大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 9 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.1, 133-150. July 1999

함수 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애

이 종 희*

1. 서 론

함수 개념은 수학에서 중요한 개념이다. 함수 개념은 변화하는 현상에 대한 정리의 수단으로, 그 변화를 해석하고, 기술하고, 예측하는데 중요한 도구가 된다. 함수 개념은 수학의 많은 부분에서 발견되며, 수학에서 핵심적인 개념임에도 불구하고 많은 학생들은 함수 개념을 어려워하고 잘못된 함수 개념 이미지를 가지고 있을 뿐 아니라 함수의 여러 가지 표현을 이해하지 못하고 있는 실정이다.

역사 발생적 원리의 인식론적 바탕은 개체발생이 계통 발생을 단축된 형태로 반복한다는 생물학적인 원리인 Hackel이 제기한 재현의 원리이다. 개인의 수학적 사고의 발달은 수학의 역사 자체를 따른다는 것으로 개인의 지식 교육은 인류의 지식 발생과 같은 과정을 거쳐야 한다는 것이다(우정호, 1998, p.54). 이렇게 볼 때, 역사 발생적 원리는 수학적 개념의 역사에서 볼 수 있는 역사적 과정을 시간적으로 단축하여 학생들의 교수 학습에 재현하게 하는 원리라고 할 수 있는데, 여기서 문제가 되는 것은 역사적 과정을 어떻게 동형적으로 단축할 수 있느냐는 것이다.

이러한 동형적 단축은 Freudenthal, Piaget등에 의해 확인되었다. 특히, 학생들이 수학적 개념을 이해하는데, 어려움을 느끼고 많은 장애를 보이고 있는 것도 역사에서 확인할 수 있다. 인식론적 장애도 재현의 법칙에 의해서 반복되는데, 인식론적 장애는 지식의 생득적 어려움으로 볼 수 있으며, 그것은 개체 발생에서 불가피하게 재현된다(Brousseau, 1997, p.86).

과학적 이해에서 형이상학 없이는 아무것도 할 수 없으며 이것은 인식론적 장애가 불가피함을 말한다. 과학적 지식의 본질에 대한 믿음, 세상에 대한 관점, 우리가 가지고 있는 이미지, 사용하고 있는 언어 속에 각인된 이미지, 사고의 스킴, 이 모든 것은 한편으로는 과학적 문제를 다루기 위한 출발점이 되며, 다른 한편으로는 문제 해결이나 접근에 편견을 갖게도 한다. 이것은 이해하는데 필요하기도 하고 장애가 되기도 한다. 이것은 개인에게서도 확인될 수 있는데, 언어 속에 각인된 이미지, 사고의 스킴등은 개인이 이해하는데 영향을 주게 된다(Sierpinska, 1994, pp.122-126).

본 연구의 목적은 학생들이 함수 개념을 어려워하는 이유를 역사적으로 살펴보고자 한다. 그리하여 학생들이 함수 개념을 어려워하는 이유는 역사적으로도 확인되며, 이러한 것은 학생들이 불가피하게 가질 수 있는 것이며, 이것은 학생들의 함수에 관한 장애를 확인하는데 기초 자료가 될 것이다.

* 이화여자대학교

2. 인식론적 장애

Bachelard는 과학적 이론 등은 생활의 유용성에 의해서가 아니라 정신적인 내적인 흥미에 의해 이루어진 것이라고 본다. 그는 필요에 의한 또는 유용성에 의하여 유발되는 흥미보다는 몽상하는 즐거움 속에서 정신이 활기를 찾으며, 이러한 필요 이상의 것을 추구하려는 정신에 의해 창조된 것은 필요에 의해 창조된 것보다 더 위대하다고 보고 있다(Bachelard, 1970, p.162).

전과학적 시기에 필요에 의해 이루어진 지식은 다시 재조직되어야 한다는 생각을 과학자들은 하게되며, 잘못 제기된 전 과학적 시기의 지식은 기본적인 오류를 드러내는 것을 인정해야 하며, 따라서 과학은 스스로 재구성되고 재정복될 때 진보하게 된다. 과거의 과학은 현대의 과학에 의해 조정되어야 한다. 따라서 새로운 과학은 연속성이 아니라 단절을 의미하며, 특히 과학적으로 특별한 문제의 진보 이면에는 진정한 정신적 단절이 있으며, 이것으로 인식론적 연속성을 인정하지 않게 된다. 과학은 새로운 지식을 첨가하거나 지식을 축적하지 않으며, 자료나 사실들의 더미가 아니라 지식의 역동적인 재구성과 그 긴밀한 체계를 세워야 하는데, 이를 위해서는 인식론적 장애물인 연속적인 정신보다는 과학적 천재성에 의한 충동이 더 필요하다. 과학적 습관이나 그 지식 자체들이 실제로 과학이 발전하는데는 방해가 된다(Bachelard, 1970, p.164). 따라서 과학은 여러 사람에 의해서 조금씩 발전되어 가는 것이 아니라 뛰어난 과학자들에 의해 기존의 과학 이론이 가지고 있는 인식론적 장애물이 제거됨으로써 새로운 합리성을 지니게 된다. Bachelard (1938)는 장애에 대해서 다음과 같이 말하고 있다(Cornu, 1991, p.190 재인용).

> 우리는 장애라는 관점에서 과학 지식에 관한 문제를 제기해야 한다, 그러한 문제는 과학적 현상의 복잡성과 일시성 같은 외적 장애를 고려하는 문제나 인간의 감각과 정신의 나약함을 한탄하는 문제가 아니다. 장애는 지식 자체를 획득하는 장면 속에서 궁극적으로 필연적인 결과로 무엇이 나타나는 지를 아는 것이고 학습이 지체되는 것이며, 인지적 어려움을 가져다주기도 한다. 여기서 우리는 인식론적 장애를 지체나 퇴보의 원인으로 생각할 수도 있고, 타성의 이유로 생각할 수도 있다.
>
> 우리는 선행 지식에 모순이 되는 새로운 지식을 만나게 되고 그렇게 함으로써 잘못 형성된 아이디어를 고쳐나갈 수 있다.

그는 과학적 사고의 역사적 발달 과정과 교육 현실로 인하여 인식론적 장애가 일어난다고 주장했다. 그의 입장에서 볼 때 인식론적 장애는 다음과 같은 중요한 특징이 있다. 즉, 인식론적 장애는 불가피한 것이며, 지식을 획득하는 과정에서 필수적인 요소이다. 그리고 인식론적 장애는 부분적으로 개념의 역사적 발달과정에서 발견된다.

Bachelard는 과거의 지식과 새로운 지식의 관계에 대해 과학적 변증법으로 설명하고 있다. 과학적 변증법은 새로운 지식은 과거의 지식을 버림으로써 얻어지는 것이 아니라 과거의 지식을 포섭하여 체계화, 재정립하는 것을 말한다(Bachelard, 1970, p.166). 그의 과학적 변증법이란 일반적인 변증법에서처럼 한 사고와 다른 사고가 모순의 전개에 의해서 새로운 무모순의 독립적인 체계가 형성되는 것이 아니라, 처음부터 갑작스러운 정신의 단절로 이루어진 사고가 그 이전의 사고를 포용하여 발전하는 것을 말한다. 이러한 과정에 의해 이전의 사고의 합리성을 이후의 사고의 합리성이 포용하기 때문에 과학이 불연속임에도 불구하고 합리성이 형성된다. 그리고 이와 같은 합리성의 형성을 위해서는 인식론적 문턱을 넘어야 하고 이

러한 행위를 인식론적 행동이라고 부른다 (Foucault, 1972, pp.19-20).

이러한 지식의 발전 과정은 수학에서도 찾아볼 수 있다. Brousseau는 인식론적 장애 개념을 수학에 적용했는 데, 그는 인식론적 장애를 어떤 활동 영역에서는 제대로 작동되지만 어떤 상황에서는 잘 작동되지 않고 모순이 생기며 결국은 실패하게 되는 지식이라고 정의하였다. 따라서 처음에 형성된 충분하지 않고 잘못 형성된 지식을 파괴해서 새로운 영역에서도 잘 작동되는 새로운 개념으로 바꿀 필요가 있다. 그러한 장애를 분명히 알고 극복하는 것이 이해의 핵심 부분이다. 처음의 아이디어들을 실패했던 상황에 적용해 본후, 그 생각들을 버리지 않고는 변형이 이루어질 수 없다. 따라서 인지적 재구성을 하려는 상당한 노력이 필요하다(Cornu, 1991, p.190). Cornu도 Bachelard의 '장애' 개념을 다음과 같이 논의하고 있다.

> 장애도 일종의 지식이다. 즉 학생들의 입장에서 보면 장애도 하나의 지식인 것이다. 이러한 지식도 한때는 문제를 푸는 데 만족스럽게 사용되었다. 이러한 만족스러운 경험 때문에 그 지식은 인간의 마음속에 정착되며, 장애로 작용하게 된다. 그 지식은 새로운 문제에 부딪혔을 때 부적절한 것으로 드러나기도 하며, 이러한 부적절함이 분명하지 않을 수도 있다(Tall, 1991, p.9 재인용).

Duroux(1982; Brousseau, 1997, p.99 재인용)는 인식론적 장애의 필요 조건의 목록을 다음과 같이 제시하고 있다. 첫째, 장애는 지식이나 개념이지, 어려움이나 지식의 결여가 아니다. 둘째, 이 지식은 빈번하게 경험되는 특정한 맥락 안에서는 적합한 반응을 생산해 낸다. 셋째, 그러나 그것은 이 맥락 밖에서는 틀린 대답을 생성해 낸다. 옳고 보편적인 응답은 현저하게 다른 관점을 요구한다. 넷째, 이 지식은 때때로 나타나는 모순과 더 나은 지식의 확립에 저항한다. 더 나은 지식의 소유는 이전의 것이 사라지는 것으로 충분하지 않다. 다섯째, 그것의 부정확성이 인식된 후에, 그것은 계속해서 미숙하고 완고한 형태로 계속해서 나타나게 된다.

인식론적 장애는 탐구되어야 할 지식에서 그것이 하는 형성적 역할 때문에 피할 수도 피해서도 안되는 장애들이다. 그것은 수학적 개념의 역사에서 발견될 수 있다(Sierpinska,1994, pp.128-132).

3. 함수 개념의 역사적 발달

함수 개념은 4000년 전부터 나타났다. 3700년 동안은 예견의 단계이고, 최근 300년 동안에 미적분, 해석학의 문제와 밀접한 관련을 가지고 발달되었다. 예견의 단계는 함수 개념이 명백한 형태로 표현되기 위한 여러 가지 수학적 토대를 만드는 시기였다. 함수 개념은 미적분, 해석학과 더불어 발달된 점을 미루어 볼 때, 미적분의 발달에 따라 다양한 함수가 나오게 되고, 따라서 함수의 정의가 필요했음을 알 수 있다.

'함수'라는 용어가 최초로 도입된 것은 1694년 Leibniz에 의해서 이지만 함수 개념은 '함수'라는 정의를 하지는 않은 상태로 그 이전에도 있었다. 함수 개념의 발달을 살펴보면, 점의 변환이나 양 사이의 관계의 암묵적인 아이디어에서 시작되어, 양사이의 관계가 함수표, 비례, 방정식, 그래프으로 기술되었으며, 변수 사이의 세련되고 명시적인 아이디어가 있었음을 알 수 있다.

(1) 암묵적인 함수 개념 단계

이 단계는 변환이나 양사이의 관계에 대한 암묵적인 아이디어의 단계이다. 함수 개념을 이해하기 위한 첫 번째 조건은 세계의 존재를 이해하는 것이다. 즉, 변화하는 세계, 변화하는 대상의 세계, 변화 사이의 관계의 세계 또는 한 대상에서 다른 대상으로의 변화 과정의 세계, 규칙이나 패턴 혹은 법칙의 세계가 존재함을 알아야 하는 단계이다. 변화가 있음을 알아야 하고, 변화 사이의 관계는 연구되어야 할 가치가 있는 것으로 인식해야 한다. 주변 세계에서 변화하는 대상들이 문제의 근원이 되기도 한다. 여기에서 변화 사이의 관계를 인식하고, 규칙성을 인식하는 것은 이러한 변화에 대처하는 도구가 된다. 사실 함수 개념은 주변 세계에서 관찰되고 경험되는 변화에 타협하기 위한 노력의 결과로 볼 수 있다. 만약 수학이란 실제 문제와 관계가 없는 것으로 보는 경우, 함수 개념의 발달을 위한 필요조건인 이러한 행동이 무시된다면, 이것은 함수 개념이 발달되는데 장애가 될 것이다(Sierpinska, 1992, p.31).

(2) 수표로서의 함수

고대 바빌로니아 시대에는 곱셈표, 역수표, 제곱과 세제곱표, 지수표를 사용한 흔적이 발견된다. 지수표는 복리에 관한 문제를 보간법으로 푸는 데 이용되었을 것이고, 역수표는 나눗셈을 곱셈으로 바꾸는 데 사용되었을 것이다(Eves, 1953, p.30). 고대 바빌로니아인 들은 많은 표를 제작하였는데, 바빌로니아의 수학에서 표로 나타내어진 함수는 특히 천문학과 관련하여 등장하고 그들은 천체의 주기성을 관찰하고, 그 관찰된 속도의 주기적인 변화를 고려하여, 천체가 진행하는 경로를 선형이나 부분적인 선형으로 내삽하였다(Freudenthal, 1983, pp.516-520).

천문학자들은 천구 위에서의 위치를 구면삼각법을 이용하여 찾았으며, Ptolemy는 *Almagest*에서 수적 방법과 내삽법을 상당히 세련되게 사용하였다 (Sierpinska, 1992, p.31). Ptolemy는 *Almagest*에서 삼각법의 표뿐만 아니라 그것을 작성할 때 쓰였던 방법까지도 알 수 있게 하였다. 예를 들면, 삼각법의 기본 공식을 이용하여 정밀한 현의 표를 작성하기도 하였다 (김용운외, 1988, pp.11-112).

그러나 일반적으로 이러한 표를 만드는 방법은 명시적이지도 않았고, 수학에 속하는 것으로 보지도 않았다. Ptolemy도 수학이란 유클리드 원론과 새로운 기하학의 정리, 평면 기하학, 구면 기하학을 포함하는 것으로 보았다. Ptolemy는 *Almagest*의 처음 두 권에는 이러한 주제를 포함시켰고, 세 번째 권에야 비로소 천문학과 지리학에서 쓰이는 수학적 지식을 포함시켰다. 이러한 생각은 그리이스 시대에는 공통적이었다. 고대 그리이스 시대에는 대체로 규칙적인 관계의 표를 만드는 기술을 과학으로 보지 않았다[1]. 그것은 공식화되지도 않았으며, 도제 식으로 장인에서 학생으로, 한 세대에서 다음 세대로 전달되었다(Sierpinska, 1992, p.31). 이것은 함수 개념 발달에 장애가 되었을 것이다.

(3) 비례 관계로서 함수

비례론은 유클리드 원론의 제 5 권의 주제로서 비례는 17세기까지의 수학에서 지배적이었다. 유클리드 원론에서 개발된 비례론은 굳

1) 그리이스에서는 응용과 이론, 일상의 계산과 수의 성질에 관한 이론적 연구 사이에도 뚜렷한 구별을 하였으며, 그리이스 학자들은 전자의 경우를 '계산술', 후자를 '수론'이라고 하고, 후자를 고결한 철학적 탐구로 여겼다(김용운외, 1988, p.97).

건한 이론적 토대를 가지고 있었다(Sierpinska, 1992, p.42). 유클리드 원론에는 논리적으로 엄밀한 비례론이 들어 있었고, 이 이론을 고대 및 중세의 학자들이 과학상의 여러 문제에 응용해 왔다. 예를 들면, 일정 시간내의 같은 속도로 통과하는 거리는 그 운동 속도에 비례한다(또는 거리가 주어질 때 소요 시간은 속도에 반비례한다)라든지, 아리스토텔레스는 운동론 중의 한 명제 '저항 매체에 반대 방향으로 작용하는 힘이 있을 때, 운동하는 물체의 속도는 그 힘에 비례하고, 저항에 반비례한다'(김용운 외, 1988, p.166)를 제시하기도 하였다.

고대 그리이스의 기하학적 전통은 내적 비에 의한 형식화만이 허용되었으며, 이런 전통은 오래 계속되었다. 한 양 체계 내에서의 비가 다른 양 체계 내에서의 비로 보존되는 비례관계가 선형 사상이다. 그리이스인들은 $y=ax\pm b$의 꼴의 일차 함수에도 '비보다 더 크게 혹은 작게 주어진 양'이라고 하였다(Freudenthal, 1983, p.519). 여기에서 함수 관계 중에서 비례관계는 지배적인 관계가 되고 이것이 함수 개념 발달에 장애가 되었을 것이다.

그리이스의 수 개념은 비례 개념과도 관련이 있다. 고대의 수학은 어떤 양의 평방, 입방 등을 각각 다른 질적 내용을 지닌 것으로 간주하였으며, 이것은 여러 가지 양적인 비교를 불가능하게 만든 원인이 되었다. 이 때문에 등질적이지 못한 방정식은 아예 다루지 못하였다(김용운 외, 1988, pp.268-269). 그리이스에서는 수(arithomos-범자연수)를 썼는데, 범자연수의 비로는 변량 사이의 비나 관계를 모두 표현 할 수는 없었다. 그리고 선분 사이의 비, 넓이 사이의 비, 부피 사이의 비로는 측정에 필요한 모든 것을 만족시키지 못했다. 비는 등질적인 양의 비로 제한되었고, 시간에 대한 거리의 비라든가, 선분에 직사각형을 더하는 것은 아무 의미가 없었다. 이러한 생각은 복잡한 세계를 기술하기에는 벗어버려야 할 짐이었으며 (Sierpinska, 1992, p.39), 따라서 이것은 함수 개념의 발달에 장애가 되었고, 이러한 생각은 오랫동안 지속되었다.

(4) 일반화된 비례로서 함수

중세 시대에는 비례 개념이 좀 완화되었고, 대표적인 수학자로는 Bradwardine과 Oresme이 있다.

Bradwardine은 아리스토텔레스의 운동론 중의 한 명제인 '저항 매체에 반대 방향으로 작용하는 힘이 있을 때, 운동하는 물체의 속도는 그 힘에 비례하고, 저항에 반비례한다(즉, $V=KF/R$, V:속도, F:힘, R:저항, K:0이 아닌 비례상수)'에 대해 의문을 품었다. 그는 F=R일 때는 경험적으로 운동이 일어나지 않고, R=0일 때는 속도는 무한대이므로, 아리스토텔레스가 마음에 두고 있었던 아이디어는 비 F/R이 기하학적으로 증가함에 따라 속도는 산술적으로 증가한다는 아이디어에 있다고 주장했다. 따라서 그는 *Tractus de proportionibus*에서 일반화한 비례이론을 사용하였다. 즉, F/R에 의해 나타내진 속도를 2배 늘리기 위해서는 비 F/R을 제곱해야 한다. 이것은 $V=K\ \log F/R$이라는 식으로 나타내어진다는 것과 동치이다(김용운 외, 1988, p.166; Sierpinska, 1992, p.43).

Oresme은 Bradwardine의 비례 이론을 *De proportionibus proportionum*라는 저작에서 일반화하였다. 그는 유리 분수까지 포함한 비례의 결합 법칙을 제시하였고, 이것을 현대식으로 기호화하면, $x^m x^n = x^{m+n}$, $(x^m)^n = x^{mn}$이 된다 (Boyer, 1968, p.289; 김용운 외, 1988, pp.167-168). 그는 고차원 초월 함수의 힌트를 제공한 것으로 보이지만, 그 시대에는 적합한

용어나 기호 개발이 불충분했으므로 무리수 지수 개념을 효과적으로 개발하지는 못했다 (Boyer, 1968, p.290).

Oresme은 Treatise on the configuration of generalities에서 수 이외에 잴 수 있는 모든 것을 연속 량으로 다루었다(Sierpinska, 1992, p.39). 다시 말하면 그는 잴 수 있는 모든 것은 연속 량으로 파악할 수 있다는 입장에 서서 등가속되는 운동체를 나타내기 위한 방법으로 속도와 시간을 기준으로 하는 그래프를 그렸다. 그는 기하학적 모델에 의해 운동의 성질을 증명하려고 했다. 즉, 수평인 직선 위에 시간의 각 순간(경도)을 표시하고, 이들 각 순간에 대해 수평선에 수직인 선분(위도)을 그려서 각 선분의 길이로 속도를 나타냈다.[2] 이때 각 선분의 끝점이 직선을 이룬다는 것과 가속 운동이 정지 상태에서 시작한다면 속도를 나타내는 선분 즉 세로 좌표 전체는 내부를 포함한 직각삼각형이 된다는 사실을 밝혔다. 이 삼각형의 넓이는 통과한 거리를 나타내는 데, 소요시간의 중간 점에서의 속도는 마지막 순간의 속도의 절반이 된다. 또 이 도형은 전체 시간 중에서 처음의 절반 시간에 대응하는 넓이와 나머지 절반에 대응하는 넓이의 비가 1:3임을 보여주고 있다. 즉, 소요시간 (넓이에 의해서 주어진)을 3등분하면, 통과한 거리의 비는 1:3:5이고 4등분하면, 통과한 거리의 비가 1:3:5:7이 된다. 이들 거리의 비는 서로 홀수의 비가 되므로 연속된 n개의 홀수의 합은 n제곱이기 때문에, 초기 속도가 0인 등가속도 운동에서 통과한 거리 전체는 시간의 제곱에 비례하여 변한다(Boyer, 1968, p.291; 김용운 외, 1988, pp.168-169). 이것은 후에 Galileo가 관찰한 것과 같다.

Oresme은 1개의 미지수를 갖는 함수를 그래프로 표시할 수 있다는 기본 원리를 파악한 듯 보인다. 그러나 그는 선형 함수의 경우를 제외하고는 이런 관찰을 효과적으로 사용할 수는 없었다. 더구나 Oresme은 곡선 아래의 넓이에 주로 관심이 있었다. 그래서 해석기하학의 기본 원리의 다른 반쪽인 모든 평면 곡선은 1변수 함수로서 좌표계에 표현될 수 있다는 것을 보여준 것 같지는 않다(Boyer, 1968, pp.291).

(위도 형태로 알려진) 함수의 그래프적 표현은 Oresme부터 Galileo시대까지 대중적인 주제였다(Boyer, 1969, p.291-292). 수에 대한 이러한 기하학적 사고 방법에 의해서, Oresme의 그래프는 오늘날 우리가 생각하는 그래프의 양적 의미보다는 변하는 양사이의 관계나 질적 표현에 가깝다(Sierpinska, 1992, p.39).

(5) 기하학적 함수 개념

암묵적 함수 개념 단계에서 일반화된 비례 관계 단계까지는 함수 개념이 명시적으로 드러나지 않았으며, 함수 개념은 실행적 과정을 거쳐 명시적 정의가 나타나게 되었다. 함수 개념이 완전히 인식되기전 이었던 17세기 대부분의 함수는 곡선으로 연구되었다. 함수에 대한 개념화는 여러 가지 운동을 연구하는 것으로부터 시작되었다. Galileo에 의하면, 현상은 어디까지나 수학적(=기하학적) 개념에 의해서 엮어져 있고, 다시 말하면 우주라는 거대한 책은 수학적인 언어로 씌어져 있다. Galileo의 현상주의적인 진리성은 기하학적(=수학적) 법칙의 진리성 바로 그것이었다(김용운외, 1988, p.219). 그는 측정 가능한 것은 측정하고, 측정가능하지

2) 여기에서 Oresme이 사용한 '위도', '경도'라는 낱말은 현대식으로는 세로 좌표, 가로 좌표에 해당하며, 따라서 그의 그래프적 표시 방법은 오늘날의 해석기하학에 가깝다고 할 수 있다. 좌표의 이용은 이전에도 Apollonius를 비롯한 다른 학자들에게서도 볼 수 있으나, 변량을 그래프로 나타낸다는 점에서는 Oresme의 방법은 획기적이었다(김용운 외, 1988, p.168).

않는 것은 측정 가능하도록 만들어야 한다고 생각했고, 이것은 르네상스 시대의 수학자들의 철학을 잘 드러내주고 있다. 수 사이의 관계의 도움으로 물리적 현상을 모델링하기 시작하였다. Galileo는 비례를 이용하여 함수 개념으로 개념화하고자 했다. 그는 등가속도 운동을 하는 물체가 움직인 거리는, 그 거리까지 움직이는 데 걸린 시간의 제곱에 비례한다는 것을 관찰하였고, 그러한 현상은 양적으로 조직되어 여러 가지 곡선과 결합되었다. 이러한 Galileo의 연구에서도, 자연 현상의 변화하는 양사이의 관계를 탐구하고, 관찰된 현상을 기술하고 모델화하기 위한 도구를 찾는 것이 함수 개념을 생겨나게 한 기초가 됨을 알 수 있다. 그러나 모든 것을 측정 가능하도록 만들기 위해서는 수 개념을 확장하는 일과 단일화(uniformization)가 필요하였다(Sierpinska, 1992, p.38).

수 개념을 단일화시킬 수 있었던 요인으로는 다음과 같다. 하나는 Stevin의 소수 체계이고, 다른 하나는 대수 분야의 발달과 기호 표현에 있다(Sierpinska, 1992, p.40). Stevin은 *Arithemetic*에서 수를 어떤 것의 양을 표현하는 것이라고 하면서, 진짜 수의 영역에서 무리수를 제외시키는 전통은 깨야 한다고 하였다. 그는 수는 연속량이고, 특히 단위는 분해 가능하다고 하였다. 수 개념을 단일화시킬 수 있었던 다른 요인으로는 대수 개념과 기호이다. 대수에서 사용되는 문자는 수 개념과 양을 추상화시켰으며, 추상화 과정에서 이산인 양과 연속인 양 사이에 차이를 두는 것은 점점 필요 없게 되었다. 문제를 해결하기 시작할 때, 어떤 문자가 양을 나타내거나, 변량을 나타내거나, 단순히 수를 나타내어도, 그것이 방정식으로 바뀌게 되면 그 차이가 없어지게 된다. 그 문자는 변수가 되고, 그리고 그 방정식이 어떤 양적 관계를 나타낸 것이라면, 여기에서 변수는 수적 영역이 된다(Sierpinska, 1992, p.41). 이러한 요인으로 수 개념의 종합과 분석이 이루어졌으며, 이것은 함수 개념의 발달에 도움이 되었다.

Descartes는 *Geometrie*에서 좌표를 수가 아니라 선분으로 보았다. 좌표는 곡선에 대해 어떤 기능을 하는 선분(line segment fulfilling some function for the curve)이지, 임의의 실수가 아니었다(Sierpinska, 1992, p.40). Fermat도 곡선을 어떤 보조 선분(diameter, axis등)들 사이의 비례로 설명될 수도 있다고 하였다.

Newton과 Leibniz에 의해서 발달된 미적분은 오늘날의 형태가 아니다. 특히 그것은 함수의 미적분이 아니다. 17세기 미적분의 주된 연구 대상은 (기하학적) 곡선이었다. 17세기 해석학은 곡선의 접선, 곡선 아래의 넓이, 곡선의 길이, 곡선을 따라 움직이는 점의 속도 등을 아는 방법등 곡선 문제를 푸는 방법들로써 생겨났다. 미적분을 출현시킨 문제들이 원래 기하학적이고 운동적이며, Newton과 Leibniz는 그들이 만든 도구를 탐구하는 데 열중해 있었으므로 미적분이 대수적 형태로 다시 고쳐지는 데 많은 시간과 반성이 요구되었다(Kleiner, 1989, p.283).

Newton은 연속적으로 변하는 양 즉 '유량'과, 유량의 순간적인 증가 또는 감소를 나타내는 모멘트를 뜻하는 '유율' 이라는 단어를 사용하였다. Newton은 유율법의 형식을 갖춘 미분 계산과 적분 계산을 발견했다. 유율법이란 여러 가지 형태의 연속적인 역학적 운동을 추상화한 것으로서 유량을 그 연구 대상으로 삼는다. 유량이라는 말은 '흐름'에서 비롯되었고, 흐르는 것은 어떤 독립 변수에 따라 변한다고 생각할 수 있다. 이때의 공통적인 독립 변수는 시간이다. 이 때문에 먼저 시간을 수학적으로

정확하게 추상화한 다음에 균등하게 흐르는 추상적인 양을 문제 삼는다. 이 유량은 액체뿐만 아니라 온갖 변동하는 양을 포함하고 있다. 시간에 대한 유량의 비율이라는 점에서 흐름의 속도 즉 유율이 문제가 되고, 유량은 유율의 원시함수이고, 유율은 유량의 미분이 된다(김용운외, 1988, p.323).

Newton의 유율법은 함수가 아니고 유량에 적용된다. Newton은 변수를 유량이라 하고 그 이미지는 곡선을 따라 흐르는 점의 기하학적인 것이었다(Kleiner, 1989, p.284).

Newton은 *Principia*에서 변수라는 용어를 사용하고 있지는 않지만 다음과 같은 표현 가운데 변화하는 양으로서의 변수 개념이 암시되고 있다. "이제 나는 점차적으로 그리고 끊임없이 증가하는 것으로 생각되는 양을 유량 혹은 변량이라고 말하겠다"(Hamly, 1934, p.9; 김남희, p.30 재인용).

함수 개념의 은유와 환유에 대해서 살펴보자. '유율(fluxio)'은 흐르는 강물의 은유라 할 수 있다. 시간의 흐름의 아이디어는 흐르는 강물과 비유될 수 있다. Newton은 우선 시간 변수가 어떻게 변하는가를 기술하기 위해서 이 이미지를 사용했다. 그것은 등속도를 가진 '연속적인 흐름(continuous flow)'으로 특징 지워진다. 그 이후에 이 유율(fluxion)이라는 이름은 시간처럼 연속적으로 흐르는 것으로 특징 지워지는 모든 종류의 양의 변화율을 말하는 것으로 확장되었다. 그리고 모든 균등하게 흐르는 양에 '시간'이라는 이름이 주어졌다. 그래서 시간의 유율은 단위(unity)로 표현될 수 있다. 여기에 은유와 환유가 있다. 시간은 은유적으로 '흐르는 양'으로 부른다. 그리고 그것은 환유적으로 연속적으로 증가하는 양을 나타내는 것으로 확장되었다. 시간과 함께 변하는 속도를 은유적으로 유율이라 부른다. 그리고 유율은 환유적으로 연속적으로 증가하는 양의 속도를 나타내는 것으로 확장되었다. 그러나 유량과 유율은 유럽에서는 사용되지 않았다. 그것은 운동, 운동의 변화, 변화율과 같이 제한적으로 사용되기 때문이었다(Sierpinska, 1994, p.98).

함수라는 용어는 곡선을 해석적으로 탐구하고 기술하는 기하학적 문맥에서 생겼다. 1673년 Leibniz는 *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*에서 서로 역이 되는 문제에 관심을 가졌다. 첫째는 횡좌표와 종좌표가 방정식으로 주어지는 어떤 곡선에 대하여 그 곡선과 관계 있는 접선영, 법선, 그리고 다른 선분을 발견하는 일. 둘째, 한 곡선의 접선영, 법선, 그리고 다른 선분들이 주어져 있을 때, 횡좌표와 종좌표와의 관계를 발견하는 것(Sierpinska, 1994, pp.99-100). 이러한 '곡선과 관련 있는 선분'을 곡선에 대해 어떤 기능을 수행하는 선분(lines fulfilling some function for the curve)이라고 불렀다[3].

1694년 Leibniz는 *Le Journal des scavans*에서 곡선과 관련된 선분을 나타내기 위해서 'function'이라는 용어를 사용하였다. 예를 들어 Leibniz는 'a tangent is a function of a curve' 라고 하였다. 이것은 환유적 축약의 신호라고 볼 수 있는 데, 곡선에 대한 어떤 기능을 수행하는 선분을 단순히 'function'라고 하였다. 그는 이 논문에서 어떤 기능을 수행하는 선분사이의 관계보다는 선분 그 자체에만 관심을 가지게 되었다. 그래서 Leibniz와 그의 제자 요한 Bernoulli와의 서신 왕래에서의 중심 주제는 'function'이라는 용어의 정확성이라기 보다는, 곡선 좌표와 좌표사이의 관계, 대상과 대상사이의 관계 연구가 더 중요한 것이었다. 관계로 한 곡선과 다른 곡선이 정확히 구별되었고, 이

3) 여기에서 'function'이라는 용어가 은유적으로 나온다.

러한 관계를 분류함으로써 곡선의 분류가 생겼다. 이러한 분류 이전에 수학자들은 Descartes의 분류, 즉 곡선은 운동적인(mechanical) 것과 기하학적인(geometrical)것을 사용하였다. 그러나 Descartes시기에는 운동적인 것은 수학에서 제외되었다. 그러나 Leibniz의 새로운 분류에는 운동적인 곡선도 포함시켰다. 그는 운동적인 곡선을 '초월적(transcendental)'이라고 한 반면에, Descartes의 기하학적 곡선을 '대수적(algebraic)'이라고 불렀다. 그래서 Leibniz는 곡선을 초월적인 것과 대수적인 것으로 구분하였다.

단지 해석적 식으로 표현 가능한 것만이 수학적 연구 대상이 된다는 신념을 기지고, Bernoulli는 'a quantity in whatever manner formed of indeterminates and constants'의 개념을 분리해 내었지만, '함수'라는 용어는 나타나지 않는다.

Leibniz와 Bernoulli의 서신 왕래에서 환유적 전환이 일어났고, '함수'이라는 단어는 한 변수가 다른 변수의 종속 관계를 기술하는 식으로 사용되기 시작했다. 1718년 Bernoulli는 *Memorires de l'Academie des Sciences de Paris* 에서 '함수'라는 용어의 공식적인 정의를 했다. 즉, '변량의 함수는 이 변량과 상수가 어떤 형식이든지 구성된 양이다'(Sierpinska, 1994, pp.99-100). 그러나 Bernoulli는 'composed in any manner whatever'에 대해 설명은 하지 않았다(Kleiner, 1989, p.284).

정리하면, 함수 개념의 싹은 Leibniz로부터 비롯되었다고 볼 수 있다. 함수 개념은 처음에는 접선, 접선영 등의 기하학적인 양을 뜻하였으나, 이러한 양들 사이의 관계로 바뀌게 되고, 그리고 '변량 x의 함수란 x와 상수가 어떠한 형식으로 구성된 양이다'라는 생각으로 발전하게 된다.

(6) 대수적 함수 개념

이 시기는 기하학을 대수적으로 표현하려고 하는 Descartes와 Fermat의 연구의 결과, 기하학적인 것을 대수적으로 표현하는 관점의 전환이 중요한 역할을 하게 된다. 함수 개념의 발달에서도 기하학적인 관계를 대수적으로 표현하는 관점의 전환이 이루어지게 된다. 17세기 해석학이 18세기초에 와서 그 기하학적 근원과 배경으로부터 점차 분리되었고, 이러한 '해석학의 탈 기하화' 과정은 기하학적 대상에 적용된 변수 개념이 대수적 공식으로서 함수 개념으로 대치되는 것을 의미한다(Kleiner, 1989, p.284).

대수적 식으로서 함수 개념의 경향은 1748년 Euler의 *Introduction a l'analyse Infinitesimale* 에서 구체화되었다. Euler는 함수를 '해석적 식'으로 정의하였다. 즉, '변하는 양의 함수는 어떠한 방식으로든 변하는 양과 수 또는 일정한 양으로 구성된 해석적 식'이다. 그는 해석적 식이라는 용어를 정의하지는 않았지만 해석적 식이 사칙 연산, 근호, 지수, 로그, 삼각 함수 등을 포함한다고 설명하여 의미를 주려고 하였다. 예를 들면 $a+3z$, $az-4zz$, $az+b/a-zz$ 등이 z의 함수이다. 그는 함수를 대수적, 초월적; 단가, 다가; 음함수, 양함수로 분류하였다.

함수 개념 발달에 결정적인 역할을 한 것 중 하나가 진동 끈 문제였다. 이 문제로 인해 함수 개념에 대한 논쟁이 시작되었는 데, 그 시기에는 '두 해석적 표현이 한 구간에서 일치하면, 그것들은 어디에서나 일치한다'[4]는 그 당시의 함수 개념에서 얻어진 믿음을 가지고 있었다. Euler와 Bernoulli등의 수학자들은 물리 문제를 다루기 위해 미적분을 발달시켰다. 이 시

4) 이것을 'article of faith'라고 한다(Kleiner, 1989, p.285).

기의 수학자들은 함수를 모서리가 없는 그래프를 가진 두 변수 사이의 관계를 나타내는 해석적 식이었다(Malik, 1980, p.490). 그러나 Euler는 진동 끈 문제를 계기로 함수에 대한 생각을 바꾸었다. 그래서 그는 1755년 '해석적 식'이라는 말이 나오지 않는 다음 정의를 했다. "그러나 만약 어떤 양이 다른 것에 의존한다면 전자를 후자의 함수라고 부른다. 이것은 아주 포괄적인 개념이며, 한 양이 다른 것에 의해 결정될 수 있는 모든 양식을 포함한다. 그러므로 만약 x가 변량을 표시하면 x에 의존하는 모든 양들은 그것들이 어떤 방식으로 결정되든 x의 함수라 불린다"(Kleiner, 1989, p.288).

이와 함께 Euler는 미지수와 변수의 차이를 구별했다. 미지수는 변화하지 않는 수인 반면, 변수는 변화할 수 있는 양을 가리킨다. Diophantus는 그의 저작에서 변수와 미지수의 서로 다른 개념을 사용하고 있었지만, 변수와 미지수의 차이점을 정확히 진술하지는 않았다. 이 차이점을 Euler가 정확히 밝히고 있는 데, 그는 미지수를 "일반적인 해석학(즉 대수학)"에 속하는 것으로 보는 반면에, 변수는 "새로운 해석학(즉 무한소 해석학)"에 속하는 것으로 보았다(Sierpinska, 1992, p.37; Radford, 1996, p.61). 비록 어떤 대상이 두 영역에 공통적으로 들어 있을 때라도, 관심은 서로 다른 측면에 두어야 하고, 그것에 서로 다른 역할을 주어야 한다. 예를 들면, 방정식은 그 값을 주어야 하는 미지수 위의 조건에 불과하지만, 함수의 문맥에서는 그것은 어떤 다른 변수가 변함에 따라 어떤 변수가 변해야 하는 법칙이나 원리로 나타난다(Sierpinska, 1992, p.37).

독립 변수와 종속 변수의 구별은 Euler에서 시작되었다고 볼 수 있다. 정의구역과 치역의 구별은 함수의 정의에서 대칭적이지 않다. 즉 정의 구역과 치역을 바꿀 수 있는 것은 아니다. 변수의 순서의 구별이 중요하다고 인식되는 데는 오랜 시간이 걸렸다. 함수 개념은 해석기하학의 문맥에서 시작되었다고도 볼 수 있는 데, 해석기하학에서는 곡선에 대해 역할을 하는 서로 다른 선분(diameter, axis, ...)이 고려되었다. 그런데 타원의 방정식을 생각한다면 변수의 순서는 그리 중요하지 않게 된다. Descartes의 변수의 역할은 대칭적이었으며, 이러한 구분은 Newton에서도 분명하지 않았다[5]. (Sierpinska, 1992, p.38). 독립 변수와 종속 변수의 등장은 함수 개념 발달에 결정적인 역할을 했으며, 이는 1755년 Euler에 의해 시작된 개념이라고 할 수 있다(Kieran, 1992, p.391).

그리고 사상이라는 개념과 용어는 지도 제작법과 관련해서 구면의 평면위로의 사상을 연구한 Euler의 논문가운데에서 그 전조를 찾을 수 있다. 사상은 이와 같이 기하학적 기원을 갖는 개념으로 집합론의 중요한 도구가 되었고, 위상수학에서 중요한 연구 대상이 되었다. 함수와 사상이란 두 줄기가 통합된 것은 20세기에 들어와서 이다(우정호, 1998, p.359).

함수가 곡선과 밀접한 관련을 가지고 있을 때는 그 곡선은 대부분 다가 대응이었으나, 한 변수의 다른 변수의 종속 관계가 다가 대응이 되는 경우 다루기가 혼란스러워지며, 특히 음함수와 같은 함수식에서 한 변수를 다른 변수로 나타내게 될 때 여러 개의 식이 나오게 되므로 이러한 경우 혼란을 일으키는 경우가 있어 수학자들은 함수를 일가 대응으로 제한하게 되었고, 이것은 결국 함수의 일반적인 정의로 받아들여지게 되었다(우정호, 1998, p.360). 그러나 대수적 함수 개념은 긍정적인 측면과 부정

5) 이와는 다르게 Youschkevitch(1976)에 의하면, Newton은 독립 변수와 종속 변수에 해당하는 것으로 각각 quantitas correlata와 quantitas relata를 사용했다고 보고 있다(Cha, 1999, p.17 재인용).

적인 측면이 있다. 대수적 방법을 알고 대수를 방법론적 도구로 안다는 것은 함수 학습에서 필요하다. 그러나 대수가 많은 문제를 자동적으로 푸는 힘을 가지고 있다는 믿음을 갖게될 때 이것은 일반적인 함수 개념을 이해하는데 방해가 된다(Sierpinska, 1992, pp.45-46). 수학자들은 변화에 대한 관계를 기술하기 위한 수단을 찾고 있었고, 17세기와 18세기에 그들은 폭넓은 경험과 많은 결과를 축적하여 대수적 관계에 의해서 그것을 기술하였다. 그리고 나서는 관계를 기술하기 위한 대수적 도구가 관계 그 자체보다 중요해지게 되었다. 따라서 비례에 의한 장애와 대수에 의한 장애를 극복하기 위하여, 함수와 그 함수의 법칙을 기술하기 위해 사용되는 도구를 구별하는 행동이 필요하게 되었다. 그러나 이것은 일반적 함수 개념으로의 종합이 일어나기 전까지는 이러한 이해 행동은 쉽게 일어나지 않는다.

그리고 이 시기에는 함수가 대수적으로 조작 가능함에 따라 주된 조작성으로 '합성'과 '역함수 구하기'가 포함되었다. 예컨데 x와 y, y와 z사이의 종속에서 x와 z사이의 종속을 이끌어 내는 것은, 함수 표기에서의 합성을 의미하며, 또 x와 y사이의 종속에서 x로부터 y로 독립변수를 바꾸어 선택하는 것은, x에서 y로의 '역함수 구하기'를 의미하는 것이었다. 그리하여 이전에는 전혀 알 수 없었던 새로운 함수들이 등장하였고, 동시에 함수의 새로운 세계를 열게 되었다(Freudenthal, 1983, pp.522-523; 박교식, 1992, p.124, 재인용).

그러나 더 이상 함수 개념이 확장되지 않았는 데, 이것은 미적분이 더 이상의 확장된 함수를 필요로 하지 않기 때문이었다. 다시 말하면, 그 시기의 미적분에서는 현대적인 정의의 함수를 사용할 상황이 나타나지 않았다. 단지 특별한 형태만의 함수만이 필요하였다 (Malik, 1980, p.490).

(7) 대응으로서 함수

19세기초부터 수학은 변혁을 겪었다. 이 시기 동안 수학은 새로운 정신과 공리를 얻었으며, 엄밀성과 추상성이 수학에서 중요한 요소가 되었다(Malik, 1980, p.489). 해석적 식으로서의 함수 개념이 그 이상으로 확대될 필요성은 변수 사이의 관계의 모임에서 일반적인 정리를 공식화하고 특정한 함수에 대해 얻어진 결과를 조직하는데서 나타났다. 이러한 과정은 Euler, d'Alembert, Bernoulli의 진동 끈 문제에 대한 논쟁에서 시작되었고, 열전도 문제를 해결하기 위한 Fourier의 삼각급수 이론의 발전과 함께 계속되었으며, Cauchy, Dirichlet, Bolzano등에 의한 연속 함수 개념과 함께 계속되었다.

어떤 함수도 Fourier 급수로 나타낼 수 있다는 Fourier결과는 부정확했으며, Fourier 급수 이론을 엄밀하게 증명하기 위해서는 연속, 수렴, 정적분의 개념과 함수 개념에 대한 분명한 정의가 필요하였다. Cauchy는 연속, 미분 가능성, 적분 개념을 극한이라는 용어로 엄밀하게 정의했고, 함수의 연속과 불연속 개념을 본격적으로 다루었다. 그는 이러한 연구 과정에서 다음과 같은 함수에 대한 정의를 하였다. '한 변수의 값이 주어졌을 때, 다른 변수들의 값을 추론할 수 있는 방식으로 변량들이 연결되었을 때, 이 양들이 독립 변수라고 불리는 한 양에 의해 표현된다는 것을 알게 된다. 그리고 나머지 양들은 이 변수의 함수라고 불린다'(Kleiner, 1989, p. 290).

Dirichlet는 Fourier급수와 그 급수의 수렴 조건을 찾는 연구를 통해서, 1837년 함수의 일반적 정의를 하였다[6]. 그는 '변수 y가 $a< x<b$인 모든 x값에 대하여 y값이 대응하면, 이 구

간에서 정의된 y는 변수 x의 함수이다. 또한 이 대응이 어떤 식으로 만들어지든 그것은 관계없다'(Kleiner, 1989, p.291). Dirichlet는 함수의 개념을 대응으로 진지하게 생각하였다. 그가 제시한 Dirichlet 함수는 해석적 표현으로 주어지지도 않고, 자유로이 그려진 곡선도 아닌 함수의 최초의 명백한 정의이며, 임의의 대응으로서 함수 개념을 설명하는 것이었다. 또 다른 중요한 점은 Dirichlet가 처음으로 함수의 정의에서 영역을 구간으로 명백하게 제한했다는 것이다. 과거에 독립 변수들은 실수 전체에 걸쳐 허용되었다. *Dirichlet*의 정의는 두 집합사이의 대응의 현대적인 관점과 유사하지만, '집합'과 '실수' 개념은 그 시기에 아직 확립되지 않았다(Boyer, 1968, p.600).

이러한 점에 의하면, 함수의 일반적 개념의 종합이 왜 그렇게 어려운지가 분명해 진다. 그런 개념이 되어야 하는 이유를 보이기 위해서는 단지 특정한 예의 사용만을 보여서는 안되고 함수 공간에서의 정의가 필요함을 느껴야 한다. 함수의 개념화는 Dubinsky의 용어로는 '과정'의 단계 이상이 되어야 하고, 그 개념이 원소로 다루어질 때 가능하다. 그러기 위해서는 함수 개념에 대한 임의성이 필요하게 된다. 임의성은, 변하는 대상에 대해서는 실수 집합에서 임의의 집합으로의 확장을 말하며, 변하는 대상들 사이의 관계의 측면에서는 규칙성에서 임의의 대응으로의 확장을 말한다. Dirichlet의 함수 개념은 그 이전의 함수 개념과 비교해 보아 이상한 함수도 포함한다. Dirichlet 함수와 같은 함수는 자유롭게 그려질 수 있는 곡선으로 표현될 수 없고, 연속이지만 어느 곳에서나 미분 가능하지 않는 함수도 있다. 이러한 예는 문제 그대로 얻어진 정의의 논리적 결과이다. 이러한 예를 함수로 만들기 위해서는 수학에서 정의의 역할을 알거나 통찰에 의해 알려지지 않은 다른 대상의 측면을 기술함으로써가 아니라 논리적으로 관련이 있는 것으로 보는 수학적 문화에 성숙해야 한다. 학생들이 만나는 보통의 함수는 모든 곳에서 연속이고 유한 개의 점에서만 미분 불가능인 함수이다. 그러한 드문 함수는 함수의 집합체에서는 오히려 드물게 나타난다(Sierpinska, 1992, p.47).

Dirichlet 함수 이후로 병적인 함수 족들이 다음 반세기 동안 쏟아져 나왔다. 어떤 함수들은 여러 결과들의 적용가능성을 시험하기 위해 도입되었으며, 어떤 함수들은 개념이나 결과를 확장하기 위해서 도입되었다. 이전의 해석학에서는 순서, 규칙성이 조사된 반면, 이 시기에는 예외와 불규칙이 조사되었다. Weierstrass는 1872년에 모든 곳에서 불가능인 연속 함수를 제시하였다. 그는 그럴듯하고 널리 인정된 개념에 반례를 제시함으로써 엄밀성에 대한 기준의 필요성을 실증하게 하였다. 반례는 수학에서 중요한 역할을 한다. 그것은 관계를 명맥히 하고, 개념을 뚜렷하게 하며, 종종 새로운 수학을 만들기도 한다(Kleiner, 1989, pp.292-293).

(8) 관계로서의 함수

20세기에 들어와 집합의 개념이 명확해지고, 거리 공간, 위상 공간 등의 개념이 도입되고, 그러한 공간들 사이의 함수가 중요한 역할을 하게 되었다. Bourbaki는 1939년에 함수를

6) 함수 개념 발달에 기여를 한 진동 끈 문제와 열전도 문제는 각각 다른 사고의 경향을 보여 준다. 진돈 끈 문제에서는 양쪽이 고정된 끈의 모양을 볼 수 있지만, 막대의 열전도 상황은 볼 수가 없고 경험적으로 실험을 하거나 상상을 해야한다. 따라서 열전도 문제를 해결하기 위한 과정에서 사고는 기하학적으로 사고하는데서 자유로워질 수 있었다. 이것은 진동 끈 문제에서는 상상할 수 없는 일이었다. 따라서 열전도 문제의 해결을 위해서 함수의 정의에 대한 확장이 가능하게 되었다(Malik, 1980, p.492).

다음과 같이 정의하였다. 'E, F를 집합이라고 하자. E의 변수 x와 F의 변수 y 사이의 관계가 만약 모든 $x \in E$에 대하여 x와 주어진 관계에 있는 $y \in F$가 하나만 있다면, 그 관계를 y에서의 함수적 관계라고 한다. 우리는 이런 식으로 모든 $x \in$에 x와의 주어진 관계에 있는 $y \in F$를 관련시키는 연산에 함수라는 이름을 준다. 그리고 y를 원소 x에서의 함수 값이라고 하며, 주어진 함수적 관계에 의하여 함수가 결정되었다고 한다. 함수 관계가 같으면 그 함수는 같다'(Kleiner, 1989, p.299).

4. 함수 개념의 인식론적 장애

앞에서 고찰한 함수 개념의 역사에 따르면, 함수 관념이 이미 그리이스 시대부터 존재했으나 함수 개념이 수학에서 본격적으로 논의되고 그 용어가 도입된 것은 Leibniz가 '함수'라는 용어를, Bernoulli가 함수에 대한 형식적 정의를 한 이후로 볼 수 있다.

Kleiner(1989)는 함수 개념이 B.C.2000년경에 암시적으로 나타났지만 18세기초까지 함수를 명백한 형태로 표기하지 않은 이유를 대수적인 사전 지식의 부족과 추상화될 만큼의 함수에 대한 예들이 없어서 함수의 추상적 개념이 정의되어야 하는 필요성에 대한 동기의 부족으로 들고 있다. 그는 1450년에서 1650년 동안 실수와 복소수를 포함하는 수 개념의 확장, 기호대수의 출현, 과학의 중심 문제로 운동의 연구, 그리고 대수와 기하의 결합에 관한 연구가 함수 개념의 출현에 기여했다고 주장한다. 이렇게 함수 개념이 명시적으로 나타나고, 오늘날 사용하고 있는 함수 개념이 나타나는데 오랜 시간이 걸렸고 또한 여러 가지 연구가 있고 난 후 명시적인 함수 개념이 나왔다는 것은 함수 개념이 발달하고 정교화 하는데 많은 장애가 있었음을 알 수 있다.

함수 개념의 역사적 발달에서 나타났던 인식론적 장애를 분석해보고자 한다. Eisenberg (1991)는 함수와 관련된 학습 장애로 학습 이론의 부족, 변수 이해의 부족, 비시각적 도입, 기호, 표상의 어려움을 들고 있다. 이러한 장애들 일부는 함수 개념 발달에서 찾아볼 수 있다. 함수 개념의 역사에서 나타나는 중요한 인식론적 장애를 다음과 같이 정리할 수 있다. 변화하는 세계에 대한 인식 부족, 수리 철학에 의한 장애, 수 개념에 관한 장애, 변수 개념의 부족, 함수 관계에 대한 장애, 정의 개념에 대한 장애, 표현에 관한 장애는 함수 개념과 관련된 장애로 볼 수 있다. 이러한 범주는 Kleiner가 언급한 실수와 복소수를 포함하는 수 개념의 확장은 수 개념에 관한 장애와, 기호대수의 출현은 부분적으로 변수와 함수의 관계에 대한 장애와, 과학의 중심 문제로 운동의 연구는 부분적으로 함수의 관계에 대한 장애와, 그리고 대수와 기하의 결합에 관한 연구는 부분적으로 함수의 관계에 대한 연구와 관련시켜 설명될 수 있을 것이다.

(1) 변화하는 세계에 대한 인식의 결여

함수 개념은 현실 세계의 변화와 종속성을 설명하기 위한 도구로서 발생된 개념이다. 그러나 함수 개념이 명시적으로 되기 위해서는 이러한 현실 세계의 변화와 종속성에 주목하여 그것이 학문적으로 연구 대상이 되기까지에는 오랜 시간이 걸렸다. 그리고 그 변화를 현상으로 보지 않고, 변화하는 대상에 대한 확인이 필요하였다.

(2) 수리철학에 의한 장애

고대 그리이스 시대에는 어떤 규칙적인 관계의 표를 만드는 기술을 과학에 속하는 것으로 보지 않았다. 그것은 실제적인 지식이었고, 공식화되지도 않았다. 그것은 도제식으로 전달되어 가는 것이었다. 그것은 고대에는 계산술이었다. 실제로 셈에 관한 테크닉인 계산술은 수의 본질이나 성질 등을 다루는 수준과는 다른 지식 영역에 속해 있었다(김용운외, 1988, p.59) 그러나 수학자들이 경멸했던 실제 계산에서 함수 개념이 생겨나게 되었다(Sierpinska, 1992, p.31). 여기에서 함수 개념의 두 가지 인식론적 장애가 확인된다. 즉, 수리 철학적 입장에서 수학은 실제 문제를 다루는 학문이 아니라는 것과 수적 관계의 표를 만들기 위해서 사용된 계산 기술은 수학의 연구 대상이 되지 않는다는 것이다.

(3) 수 개념에 관한 장애

그리이스의 수 개념으로는 변량 사이의 모든 비라든가 관계는 범 자연수의 비에 의해서 모두 표현될 수 없으며, 선분사이의 비 관계, 넓이 사이의 비 관계, 부피 사이의 비 관계로는 측정에 필요한 것들을 만족시키지 못한다. 비를 등질적인 양의 비로 제한한다면, 시간에 대한 거리의 비라든가 선분에 직사각형을 더하는 것은 아무 의미가 없는 것이었다. 이것은 변화하는 현상을 기술하는 데 장애가 된다. (Sierpinska, 1992, pp.38-39). 이러한 수 개념은 오랫동안 지속되었다. 수 개념을 통합시킬 수 있었던 요인으로는 Stevin의 소수 개념 연구와 대수 분야의 발달과 기호 표현에 있었고, 이로 인해 수개념의 종합이 되었다.

그러나 수학자와 교육자들은 이러한 행동은 함수 개념에 대해 장애를 일으킬 수 있다고 지적하고 있다. 수에 대한 피타고라스 학파의 철학과 같이 모든 것은 수라고 생각하는 것을 말한다(Sierpinska, 1992, p.41). Herscovics(1982, p.80; Sierpinska, 1992, p.42 재인용)에 의하면, 시간이나 속도, 위치를 표시하는 물리적 개념을 표현하는 변수와 수적 변수(numerical variable)를 구별하는 것은 함수 개념의 이해를 위해서 필요한 조건이다. 수와 양은 혼돈 되어서는 안된다. 양은 수와 그 양의 대상(예를 들면, 물리적인 점, 낙하 물체등)을 말한다. 추상적인 수와 어떤 것의 양은 서로 다른 개념이다. 그리고 그것을 구별할 수 있다는 것은 추상적인 수의 통합된 개념만큼 중요하다. 추상적인 수는 양의 비가 될 수 있고, 두 양은 수를 정의하기 위해 필요하다(Sierpinska, 1992, p.42)

중세 후반에 수학에서의 연구와 물리학에서의 연구가 서로의 발달을 도와주었다. 수와 물리적 양을 구별하는 것과 물리 법칙과 수학적 함수를 구별하는 것은 별개의 것이다. 물리적인 양들 사이의 관계를 모델링하거나 수학화하기 위한 적당한 도구로서 함수를 인식하는 것은 함수 개념의 이해를 위해서 필수조건이다. 그러나 앞에서 살펴본 수와 양을 구별하는 가운데에서 물리학에서의 법칙과 수학에서 함수는 공통점이 없는, 서로 다른 영역에 속하는 것으로 보는 인식론적 장애가 생길 수 있다 (Sierpinska, 1992, p.42).

(4) 변수 개념의 부족에 의한 장애

독립 변수와 종속 변수의 구별 및 비대칭성, 미지수와 변수의 구별이 여기에 속한다. 대수학과 기하학이 합쳐지기 위한 중심요소는 변수의 도입과 방정식에 의해 변수들 사이의 관계를 표현하는 것이다. 변수들 사이의 관계를 표현하기 위해서 많은 곡선의 예가 제공되었

으며, 이것은 함수 개념이 명시적으로 나타나는데 중요한 역할을 하였다. 그러나 여기서 결여된 것은 방정식에 독립 변수와 종속변수의 구별이었다.

독립 변수와 종속 변수의 구별은 Descartes에 의한 것이라고는 하지만 그의 저서 'Geometrie'에서 좌표의 역할은 대칭적이었다. 여기에서 변수는 순서와는 무관하다는 장애가 발견된다. Euler에 의해서 미지수와 변수의 차이가 구별된 것으로 보아서, 그 이전에는 미지수와 변수의 차이를 인식하지 못하고 사용하였다고 볼 수 있다.

(5) 함수의 관계에 대한 장애

여기에서는 함수 개념에서 관계와 그 관계를 표현하는 방법에 대한 장애에 대해 논하게 된다. 함수 개념에서 변수 사이의 관계에 대한 생각은 오랫동안 비례관계였다. 비례론은 유클리드 원론 제 5권의 주제로서, 그 내용이 치밀하고 완전해서 17세기까지 수학에서 지배적인 영역이 되기도 했다. 여기에서 함수 개념의 인식론적 장애가 확인된다. 즉, 비례관계는 함수의 관계에서 지배적인 관계이다. 이러한 장애를 극복하려는 노력이 Oresme, Bradwardine등에 의해서 이루어졌다.

비례 관계 이후 함수의 관계를 표현하는 방법은 함수 개념 발달에 있어서 큰 패러다임을 형성하고 있다. 앞에서 살펴본 바와 같이 기하학적 방법, 대수적 방법, 대응에 의한 논리적 방법이 그것이다. 기하학적 방법에서 대수적 방법으로 변화하는 데는 문자 개념의 결여에 있다고 할 수 있다.

대수적 방법은 수학에 있어서 방법론적 도구로서 중요하여 특히 함수 관계를 표현하는데 필수적이다. 이것이 부족하면 학생들은 $y=f(x)$, $y=f(x+1)$, $f(x)=f(-x)$, $y=2x+1$등의 의미를 알 수 없다. 그러나 대수적 방법으로 거의 모든 문제가 풀린다는 믿음으로 대수적 기술을 사용하는 것은 함수 개념을 이해하는 데 오히려 장애가 될 수 있다. 이러한 장애를 벗어나는 과정을 거친 후에야 논리적 개념인 대응으로의 함수 개념으로 갈 수가 있었다. 여기에서 함수 개념의 인식론적 장애가 확인된다. 하나는 수학적 방법에 관한 것이고, 다른 하나는 함수 개념에 관한 것이다. 다시 말하면, 대수적 식에 대한 형식적 조작의 힘을 강하게 믿는 것이고, 해석적 식으로 표현된 관계만이 함수라는 이름을 붙일 자격이 있다는 생각이다(Sierpinska, 1992, p.46). 그리고 해석적 식에 의한 함수 개념은 'article of faith'을 갖게 하는 데, 이러한 신념도 함수 개념의 장애가 될 수 있다.

(6) 함수 표현에 관한 장애

함수를 함수표로 생각하는 데서 나올 수 있는 장애로서 함수를 수열로 생각하는 것을 볼 수 있다. 그리고 함수의 그래프는 함수적 관계의 기하학적 모델이다. 정의 구역에도 포함되지 않는 x표에 의한 점 (x, y)도 그래프에 포함될 수 있고 생각하는 장애를 가질 수 있다.

(7) 정의 개념에 대한 장애

해석적으로 표현된 함수 개념에서 논리적인 함수 개념으로 함수 개념이 확장되기 위해서는 앞에서 살펴본 바와 같이 대수의 역할에 대한 강한 믿음을 극복하는 것이었다. 그러나 그 이외의 것이 필요하다. Dirichlet는 대응에 의한 논리적 개념의 함수 정의를 얻었다. 그러나 Dirichlet의 함수 개념으로 인하여 매우 생소한 함수들이 포함되었다. 그러한 함수들은 문

자 그대로 정의로부터 얻어진 결과이다. 이러한 예를 함수의 예로 받아들이기 위해서는 수학에서 정의의 역할을 보는 성숙함이 있어야 한다. 이것은 대수적 함수 개념에서는 그다지 필요로 하지 않았던 개념이었다. 여기에서 정의에 대한 인식론적 장애가 생기는데, 정의는 감각이나 통찰에 의해 알았던 대상을 기술하는 것이 아니다. 정의가 대상을 결정하는 것이 아니고, 대상이 정의를 결정한다는 인식론적 장애가 생길 수 있다(Sierpinska, 1992, p.47).

이상과 같은 함수 개념의 인식론적 장애는 실제로 학생들에게서 찾아볼 수 있다. 변수 개념 부족에 의한 장애로는, 김남희(1997, p.55)에 의하면 학생들은 독립 변수, 종속 변수 개념을 불완전하게 이해하고 있다는 실험 결과를 얻었다. 그리고 학생들은 함수 관계로 비례 관계 혹은 선형 관계를 갖고 있음이 확인되었다(조한숙, 1991, p.59). 학생들은 함수는 하나의 규칙으로 표현되어야 한다는 함수 개념 이미지를 갖고 있다(Vinner, 1992). 그리고 함수를 함수표로만 생각하는 개념 이미지를 가지고 있음도 확인되었고(조한숙, 1991, p.59), 개념 정의에 의한 장애는 함수 개념 정의와 개념 이미지의 구획화 현상으로 설명할 수 있다. 학생들은 올바른 개념 정의를 가지고 있음에도 불구하고 개념 이미지만을 사용해서 문제를 해결하는 경우를 볼 수 있다(Vinner, 1992).

5. 결론

본 연구는 함수 개념의 역사를 살펴봄으로써 학생들이 함수 개념에 대해서 어려워하고 혹은 오류를 범하는 원인을 찾고자 하는 것이었다. 이러한 분석의 기본 가정은 Hackel의 재현의 원리를 바탕으로 한 역사 발생적 원리에 의한 것이었다.

함수 개념의 역사적 발달을 암묵적인 함수 개념 단계, 수표로서의 함수, 비례 관계로서 함수, 일반화된 비례 관계로서 함수, 기하학적 함수, 대수적 함수, 대응으로서 함수, 관계로서 함수로 나누어 살펴보았다. 그리고 이러한 고찰을 바탕으로 인식론적 장애를 변화하는 세계에 대한 인식의 결여, 수리철학에 의한 장애, 수 개념에 의한 장애, 변수 개념 부족에 의한 장애, 함수의 관계에 의한 장애, 함수 표현에 의한 장애, 정의 개념에 의한 장애로 나누어 살펴보았다. 이러한 장애는 학생들에게서 나타나는데, 함수 개념 정의와 개념 이미지로 확인할 수도 있다.

그러나 장애는 Brousseau가 지적하였듯이, 인식론적, 개체 발생적, 교수학적 근원을 가질 수도 있다. 예를 들어, Malik(1980)는 미적분이나 그 이전 단계에서는 함수를 변수 사이의 관계를 공식이나 식으로 나타내는 것으로 정의하고, 해석학에서는 실수 사이의 대응 법칙으로 정의하는 것이 타당하며, 위상수학에 적합한 함수는 정의구역과 치역이 도입된 집합론·이론적으로 정의되어야 한다고 주장하고 있다. 이러한 관점에서 볼 때, 함수 개념이 학생들의 인지 구조에 동화나 조절이 되기에는 너무 인지적 간격이 큰 정의가 도입되지 않는지를 검토해보는 것이 필요하다고 할 수 있다. 이것은 장애의 교수학적 근원이 될 수 있을 것이다. 따라서 함수 개념의 장애를 개체 발생적, 교수학적 근원에 따라 분석해보는 것은 필요하다고 할 수 있으며 이것은 이후의 연구 과제가 될 것이다.

참고문헌

김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김용운, 김용국 (1988). 수학사. 대전: 우성 문화사.

박교식 (1992). 함수 개념 지도의 교수 현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

조한숙 (1991). 함수개념 형성에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

Bachelard, G. (1970). *La philosophie du Nom.* Presses Universitaires de France. 김용선 (역) (1991). 부정의 철학. 인간사랑.

Boyer, C. B. (1968). *History of mathematics.* J Wiley & Sons, Inc.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Cha, I. (1999). *Prospective secondary mathematics teachers' concepts of function: Mathematical and pedagogical understanding.* Unpublished Doctoral Dissertation. University of Michigan.

Cornu, B. (1991). Limit. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.153-166). Kluwer Academic Publisher.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.140-152). Kluwer Academic Publisher.

Eves, H.(1953). *Introduction to the history of mathematics.* 이우영, 신항균(공역) (1995). 수학사. 경문사.

Foucault, M. (1972). *The archaeology of knowledge.* Tavistock. 이정우 (역) (1992). 지식의 고고학. 민음사.

Freudental, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel Publishing Company.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of schooZl algebra. In D. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.390-419). Macmillan Publishing Company.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20, 282-300.

Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 11, 489-492.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmatics in the development of algebra; Historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz et al. (Eds.), *Approach to Algebra*(pp.39-53). Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Duvinsky & G. Harel(Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp.25-58). Notes and Reports Series of The Mathematical Association of America.

__________(1994). *Understanding in mathematics.* The Falmer Press.

Tall, D.(1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Kluwer Academic Publisher.

Vinner, S.(1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In E. Duvinsky & G. Harel(Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp.198-214). Notes and Reports Series of The Mathematical Association of America.

Historical Development and Epistemological Obstacles on the Function Concepts

Lee, Chong Hee

In this study, we tried to make histo-genetic analyses necessary to identify epistemological obstacles on the function concepts. Historical development on the function concept was analysed. From these analyses, we obtain epistemological obstacles as follows: the perception of changes in the surrounding world, mathematical philosophy, number concepts, variable concepts, relationships between independent variables and dependent variables, concepts of definitions.