 배 하기, 1/2 배 하기, 한 번 더 더하기, 한 번 더 빼기 등을 이용하여 의미 있게 학습한다는 것이다.

현실적 수학교육에서는, 이러한 학생들 자신의 풀이 절차들이 학습을 시작하는데 도움이 될 수 있다. 종종 학생들의 자발적인 행동은 앞으로 다루게 될 여러 기능과 개념을 예견한다. 학생들 스스로에 의해 발명되는 풀이 절차의 관찰을 기초로 한 수업은 재발명 원리의 좀더 세련된 형태라고 하겠다.

Gravemeijer(1990)는 Ter Heege가 구분한 그러한 전략들의 발달을 자극하기 위해서 예를 들어, 직사각형 모델을 기초로 한 문맥 문제들을 사용할 것을 권고하고 있다. 이 문제는 7×9 격자 모양의 직사각형에 타일이 붙어 있는 도로 위에 차가 정차되어 있는 상황에서, 즉 격자들의 일부가 차에 의해 가려진 상태에서 격자의 수를 세는 문제이다. 이 문제는 학생들이 곱셈으로서의 7×9를 이해하기 전에 제기될 수 있다. 단순히 보이지 않는 부분까지 타일들의 개수를 세거나, 9, 18, 27 ..., 또는 7, 14 등으로 묶어 세기, 한 줄, 두 줄, 네 줄, ...과 같이 두 배 해서 계산하기, 7×10에서 7을 빼기 등을 포함해서 모든 종류의 풀이 절차들이 사용될 수 있을 것이다. 타일이 붙어 있는 포장도로를 참조로, 타일들을 세는 것이 현실적 문

2) 8의 곱셈표를 하나의 예로 든다면, 많은 아동들이 이 표의 기본 곱셈을 다음과 같이 계산할 것이다. 8×1은 거의 즉각적으로 암기해서 알고 있는 사실, 8×2는 신속히 암기해서 알고 있는 사실이 되며 따라서 새로운 지식을 획득하고 계산하는데 중요한 기반이 된다. 이러한 사실은 8을 두 배하는 것에서 발생하며 이 자체는 기본적인 덧셈 8+8=16을 기초로 한다. 8×3은 종종 8×2를 기반으로 그리고 나서 '한번 많게" 더함으로써 계산된다. 8×4는 보통 8×2를 두 배함으로써 계산된다. 8×5는 종종 8×10을 반으로 나눔으로써 계산된다. 8×6은 종종 8×5를 기반으로 출발해서 '한번 많게' 전략으로 계산된다. 8×7은 이 배열에서 가장 어려운 것이다. 종종 7×7 또는 8×8이 기반이 되며, 그 후에 '한번 많게' 또는 '한번 적게'가 적용된다. 8×8 은 종종 기반이 된다. 8×1, 8×10 그리고 8×2 이러한 순서 다음에 8×8이 가장 빨리 암기되는 것으로 밝혀진다. 이는 또한 8×8=64는 8×4를 두 배 해서 계산된다. 8×9는 종종 8×10을 기반으로 그리고 나서 '한번 적게'를 사용함으로써 계산된다. 8×10은 즉각적으로 암기되어 알게되는 사실이다. 대부분의 아동은 '0을 첨가하기' 규칙을 매우 신속하게 학습한다(Ter Heege, 1985).

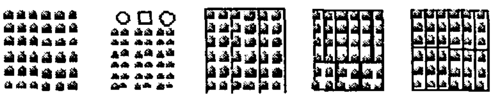
제이고, 학생들에게 의미 있는 것이다. 이것은 한 측면이다. 반면, 타일이 깔린 포장도로로 모델화되는 직사각형 모델은 특별한 의미를 가진 연산을 제공한다. 그러나, 여기서 관심을 가져야 할 부분은 학생들이 직사각형모델을 스스로 개발하는 것이다. 이것이 문맥 문제가 비형식적 지식과 수학적 아이디어 사이의 거리를 메우는 방식이다. 앞에서 언급한 비형식적 지식들은 큰 수들을 포함한 암산을 위한 전략들로 발달한다. 결국 이것은 세로알고리듬으로 유도할 것이고, 이는 계산 과정을 조직화하는 과정이다. 세로 덧셈은 10과 100의 배수들에 의한 단축으로, 곱셈을 위한 알고리듬 과정의 출발이 될 수 있다(그림 7). 아동들은 곱셈 알고리듬을 배우기 위해서 반복적 연산을 출발점으로 선택할 수 있다. 그렇지만 형식적인 알고리듬으로 바로 인도되는 것은 아니다. 아동들은 이미 터득한 유연한 곱셈 개념을 사용할 수 있고, 항상 문맥에 관련된 비형식적 풀이절차로 되돌아 갈 수 있기 때문이다. 현실적 접근은 학습 배열의 시작에서나 끝에서나 표준 절차들을 강요하지는 않는다.

26×74=	74		74		74
	74		74		74
	74		74		74
	74		74		74
	74		74		74
	74		74		74
	74		74		
	74		74		
	74		74		
	<u>74</u>	740	<u>74</u>	740	

<그림 7> 비형식적 곱셈 전략

아동의 비형식적 지식을 바탕으로 하는 '세로 나눗셈'을 위한 현실적 수업에서, 나눗셈 학습과정을 살펴보면 다음과 같다.

아직은 10보다 큰 수로 곱셈을 해 본 적이 없는 36÷3과 같은 문제를 '세 명의 어린이들이 36개의 사탕을 나누어 가지려고 한다. 각각의 어린이들은 몇 개의 사탕을 갖게 될까?'Gravemeijer(1990, p. 14)의 형태로 제시한다. 아동들은 이러한 나눗셈에 대한 상당한 비형식적 지식을 갖고 있다. 이러한 문제에 대해 아동들은 아주 다양한 풀이들을 발명한다. 아동들은 아동의 그림을 그려 놓고 사탕들을 그 밑에 하나씩 나누기, 기하학적인 기초에 의해 세 부분으로 나누기, 똑같은 묶음을 그리고 그것을 셋으로 나누고 나서 그 안의 수들을 세기, 사탕을 세 개씩 묶고 매번 하나의 사탕이 그 묶음중의 하나로 들어가게 하는 방법들을 사용한다(그림 8).



<그림 8> 나눗셈에 대한 비형식적 지식

이러한 풀이 과정에서 등분제와 포함제가 명백히 나타난다. 등분제는 기하학적으로 세 부분으로 나누는 경우에 분명히 나타나고, 포함제는 셋으로 이루어진 묶음을 만들어서 해결한 경우에 해당되는 것이다. 원래의 문제는 등분제를 의도하는 것처럼 보이지만 이것을 포함제로 생각하는 아동도 있다는 것에 주의를 할 필요가 있다. 원래 포함제와 등분제는 곱셈의 역으로 생각한다면 상당히 다른 의미를 갖는다. 두 유형의 나눗셈은 두 개의 다른 역 연산들로 간주될 수 있다. a 곱하기 b가 c 라면, 두 인수들은 서로 다른 역할을 한다. a를 b번 취한다. 여러 응용에서는 이 차이가 a 가 하나의 양이라면 특별히 명백해진다(Freudenthal, 1983, pp. 115-117). 예를 들어 12 사탕×3 = 36사탕, 그 역은 36 사탕 ÷ 12 사탕 = 3 그리고 36 사탕 ÷ 3 = 12 사탕이다. 이것 외에도, 양 × 단위 가격 = 전체 가격, 시간 × 속도 = 거리 와 같이 두 인수들이 양인 많은 응용상황들이 있다. 따라서, 이러한 포함제와 등분제가 충분히 다루어져 할 필요가 있고, 자연스럽게 통합될 필요가 있다.

포함제에 대한 아동의 전략은, '오늘밤 81명의 학부모들이 우리학교를 방문한다. 각 테이블에는 6명의 학부모들이 앉을 수 있다. 테이블이 몇 개 필요한가?'(Treffers, 1991-2, p. 21)와 같은 문제를 제시함으로써 알아볼 수 있다. 학생들이 사용하는 비형식적 전략은 여러 가지가 있을 수 있다. 한 가지 방법은 6+6+6+....과 같이 동수누가를 사용하거나, 그렇지 않으면, 단계별 곱셈, 아마도 덧셈에 기초한, 1×6, 2×6, 3×6, ... 일부는 결과에 해당하는 수열 6, 12, 18, ..., 등을 적어내려 간다. 또한 6×10을 출발점으로, 곱셈 또는 동수누감을 계속한다. 또 다른 방법은 한 학생은 6×6 = 36을 알고, 이것을 두 배 해서 6×12=72 임을 얻고, 6을 하나 더 더하고 마지막으로 6을 하나 더 더한다. 교사는 이때 학생들이 서로 그들의 풀이를 비교하도록 권고한다. 명백히 그들 중의 대부분은 6×10으로의 비약을 편리한 방법으로 생각한다(그림 9). 나중에 이와 비슷한 '한 주전자로는 7컵의 커피를 만들 수 있고, 각 학부모는 한 컵씩을 마신다. 81명의 학부모들을 위해서는 몇 주전자의 커피가 필요할까?'(Treffers, 1991-2, p. 22)라는 문제가 제시되면, 학생들은 보통은 '10배의 방법'을 자율적으로 모방한다. 한 단계 방식에 집착하고 있는 아동도 있을 수 있을 수 있지만, 대부분의 아동들은 '10배의 방법'을 사용하며, 때로는 그들이 답을 어떻게 구했는지 분명하지 않은 경우도 있을 수 있다.

6/ 81\	
<u>60</u>	10개의 책상
21	
<u>18</u>	3개의 책상
3	
<u>3</u>	(1개의 책상)
0	14개의 책상

<그림 9> 10배의 방법

세로 나눗셈은 다음 단계에서 도입된다. 앞에서 사용한 도식은 포함제뿐만 아니라 등분제의 문제에도 적합하다. 예를 들면 81개의 물건을 6명의 사람들에게 동등하게 나누어준다고 하면 '책상'대신에 '사람 당'으로 바꾸면 되고 이 과정에서 어떤 아동은 나누어주어야 할 사람들을 표시하기 위해 얼굴을 그리거나 이름을 쓰거나 손가락을 여섯 개 그려서 직접 나누어 보는 것처럼 수를 적어가면서 생각하는 과정을 수월하게 할 수도 있다.

이런 과정보다 약간 후에 '1128명의 지원자들이 원정 축구시합에 가기를 원한다. 회계는 버스 한 대에는 36명의 승객들이 탈 수 있고, 매 10대마다 할인이 된다는 정보를 들었다'(Gravemeijer, 1994, p. 87)같은 문제로 큰 수들에 대한 나눗셈이 다루어진다. 그러나, 여기서도 형식적인 알고리듬으로 직접 다루지는 않는다. 학생들은 다양한 풀이 방법을 사용한다. 이러한 답들은 아동들의 수준이 다양함을 보여준다(그림 10). 일반적으로 학생들은 마지막 절차에 이를 수 있을 것이다. 단지 한 학생은 다른 학생보다 빨리 생략된 산술 방법에 도달할 것이다. 그러나 한 아동이 수준 2이상으로 진보하지 못하더라도 그 학생은 여전히 세로 나눗셈을 할 수 있다. 그리고 물론 세로 덧셈에서 일렬로 더하는 것 또한 이 과정에서 연습된

다. 그러나 버스문제와 같은 항목은 그 배경에 계속 존재할 것이다. 산술을 하는 도중 시종일관 그 아동은 이와 같은 버스 상황을 스스로 상상할 수 있다. 이러한 절차 행동은 말하자면 구체적인 배경을 획득하며 산술활동의 점검과 조종이 가능하다.

1	2	3
36/1128\	36/1128\	36/1128\
360- 10버스	360- 10버스	1080- 30
768	768	48
360- 10	720- 20	36- 1
408	48	12
360- 10	36- 12	
48	12	
36- 1		
12		

<그림 10> 나눗셈 전략의 다양한 수준

아동들은 또한 여러 가지 문제들을 스스로 생각해내는 기회를 가진다. 단순한 합뿐만 아니라 응용문제들, 소위 자유로운 산물들을 만드는 과정이 필요하다. 세로 나눗셈의 경우에 이러한 자유산물은 아동들이 할 수 있는 수의 크기, 그들이 계산할 수 있는 도식화와 축약의 수준을 보여주거나 체계적인 오류를 드러내기도 하고 어떤 응용문제들을 해결할 수 있는지, 즉 포함제, 등분제, 곱셈의 역에 대한 정보를 제공해준다(Treffers, 1991-2). 이를 통해서 반성과 예상이 이루어질 수 있다.

좀더 높은 수준에서는 세로 나눗셈의 구조가 탐구의 주제가 될 수 있다. '1128÷36을 계산기를 이용해서 구하고 세로 나눗셈의 나머지를 구하라'(Treffers, 1991-2, p. 23)와 같은 종류의 문제를 해결하기 위해서 세로 나눗셈을 위한 도식구조가 분석될 필요가 있다. 계산기를 가지고 세로 나눗셈의 합을 구한 마지막에 나머지를 찾는다. 여기서 나머지와 몫의 십진수 부분의 관계가 형성된다. 또한 '두 나눗셈의 각각이 '31 나머지 12'라는 결과를 제시한다면, 원래의 나눗셈들은 필연적으로 동일한 또는 동치인가?'(Treffers, 1991-2, p. 25)라는 모순 문제를 다루어 봄으로써 더 한층 반성의 기회를 제공할 수 있다. 이러한 문제는 일반적으로 긍정적으로 답하는 경우가 많을 것이다. 그러나 더 생각해보면 이것은 사실이 아니다. 제수 36으로는 '31 나머지 12'라는 결과는 실제적으로는 31 1/3이지만 제수가 24이면 이것은 31 1/2이다. 모순 상황을 통해서 반성은 세로 나눗셈의 구조에 대한 더욱 발전된 생각으로 유도한다. 이러한 상황에서 학생들의 상호작용은 아주 중요한 역할을 한다.

현실적 접근은 포함제와 등분제 사이의 구분 외에도 나머지에 담긴 여러 가지 현상학적 변인들, 즉 의미를 의식하게 한다. 이에 대해 Treffers(Gravemeijer, 1990, p. 18)는 26÷4에 대한 다음 예들을 제시한다.

1. 26명의 사람들을 차로 수송하려고 한다. 차 한 대는 4명의 승객을 태울 수 있다. 몇 대의 차가 필요한가? [7]
2. 26m의 밧줄을 4m길이의 조각들로 자른다. 몇 조각이 생기는가? [6]
3. 26개의 바나나를 4명에게 똑같이 나누어주려고 한다면, 각 사람은 몇 개의 바나나를 갖게 될까? [6.5]
4. 26km의 거리를 걷는데 똑같이 4 단계로 나눠어져 있다. 각각의 길이는 얼마나 될까? [6.5]
5. 한 줄에 4그루씩 26 그루의 나무들이 직사각형 모양으로 배열되어 있다면, 몇 줄이 있는가? [?!!]
6. 면적이 26 제곱미터인 직사각형 모양의 테라스의 폭이 4m이다. 이 테라스의 길이는 얼마인가? [6.5]

나머지에 대한 해석은 주로 26÷4의 결과가 사용되는 상황에 달려 있다. 응용의 다양성은 우리에게 수학 수업에서 여러 가지 기능과 개념의 응용가능성을 어떻게 배려할 것인지 하는 문제에 직면하게 한다. 나머지의 형식적 취급은 응용과는 거리가 멀고, 학생들이 이러한 다양한 해석을 준비하도록 하지 못할 것이다. 학생들은 여러 가지 해석에 친숙해 질뿐 아니라 그 문제 상황에 적절하게 그 나머지의 의미를 해석하는 것을 학습하기 위해서 모든 종류의 상황들에 직면해야 할 것이다.

이와 같이 세로 알고리듬에 이르도록 유도하는 것은 학생들이 자신의 수준에서 할 수 있는 발명의 기회이며, 그들 자신의 경험적 지식을 형성하고 그들 자신의 속도에 맞게 단축할 수 있는 수학화의 기회가 된다. 현실적 수학교육에서는 나눗셈은 분배의 문제로 도입되는 등분제, 곱셈에서의 동수누가와 대응되는 동수누감으로서의 포함제, 직사각형 패턴으로 주어진 곱셈의 역을 구하는 것을 포함하는 여러 문맥 문제들과 함께 다루어지면서 절차들을 단축하는 것을 통한 점전직인 수학화에 의해 학습된다. 이러한 나눗셈 과정은 세 수준으로 구분해서 볼 수 있는데, 첫 번째 수준은 직접 아동들 사이에 사탕을 나누어 먹는 것과 같은 현실 생활의 활동과 같이 압도적으로 문맥에 결합되어 있다. 때때로 이 단계에서는 학생들은 나눗셈을 분간하지 못하기도 한다. 대신 학생들은 좀 더 기본적인 덧셈, 뺄셈 또는 덧셈과 혼합된 곱셈 방식과 같은 상황적 지식과 전략을 불러들이고 그것들을 이 상황에 적용한다. 결국, 나눗셈은 기본 연산, 비형식적 전략 및 문맥에 의존하는 절차들에 의해 파생된다. 두 번째 수준은 축구 응원단 수송과 같은 문제를 지필 과제로 다루면서 시작된다고 볼 수 있다. 이것을 풀기 위해서 학생들은 이 상황의 모델을 만드는데 그것이 바로 버스에 사람들을 태우는 것을 반복된 뺄셈으로 모델화하는 것이다. 이 때 축구 응원단과 같은 전형적인 상황은 상황모델로, 반복된 뺄셈은 수학적 모델이라고 할 수 있다. 그 다음 단계로 단순한 계산 문제들과 더불어 아동들은 등분제와 포함제의 상황들을 더 고려하면서 그 절차들을 단축시키는 활동인 수직적 수학화의 활동이 좀더 활발하게 이루어진다. 이 때 단축할 수 있는 수학적 전략, 즉 가장 크고 가까운 수를 찾기 위해 백 배나 열 배 아니면 어떤 수를 사용하는 것이 최선인가에 대한 논의가 이루어진다. 이러한 과정에는 다양한 추상화 수준이 있는데, 그것이 앞의 그림 12에서 제시했던 것이다. 이 단계에서도 여전히 수평적 수학화의 활동, 즉 아동의 현실세계에서 수학적 세계로의 전환은 계속된다. 세 번째 단계에서는 세로 나눗셈 도식이 탐구의 대상이 된다. 다양한 위치에 빈자리나 점이 있는 도식들이 유용하다. 이 때 나눗셈은 그 자신의 구조를 가진 독립적인 연산이 된다. 그러나 다른 연산과의 연결은 계속 유지된다. 덧셈과 뺄셈, 암산, 세로와 가로 절차 및 나눗셈에서의 응용문제들이 구조화된 전체를 이룬다. 또한 10, 5, 2, 4, 9, 3, 6 및 11과 7로 나눌 수 있는 기준들에 대한 연구가 도움이 될 것이고 이것이 확고해지면 나머지 자체가 탐구의 대상이 된다. 이 외에도 나눗셈은 분수, 비, 퍼센트, 평균 등 많은 다른 주제들과 연결될 수 있다. 이러한 주제들과의 연결을 통해서 더욱 다양한 수평적 수학화의 동기와 연결성을 생각할 수 있다.

나눗셈의 학습과정은 학생들 스스로 기본적인 문맥 문제로부터 출발해서 알고리듬을 구성하고, 그들 스스로 나눗셈에 관한 기호도식을 개발하고 그리고 그 과정에서 그들 자신의 문제들을 만든다. 이러한 과정에서 나눗셈이

여러 연산들이나 다른 활동들과 혼합되어 구조화된 전체를 이루며, 도식화와 단축을 위해 아동들간의 상호작용이 필수적이다. 현실적 수학교육에서의 알고리듬 학습은 안내된 재발명 원리를 근간으로 아동의 비형식적 지식과 전략을 점진적으로 수학화를 통해 구조화 해감으로써 수준의 상승과 관계적 틀의 형성 및 현실 상황에 이러한 알고리듬을 응용하는 것을 목적으로 한다.

5. 현실적 수학교육과 구성주의적 수학교육의 비교

앞 절에서 현실적 수학교육의 이론과 그 예에 대해서 살펴보았다. 이 이론은 수학은 인간의 활동이라는 아이디어에 기초한 것이다. 이러한 생각은 미국수학교사협의회가 제시한 1990년대 수학교육의 방향의 기초를 이루고 있는 구성주의와 많은 유사점을 갖는다. 그러나, 자세히 살펴보면 유사한 만큼 다른 점도 존재한다. 따라서, 이 절에서는 유사해 보이는 두 가지의 수학교육 사조에 대해 살펴봄으로써 현실적 수학교육에 대한 이해를 돕고자 한다.

철학적으로 구성주의는 객관적 실체와 같은 것을 안다는 것은 불가능하다는 아이디어를 기초로 한다. 급진적 구성주의는 우리는 객관적인 실체가 있는지조차 알 수 없다고 주장하며, 객관적 실체의 존재를 가정하는 것을 형이상학적 실재론이라고 부른다. 이러한 인식론의 가장 핵심이 되는 것 중의 하나는 지식이란 본질적으로 존재할 것 같은 객관적인 세계와 얼마나 정확하게 들어맞는가가 아니라 그것이 우리 자신의 경험의 세계 속에서 우리가 추구하는 목표에 얼마나 부합되느냐 하는 적합성에 기초를 두고 있는 것이다(Konold and Johnson, 1991). 이 때 지식의 구성이라는 것은 개인 특유의 것이며, 사회적 상호작용을 통해서만, 협의와 협상을 통해서, 사람들은 다양한 구성들을 가능한 한 조화시킬 수 있다.

이러한 관점에 의하면 지식은 능동적이고 개별적이고 개인적이며 이전에 구성된 지식을 기반으로 한다는 것과 인간은 도달할 수 없는 객관적 실체의 구조적 성질들을 추구하는 것이 아니라 경험하는 유기체로서 지각 또는 사고하는 문제들을 해결하기 위해 인지구조를 형성하는 주체가 된다는 것을 의미한다. 즉, 모든 지식은 경험 세계와의 대화를 통한 인지과정을 기반으로 개인에 의해 완성된다. 우리가 특정한 사안에 대해 의견일치를 보이고 서로 동의할 수 있는 것은 우리가 경험하는 것들이 객관적인 실체를 본질적으로 가진다는 것을 증명하는 것은 아니며, 단지 그런 자신들의 주관적인 경험 세계의 특정 영역에서의 합의를 도출할 수 있음을 의미한다. 그러므로, 수학적 지식의 타당성은 우주의 본질에서 나오는 것이 아니라 수학자들의 합의에 의해서 인정되는 것이다.

이런 수학인식론을 바탕으로 하는 수학교육에서는 학생들로 하여금 수학적 지식을 상호주관적이며 상대적으로 이해하도록 하며, 대화와 토의를 통해서 보다 합리적인 지식을 구성하도록 하는 데 목적을 둔다. 이러한 관점에서 수학 학습은 진정한 이해를 목표로 하며, 인지적 갈등과 호기심을 학습동기의 중요한 요인으로 보고 동료간의 상호작용, 인지적 갈등, 반성, 인지적 재구성의 순환과정을 중시하는 갈등 교수를 제안한다(Underhill, 1991).

반면 사회적 구성주의는 공유된 접근을 가능케 하는 외양들을 뒷받침하는 세계가 존재하지만 그것에 대한 어떤 확고한 지식도 가질 수 없다는 관점을 택한다. 인간이 구성한 실체는 그것이 결코 '진리의 상'을 제시할 수는 없더

라도 존재론적 실체에 맞추기 위해 항상 수정되고 상호 작용한다는 것이다(Ernest, 1994-2, p. 44). 따라서 사회적 구성주의는 수학을 사회적인 구성으로 고려하며, 수학의 객관성의 근거를 사회적인 언어 관습에 있다고 주장한다. 이러한 관점에서 사회적 구성주의는 수학적 지식의 정당화보다는 발생에 초점을 두고 있으며 그 발생과정을 언어 관습을 기초로 하는 주관적 지식과 객관적 지식의 경신·순환과정으로 묘사하고 있다. 이러한 순환 속에서 개인의 창조에 의한 새로운 수학적 지식이 객관적 지식이 되는 것은 주관적 지식으로부터 공표를 거쳐서 Lakatos의 발견술에 의해 조사와 비판의 과정을 거쳐 인정된 후이다. 이때 객관성의 기준은 공유된 수학적 지식, 궁극적으로는 공유된 언어에 대한 지식, 즉 언어 관습에 의존한다. 한편 각 개인은 수학을 학습함으로써 객관적 지식을 내면화하고 재구성하는 과정을 통해서 개인의 주관적 지식으로 삼는다. 그리고 다시 이 지식을 사용하여 개인은 새로운 수학적 지식을 창조하고 공표한다. 이로써 주관적 지식과 객관적 지식 사이의 순환이 완성된다. 이와 같이 주관적 지식은 현존하는 지식의 재창조와 유지뿐 아니라 새로운 수학적 지식의 기원에 대한 설명에 필요하다. 반면 객관적 지식은 이러한 주관적 지식을 바탕으로 사회적으로 인정된 하나의 형식화된 결과물이라고 볼 수 있다. 이 때 객관성이라고 하는 것은 불변성, 영구성, 필연성 등 절대적인 진리를 의미하는 것은 아니라, 사회적 관습에 의한 신념에서 나온 것으로 사회적으로 인정된 것을 의미하며, 개인에게 속하거나 개인의 주관적인 상태나 개인적인 선호에 좌우되는 것이 아니라 객관적 지식의 자율성, 즉 외부의 대상과 같은 성격, 인식 주체의 주관적 지식으로부터의 독립성을 획득한 상태를 말한다(Ernest, 1991, pp. 43-47).

이러한 사회적 구성주의에 적절한 수학 교수 원리로 Ernest(1994-1)는 학습자의 의미와 사전 지식을 존중하기, 아동의 방법들을 기초로 지식의 중재를 통해 교육하기, 수학과 응용의 분리 불가능성 및 동기와 적절성의 중요성 등을 제시하고 있다. 이는 수학의 지식과 수학의 이해는 의미 형성에 의존하므로 학생들의 학교 밖의 지식의 가치 또한 고려해서 그들의 아이디어, 해석, 방법 그리고 학교 외적인 문맥과 의미 있는 세계들을 기술하게 함으로써 여러 어휘와 용어에 관련된 의미들을 확장시키는데 관심이 집중되어야 함을 의미한다. 또한 학생들이 문제를 해결하기 위한 자신의 전략과 기호법 등을 개발하는 교수학적 상황을 제공해야 하며, 수학의 일반적인 정의와 기본적인 준거를 명백히 인식할 수 있도록 해야 하며, 수학의 지적인 도구들을 사용할 수 있도록 해야 한다는 것이다. 따라서 여러 개념, 방법 그리고 여러 도구들을 그것들의 역사적 기원과 문화적인 기원 그리고 그것들에 도움이 되는 문제들, 현재의 사용과 응용, 학습자의 생활과 관심에 직접적인 의미가 있는 사용 문맥들에 비추어 다루어야 한다는 것을 의미한다.

인식론적 관점에서 보면 Freudenthal의 직관주의에 기초한 수학인식론을 바탕으로 하는 현실적 수학교육과 구성주의를 기초로 하는 수학교육은 수학 인식론에 대한 출발점은 서로 다르다고 볼 수 있다. Freudenthal(1988)은 이러한 구성주의와 현실적 수학교육을 옹호하는 사람들에게서도 이러한 '구성' 또는 '재구성'(Streefland, 1988) 이라는 어휘를 사용하는 것에 대하여 자신의 입장은 여전히 안내된 재발명임을 명백히 한다. Freudenthal은 수학의 플라톤적인 이상적 실체를 부인하지만, 수학에 대한 객관적인 타당성 자체를 부인하지는 않으며 인간 본유의 정신적 능력과 활동을 중시한

다. 이러한 정신적 활동에 의해 우리의 세계에 대한 상이 미시의 세계에 대해서나 거시적 세계에 대해서나 점점 더 확대되어 왔고 앞으로도 확대되어 가리라는 것이다. 따라서 그에게는 후기 현대 철학에서 주장하는 수학에 대한 구성주의적 입장은 받아들일 수 없는 것이다. 따라서 그가 '구성'이라는 단어를 인정한다면 그것은 인간활동으로서의 수학이라는 점에 초점을 맞출 때뿐이다. 또한 그는 과학철학자들의 과학적 신념의 결여에 대한 급진적 구성주의자에 대해 '이것은 과학자들의 철학과 과학철학자들의 철학 사이의 비참한 간격이며, … 객관적 지식에 대한 신념이 부족한 과학자가 해왕성과 같은 먼 행성에 대해 알고자 그 먼 거리까지 우주선을 발사하겠는가'(Freudenthal, 1991, p. 146)라고 반박한다. 그러나, Freudenthal의 뒤를 잇는 현실적 수학교육의 옹호자들의 구성주의에 대한 관점은 다르다. 이에 대해 Van den Brink(1991-2, p. 195)는 '급진적 구성주의 인식론과 1970년대에 네덜란드에서 'Wiskobas'라는 프로젝트의 일부분으로 발달되었던 수학교육 사이에 놀랄만한 유사성을 발견하게 된다'고 말하며, Van den Heuvel-Panhuizen(1998)은 '학생들은 기성수학의 수용자가 아니라 교수 학습과정의 능동적인 참여자로 간주되며, 그들은 수학적 도구와 통찰을 발전시킬 수 있다. 이러한 면에서 현실적 수학교육은 사회구성주의에 기초한 수학교육과 많은 공통점을 갖는다'고 말한다. 결국은 구성주의적 관점에 기초한 수학교육과 현실적 수학교육은 유사점을 가지며 동시에 서로 발전시킬 수 있는 상호 보완적 요소임을 강조하는 것이다.

급진적 구성주의든 사회적 구성주의든 일반적으로 구성주의를 주장하는 사람들의 공통된 의견은 교육에서 학생들에게 그들 자신의 지식을 스스로 형성할 기회를 제공해야 한다는 것이다. 구성주의자들에 의하면 각 개인은 그에게 접근 가능한 현실에 대한 이론을 형성하려고 할 것이고 아동들도 그렇게 할 것이라는 것이다. 구성주의자들은 소위 오개념 또는 대안적 개념화에서 이에 대한 증거를 구한다 (Cobb, 1987). 이러한 관점을 받아들인다면, 학생들은 기성수학의 수용자가 아니라 교수 학습 과정의 능동적인 참여자이며, 그들의 경험을 그들 나름대로의 논리적 방식으로 해석하고, 수학학습에 있어서도 자신의 수학적 도구와 통찰을 발전시킬 수 있다는 것을 의미한다. 이러한 관점에서 최근에 아동들의 비형식적 전략에 대한 많은 연구들이 이루어지고 있다. 이 논문의 내용과 관련된 알고리듬에 관한 연구의 대표적인 예로 Kamii와 Dominick(1998), Carroll과 Porter(1998) 등을 들 수 있다. 후자는 학교에서 제시하고 있는 표준화된 알고리듬은 연산 방법을 하나 알게 된다는 장점은 있지만 때로는 그것이 아동들에게 적당하지 않고 이해하기 어렵다는 것을 주장한다. 이에 대한 대안으로 덧셈에서는 왼쪽에서 오른쪽으로 자리값에 따라 더해 가는 부분합의 방법, 뺄셈에서는 뺄셈을 더해 가는 방법으로 해결하는 방법과 부분합과 유사한 부분차의 방법, 곱셈에서는 부분곱과 10 세기의 인도로 거슬러 올라가는 격자 곱셈, 나눗셈에서는 단계적으로 분배해 가는 방법을 소개하고 있다. 이러한 대안을 도입하면서, 전통적인 알고리듬은 문제 해결을 위한 여러 가지 가능한 방법들 중의 단지 하나일 뿐임을 강조한다. 반면, 전자는 알고리듬을 가르치는 것이 수학을 배우는 데 있어서 도움이 안될 뿐 아니라 아동들의 계산에 관한 추론의 발달을 방해한다는 주장을 하고 있다. 이러한 주장의 근거로 피아제의 논리 수학적 지식은 정신적 관계로 구성되어 있고, 이러한 관계의 근본적인 원천은 각 사람의 정신적인 행동이라는 것

과 실험연구 결과를 제시하고 있다. 즉, 알고리듬을 교사로부터 듣는 것은 이러한 정신적 관계를 형성하는 데 도움이 되지 못하며, 생활 속에서 암산을 잘 하는 아동이 지필 알고리듬에서는 오류를 범하는 예를 들어 보이고 있다. 오히려 이러한 알고리듬은 아동들에게 해로운데, 그 이유는 첫째, 아동들이 보통 암산을 해갈 때 사용하는 왼쪽에서 오른쪽으로 계산해 나가는 그들의 생각을 포기하도록 조장하고, 둘째, 오히려 표준 알고리듬은 자리에 맞추어 수와 수들을 더하기 때문에 오히려 자리값에 대한 수 감각이 발전되지 못한다는 것이다. 따라서, 오히려 알고리듬을 가르치지 않고 아동들을 자신의 비형식적 방법에 따라 진행해 가도록 내버려두는 그러한 수업을 주장하고 있는 것이다. 이와 같이 구성주의에서는 아동의 비형식적 지식과 전략을 포함하여 아동 자신의 현실에 대한 이론 형성 또는 의미 구성을 중요시하고 있는 것이다.

이 점에서, 즉 모든 사람이 자기 자신의 현실에 대한 이론을 가지고 있다는 관점에서 현실적 접근 방식과 구성주의적 접근 방식은 일치하는 것으로 간주할 수 있다. 현실적 수학교육에서는 수학은 현실에 대한 이론이요, 어른의 현실과 아동의 현실, 더 나아가서는 모든 사람들의 현실은 다르다는 것으로 나타난다. 교육에서, 우리는 이러한 점을 인식하고 반영해야 한다는 것이다. 따라서, 안내된 재발명, 교수학적 현상학, 수준이론을 기초로 하는 현실적 수학교육에서 가장 중점을 두는 부분은 아동의 '현실'이며, 아동의 '현실'을 출발점으로 수학 교육과정이 설계되어야 한다는 것이다. 이러한 의미에서 '현실적'이라는 접두어는 상당한 의미를 함축하고 있다고 볼 수 있다. 수업이론의 원리 중 자신의 구성과 산물에서 학습의 촉진을 위한 수단으로 반성과 갈등 상황에 대해 언급하는 것도 역시 일치하는 점이다. 아동의 현실을 수학적으로 고려하고자 하는 것이 교수학적 현상학의 가장 중요한 부분 중의 하나일 것이다.

구성주의적 접근과 현실주의적 교수 방법에서 또 다른 공통점은 학생들은 또한 그들의 경험을 다른 학생들과 공유해야 한다는 것이다 (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998). 사회적 구성주의자들은 모든 지식은 스스로 구성되며, 따라서 수학교육은 특유한 구성을 인정해야 하고 수학적 의미, 해석 및 절차가 명백히 협의되는 교실 분위기를 조장해야 한다고 주장한다. Cobb, Yackel 및 Wood(1992)에 의하면, 교사는 동시에 더 넓은 공동사회의 실제와 해석에 문화 변용하는 과정을 자극해야 한다. 이러한 사회구성주의적 교수 접근 방식에서, 학생들의 스스로 발명된 문제 해결책들은 논의를 위한 토픽들로 돌려지며 교실 공동사회의 문화 변용 과정을 위한 출발점으로 작용한다. 또한 현실적 수학교육에서도 사회적 상호작용은 필수적이다. 원래 Freudenthal의 재발명 과정은 개별화에 초점이 맞추어져 있는 개인의 학습과정이라고 볼 수 있다. 그러나, 수업원리로서 제시되고 있는 상호작용 수업은 학생들에게 보다 나은 이해와 반성을 위해서 상호작용이 필수적임을 강조하고 있다.

그러나, 현실적 수학교육에서는 구성주의와는 다른 점이 있다. 한편으로는 아동의 비형식적 지식과 전략을 신중하게 고려하고, 학생들의 아이디어를 존중하면서, 다른 한편으로는 안내된 재발명의 원리에 따라 아동들의 오개념을 방지하도록 노력하며, 아동의 비형식적 지식이 추상적이고 형식적인 수학의 궤도에 올라갈 수 있도록 많은 문맥과 모델을 신중하게 고려하는 것이다. 이러한 접근법에서는 학생들은 수학사로부터 영감을 얻는 학습경로를 따른다.

또한 현실적 수학교육에서의 최근의 발전은 앞의 알고리듬 학습의 예에서 보았듯이 이전보다 아동을 학습의 중심에 올려놓으며, 아동의 비형식적 지식과 전략을 매우 신중하게 받아들인다. 이러한 관점을 통해서 사실상 어른의 현실과 아동의 현실을 통합해 가려는 것이라 볼 수 있다. 학생들의 아이디어를 '그대로 따르는 것'과 '안내하는 것' 사이의 미묘한 균형이 현실적 수학교육의 중요한 특징이며, Freudenthal이 안내된 재발명 원리를 제안한 근본적인 이유일 것이다. 이러한 의미에서, 현실적 수학교육은 구성주의와는 다르다.

이러한 관점에서 Gravemeiejr(1994, p. 73)는 '구성주의는 여전히 주로 미시적인 교수학적 상황과 아동의 실제적 이론을 분석하는 데 목표를 두고 있는 연구 접근 방식이다. 현실적 수학 수업은 장기적인 학습과정에 목표를 두고 그 안에서 학생들 자신의 공헌을 타당화하려고 한다' 또는 '사회적 구성주의는 그 자체로는 구성주의적 인식론과 양립 가능한 수업활동을 개발하기 위한 발견술을 제공하지는 못한다'(op. cit., p. 81)고 주장한다. 또한 De Lange(1991, p. 53)는 '사회적 구성주의는 학습이론이고 현실적 수학교육은 학습과 수업에 관한 이론이며, 특히 수학학습에만 관련된 이론이다'라고 주장한다. 한편, Streefland(1990, p. 8)는 '교수 학습 과정에 대해 어린이들 자신이 공헌할 많은 기회들이 제공되고, 다른 한편으로는 우리 접근 방식의 전반적인 목표는 학생들이 내용 체계의 수준에 도달하도록 하는 것이다. 우리의 배경 이론적 틀은 구성주의와 인지주의의 종합이다'라고 말한다.

따라서, 현실적 수학교육이 제시하고 있는 기본적인 핵심원리와 다섯 가지의 수업원리는 구성주의적 수학교육의 기본 이념과 많은 유사점을 가지고 있다고 볼 수 있다. 구성주의적 관점은 본질적으로 어린 아동들이 개발한 이론들에 대한 인정, 즉 아동들의 이론은 어른들 특히 교사의 이론과 동등하게 취급되어야 하며, 이는 학생들이 그들이 발달해 가는 방향을 선택할 자유가 있다는 것을 의미하기도 한다. 그러나 현실적 수학교육자들은 좀더 신중하게 안내된 재발명 원리에 의해서 적절한 문맥과 도구들을 제시하고 창조하게 함으로써 학생들의 이론 형성을 조종하고자 노력한다. 따라서, 학생들의 아이디어를 고려하여 신중하게 계획된 장기적인 학습과정을 중시한다고 볼 수 있다. 또한 이러한 장기적인 학습과정은 고정된 상태로 남아 있는 것이 아니라 여전히 구성중인 활동으로서 실제와의 긴밀한 협동 하에 계속적인 피드백과 학생과 연구자의 상호 관찰[3]에 의한 보완이 계속 이루어진다는 것이다.

6. 결 론

본 논문에서는 인간활동으로서의 수학을 강조하는 수학교육의 한 사조인 현실적 수학교육에 관해 고찰해 보았다. 우선 이러한 수학교육의 핵심원리는 안내된 재발명과 점진적인 수학화, 교수학적 현상학, 수준이론이다. 안내된 재발명과 점진적인 수학화는 아동은 학생들은 수학이 발명된 과정에 유사한 하나의 과정을 경험할 기회를 가져야 한다는 것을 의미하며, 이러한 과정에서 수학자들의 조직화를 포함한 광범위한 활동을 경험해 보아야 한다는 것이

3) 상호 관찰이란 임상적 인터뷰의 발전된 형태로 비참여 관찰, 참여 관찰을 넘어서서 연구자가 기록한 내용을 아동들에게 이야기하거나 아동들 스스로가 읽도록 함으로써 연구자가 판단한 내용이 실제 아동의 사고과정과 일치하는지를 점검하는 형태의 관찰법이라 할 수 있다. 아동들의 경우에는 연구자가 기록하는 것이 자신들에 관한 것임에 대해 오히려 많은 자부심과 관심을 가진다고 할 수 있다(Van den Brink, 1981).

다. 수준이론은 한 수준에서의 조작 활동이 다음 수준에서 분석의 대상이 되는 수준 상승의 과정을 통해서 수학 학습이 이루어지므로 이에 적절한 교수학적 조치를 해야함을 의미한다. 교수학적 현상학은 수학적, 역사적인 분석을 참조하고 아동의 현실에서의 적절한 문맥들을 고려해야함을 의미한다. 이러한 문맥 속에서 아동들은 체험할 수 있고, 감정이입이 될 수 있으며, 자신의 여러 가지 경험을 혼합해서 생각하고 상상력을 불러일으키면서 활동하는 가운데 심상이 형성되고, 수준의 상승이 이루어지고, 자신의 현실을 더욱 확장해 나가도록 할 수 있어야 함을 강조하는 것이다.

이러한 기본 가정 하에 제시된 구체적인 수업원리로는 문맥에 의한 현상학적 탐구, 수직적 도구에 의한 연결, 학생들 자신의 구성과 산물, 상호작용수업, 학습가닥의 연결 등이 있다. 문맥에 의한 현상학적 탐구를 통해 학생들의 직관적인 관념을 불러일으키고, 적절한 모델들을 이용하여 이러한 직관적 관념을 보다 추상적인 수학의 수준으로 상승시키며, 학생들 스스로가 이러한 과정에서 문제, 모델을 개발하거나 자신의 산물을 만듦으로써 반성적 사고를 가능하게 하고 자신의 수학 수업에 더 많은 공헌을 하도록 하며, 자신들의 생각을 다른 아동들과 나누고 토론하는 가운데 더욱 발전시키며, 전반적인 수업 과정을 통해서 자신의 현실과 수학을 연결시키고 수학 내에서의 종적 횡적 통합이 이루어짐으로써 아동의 생의 일부분이 될 수 있도록 하는 것을 의미한다. 그 다음으로 알고리듬 학습과정의 예를 통해서 이러한 원리들이 어떻게 실제에서 구현될 수 있는지를 살펴보았다. 이러한 알고리듬 학습에서 준거가 되는 것은 역사적 학습경로와 아동의 비형식적 사고와 전략이다. 아동들은 적절한 문맥 속에서 비형식적 전략을 사용하여 문제를 해결해나가는 과정을 통해 단축화 과정을 거치면서 형식적 수준의 알고리듬에 이르게 된다. 이 과정에서 예를 들면, 세로나눗셈을 반복된 뺄셈으로 해결해가면서 가장 빨리 가깝게 도달하는 방법을 찾는 과정에서 세로 나눗셈 알고리듬에 도달하게 되는 것이다. 이러한 과정에서 문맥의 세계에서 수학의 세계로 오가는 수평적 수학화와 수직적 수학화의 과정이 계속 교대된다.

이러한 현실적 수학교육은 구성주의와 비교해 볼 때 인간활동으로서의 수학, 능동적인 학습자, 상호작용, 반성적 사고, 갈등 상황 등을 중시한다는 점에서 많은 유사점을 갖는다. 무엇보다도 모든 사람은 자신의 현실에 대한 이론을 구성해 간다고 하는 점에서 이 두 유형의 수학교육은 많은 공통점을 갖는다고 할 수 있을 것이다. 그러나 구성주의와 다른 점이 있다면 아동 자신의 수학에 대한 이론이라고 볼 수 있는 비형식적 지식과 전략들을 존중하는 동시에 이러한 것을 출발점으로 적절한 교수학적 수단에 의해 보다 형식적인 수학으로 안내하고자하는 점이다. 따라서, 아동의 자율권과 교사의 권위 사이에 미묘한 균형을 맞추고자 하는 것이며 미리 구조화되지만 유연한 장기적인 학습과정을 중요시한다는 것이다.

이러한 점에서 우리는 현실적 수학교육에서 구성주의 학습을 논할 때 아동들에게 어느 정도의 자율권을 부여해야 하는가하는 문제의 실마리를 발견할 수 있다고 생각한다. 우리가 앞의 예에서 보았듯이 일부 구성주의자들은 알고리듬학습에서 오히려 표준 알고리듬을 지도하는 것이 아동들의 학습에 도움이 되는 것이 아니라 해가 된다는 것을 입증하고, 아동들의 비형식적 전략을 그대로 유지하는 것이 더 좋을 것이라는 주장하기도 한다. 그러나, 현실적 수학교육에서는 충분히 아동들에 의해 의미 있

게 수학화 과정을 경험함으로써 표준알고리듬에 도달하도록 하며, 그런 후에는 자동화 과정을 거쳐서 숙달에 이를 수 있도록 하는 데 중점을 두고 있는 것이다.

따라서, 우리가 교육과정을 구성할 때나 수업을 계획할 때 항상 고려해야 할 것은 과연 학생들에게 현실적으로 받아들여질 수 있는, 즉 아동의 상상력을 불러일으키고, 자신의 경험을 활용하는 과정을 통해 현실화 할 수 있는 그러한 상황을 어떻게 마련하는가 하는 것일 것이다. 이러한 것을 위해서 우리가 수학사에서도 많은 암시를 받을 수 있을 것이지만, 보다 더 세련된 방법은 직접 아동들에게서 찾아내는 방법일 것이다. 그러나, 우리는 아동의 현실과 어른의 현실은 다르다는 것을 항상 염두에 두어야 할 것이다. 아동들의 사고를 관찰하고 그것을 바탕으로 앞으로의 계획을 사고실험을 통해 계획하고, 그것을 실제 적용해보고 아동들과 교사들의 의견을 수렴해서 좀더 적절한 계획을 세우고 계속적인 수정을 해 나갈 때 우리는 좀더 아동의 현실에 접근한 수학 수업을 해 나갈 수 있으며, 이를 통해 아동의 현실을 확장해 나갈 수 있으리라고 생각한다. 실제로 이러한 방식으로 아동과 수학을 연결시키기 위해서는 많은 기간이 필요할 것이다. 우리는 이를 위해서 연구자로서의 교사도 더 많이 필요할 뿐 아니라 관찰자로서의 연구자도 더 많이 필요하다고 생각된다.

참고 문헌

Carroll, W. M., and Porter, D.(1998). Alternative algorithms for whole-number operations. In L. J. Morrow and M. J. Kenny, (Eds.) *The Teaching and learning of algorithms in school mathematics*(pp.106-114). NCTM.

Cobb, P.(1987). Information-processing psychology and mathematics education: A constructivist perspective. *The Journal of Mathematics Behavior,* 6(1), 4-40.

Cobb, P., Yackel, E., and Wood, T.(1992). A constructivist alternative to representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 23(1), 2-33.

De Lange, J.(1991). Higher order (Un)-teaching, *Proceedings of the Third UCSMP International Conference on Mathematics Education : Developments in School Mathematics Education Around the World,* 3, 49-71.

Ernest, P.(1991). *The Philosophy of mathematics education.* The Falmer Press.

________(1994-1). The philosophy of mathematics and didactics of mathematics. In Bieler, R.(ed.). *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp.335-350). Kluwer Academic Publishers.

________(1994-2). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemology and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.

Freudenthal, H.(1971). Geometry and the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics,* 3, 413-435.

________(1973). *Mathematics as an educatrional task.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

________(1983). *Didactical phenomenology of mathematics structures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

________(1988). Konstruktivismus-konstruktion, rekonstruktion, nacherfindung, entdeckung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 88(5), 199-201.

________(1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K.(1990) Context problems and realistic mathematics instruction. In K. Gravemeijer(eds.), *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education* (pp.10-32). Culemborg: Techinipress.

________(1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: Cd-ß press, Freudenthal Institute.

Kamii, C., and Dominick, A.(1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow, and M. J. Kenny(Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp.130-140). NCTM.

Konold, C., and Johnson, D, K.(1991). Philosophical and psychological aspects of constructivism. In L. P. Steffe(ed.). *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp.1-13). New York: Springer-Verlag, Inc.

Skemp, R. R.(1987). *The psychology of learning mathematics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Streefland, L.(1988). Reconstructive learning. *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1(12), 75-91.

________(1990). Realistic mathematics education: What does it mean? In K. Gravemeijer (eds.), *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education*(pp.1-9). Culemborg: Techinipress.

Ter Heege, H.(1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational studies in mathematics,* 16(4), 375-388.

Treffers, A.(1987). *Three dimension, a model of goal and theory description in mathematics instruction: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

________(1991-1). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland(ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp.11-20). Utrecht: Cd-ß press, Freudenthal Institute.

________(1991-2). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland(ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp.21-56). Utrecht: Cd-ß press, Freudenthal Institute.

Underhill, R. G.(1991). Two layers of constructivist curricular interaction. In E. von Glaserveld(ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp.229-248). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van den Brink, F. J.(1981). Mutual observation. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 29-30.

________(1984). Numbers in contextual frameworks. *Educational Studies in Mathematics,* 15(3), 239-257.

________(1987). Children as arithmetic book authors. *For the Learning of Mathematics.* 7(2), 44-47.

________(1991-1). Realistic arithmetic education for young children. In L. Streefland(ed.). *Realistic mathematics education in primary school* (pp.77-92).

Utrecht: Cd-ß press. Freudenthal Institute.

_______(1991-2). Didactical constructivism. In E. von Glaserfeld(ed.), Radical constructivism in mathematics education (pp.195-227). Dordrecht: Kluwer Academi Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.(1998). Realistic mathematics education. NORMA-lecture.

Van Hiele, P. M.(1986). *Structure and insight.* London: Academic Press. Inc.

A Study of Realistic Mathematics Education
- Focusing on the learning of algorithms in primary school -

Chong, Yeong-Ok

This study aims to reflect the basic principles and teaching-learning principles of Realistic Mathematics Education in order to suppose an way in which mathematics as an activity is carried out in primary school. The development of what is known as RME started almost thirty years ago. It is founded by Freudenthal and his colleagues at the former IOWO. Freudenthal stressed the idea of matheamatics as a human activity. According to him, the key principles of RME are as follows: guided reinvention and progressive mathematisation, level theory, and didactical phenomenology. This means that children have guided opportunities to reinvent mathematics by doing it and so the focal point

should not be on mathematics as a closed system but on the process of mathematisation. There are different levels in learning process. One should let children make the transition from one level to the next level in the progress of mathematisation in realistic contexts. Here, contexts means that domain of reality, which in some particular learning process is disclosed to the learner in order to be mathematised. And the word of 'realistic' is related not just with the real world, but is related to the emphasis that RME puts on offering the students problem situations which they can imagine. Under the background of these principles, RME supposes the following five instruction principles: phenomenological exploration, bridging by vertical instruments, pupils' own constructions and productions, interactivity, and interwining of learning strands. In order to reflect how to realize these principles in practice, the learning process of algorithms is illustrated. In this process, children follow a learning route that takes its inspiraton from the history of mathematics or from their own informal knowledge and strategies. Considering long division, the first level is associated with real-life activities such as sharing sweets among children. Here, children use their own strategies to solve context problems. The second level is entered when the same sweet problems is presented and a model of the situaion is created. Then it is focused on finding shortcomings. Finally, the schema of division becomes a subject of

investigation. Comparing realistic mathematics education with constructivistic mathematics education, there interaction, reflective thinking, conflict situation are many similarities but there are alsodifferences. They share the characteristics such as mathematics as a human activity, active learner, etc. But in RME, it is focused on the delicate balance between the spontaneity of children and the authority of teachers, and the development of long-term learning process which is structured but flexible. In this respect two forms of mathematics education are different.

Here, we learn how to develop mathematics curriculum that respects the theory of children on reality and at the same time the theory of mathematics experts. In order to connect the informal mathematics of children and formal mathematics, we need more teachers as researchers and more researchers as observers who try to find the mathematical informal notions of children and anticipate routes of children's learning through thought-experiment continuously.