大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 9 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.1, 217-228. July 1999

미적분학의 기본정리에 대한 역사-발생적 고찰

한 대 희*

1. 서 론

미적분학의 기본정리는 명칭에서 알 수 있듯이, 미적분학에서 가장 '기본'이 되는 정리이다. 다시 말해 이 정리를 이해하지 못하고 있다면 미적분학의 '기본'도 모르고 있다는 뜻이 된다. 그러나 이 정리는 단순한 것이 아니어서, 이 정리가 의미 있게 지도되고 있는가에 대해서는 의문의 여지가 있다. 미적분학의 기본정리의 지도와 관련하여 Courant는 다음과 같이 언급한 바 있다(Courant p.438).

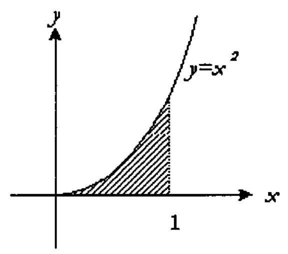
> 많은 저자들은 미분법을 먼저 소개하고 난 뒤, 단순하게 "부정적분"을 미분의 역으로 정의한다. 즉, $G'(x) = f(x)$ 인 경우 $G(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 한다. 그러므로, 이 과정에서 미분법이 "적분"이라는 말과 즉각적으로 관련을 맺게 된다. 그 이후에, 새롭게 정의되는 "적분"은 앞의 "적분"과는 전혀 다른 의미를 가진다는 것이 강조되지 않은 채로, "정적분"이 넓이 혹은 합의 극한이라고 소개된다. 이러한 방식에서는 이 정리의 주요한 사실이 감추어지며, 학생의 참다운 이해가 방해를 받게 된다.

우리 나라 고등학교에서 미적분학의 기본정리는 '미분과 적분과의 관계'와 '정적분의 기본정리'라는 이름으로 지도되고 있으며(금종해 외 2인, 1996, pp.181-183), 교육 과정에서 정적분 단원은 주로 미적분학의 기본정리를 '이해'하고 '활용'하는 것으로 구성되어 있다(교육부, 1997, p.111).

미적분학의 기본정리가 실제로 어떻게 지도되고 있는지를 알아보기 위해 다음의 대화를 살펴보자.[1)]

교사 : 적분이란 무엇인가요?
학생1 : 넓이를 구하는 것입니다.
교사 : 달리 설명할 수는 없을까요?
학생2 : 음, ... , 미분의 역과정이라고 할 수 있습니다.
교사 : 둘 중에서 어느 것이 적분입니까?
학생1, 2 : ...
교사 : 그럼 다음 문제를 풀어 봅시다.

<문제>
다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 구하여라.



* 서울대학교 대학원
1) 다음 대화는 연구자와 두 명의 대학 신입생들과의 대화이다.

학생들의 풀이 :

$$\int_0^1 x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

교사 : 잘 풀었군요. 여기서 $\frac{1}{3}x^3$을 x^2의 무엇이라고 합니까?

학생 : 부정적분이라고 합니다.

교사 : 그럼, 여러분은 넓이를 구하기 위해 부정적분을 사용했군요?

학생 : 예.

교사 : 그럼, 넓이를 왜 이런 식으로, 즉 넓이와 전혀 관련이 없는 부정적분을 이용해서 구하지요?

학생1 : 정말, 왜 넓이를 이렇게 구하지?

학생2 : 공식이니까요.

교사 : 이 공식이 어떻게 해서 성립되는 지를 설명할 수 있나요?

학생1, 2 : ...

위의 대화로부터 현재 고등학교에서 미적분학의 기본정리가 어떻게 지도되고 있는가에 대한 한 측면을 확인할 수 있다. 즉, 미적분학의 기본정리의 결과로 얻어진 공식을 이용해서 넓이를 구하는 문제를 잘 해결할 수 있지만, 그 방법의 이유나 의미를 파악하고 있지 못하고 있음을 알 수 있다.

미적분학의 기본정리의 지도의 목적은 그 정리의 결과를 활용하는 것만이 아니다. '정리를 이용한 계산'에 능숙하기 이전에 이 정리를 '의미 있게 이해'해야 한다. 그러나 '의미 있게 이해한다'는 것은 무엇을 뜻하는가? 본 고에서는 이 정리의 '의미 있는 이해'가 어떤 것인가를 역사를 통해 살펴보고자 한다.

2. 미적분학의 기본정리와 Toeplitz의 연구

이 절에서는 미적분학의 기본정리의 역사 발생 과정에 관한 선행 연구를 간단히 살펴본다.

(1) 미적분학의 기본정리

일반적으로 다음의 두 정리를 미적분학의 기본정리라고 한다(정동명 · 조승제 pp.301-302).

정리 1. 함수 $f : [a, b] \to R$ 가 $[a, b]$ 위에서 연속일 때, 함수 $F : [a, b] \to R$을

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

로 정의하면, $F(x)$는 $[a, b]$위에서 미분 가능하고 $F' = f$ 이다.

정리 2. 함수 $f : [a, b] \to R$ 가 $[a, b]$ 위에서 적분가능하고, 적당한 함수$F : [a, b] \to R$가 존재하여 미분가능하고 $F' = f$ 이면, 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

정리 1은 리만합의 극한으로 정의된 (정)적분과 미분이 역연산의 관계에 있음을 보여 준다. 즉, 이 정리는 겉으로는 아무런 관련이 없을 것 같은 넓이를 구하는 방법과 접선의 기울기를 구하는 방법을 연결시켜 주고 있다.

정리 2는 (정)적분, 즉 넓이를 구하는 방법을 제공해 주는 정리이다. 이 정리는 넓이를 구하기 위해 부분합을 계산하고 그 극한을 구하는 복잡한 과정(구분구적법)을 거치지 않고, 미분법의 공식을 역으로 적용(부정적분)하기만 하면 된다는 것을 보여준다.[2)]

이 두 정리가 어떤 의미에서 미적분학의 기본이 되는가하는 것은 다음과 같이 설명할 수 있다. 이 정리를 통해, 서로 독립적인 문제

와 해결 방식을 가진 분야인 미분학과 적분학이 하나의 체계적인 분야로 통합될 수 있기 때문이다. 즉, 접선, 법선, 최대값, 최소값 등을 구하는 이론과 넓이, 부피, 호의 길이 등을 구하는 이론을 통일성 있게 묶어주는 정리가 바로 미적분학의 기본정리이다. 이는 뺄셈과 나눗셈이 덧셈과 곱셈의 역연산인 것과 마찬가지로 적분이 미분의 역연산임을 통해서 가능해진다.(정리1) 또한 미적분학의 기본정리는 이러한 이론적인 아름다움뿐만 아니라 넓이나, 부피 계산 등을 미분법의 공식을 이용하여 실제적으로 간편하게 구할 수 있게 해주는 실용적인 의의를 가짐으로 해서, 미적분학의 발달뿐만 아니라 근대의 자연과학의 발전에 지대한 영향을 미치게 되었기 때문이다.(정리2)(Eves, 1995, p.304, p.310)

(2) Toeplitz의 발생적 미적분학

Toeplitz는 역사 발생적 원리에 따른 무한소 계산(미적분학)의 지도 과정을 구상하여 미완성작인, 'Calculus- A Genetic Approach'를 저술하였다. 그는 이 책의 서문에서 다음과 같이 저작 의도를 밝히고 있다.

> 오늘날 우리가 규범적인 필수 내용으로 간주하는 미적분학의 기본 내용, 즉 평균값의 정리, 테일러 급수, 정적분, 미분계수 등에 관하여, '왜 그렇게 하는가?'라든가 '어떻게 하여 그렇게 되었는가?'와 같은 질문은 결코 제기되지 않는다. 그러나 이 모든 것은 한때 절실한 탐구의 목표였으며, 창조되던 당시에는 불타는 질문에 대한 해답이었음에 틀림없다. 만일 우리가 이들 아이디어의 근원으로 돌아간다면 틀에 박힌 무미 건조한 사실의 활기 없는 외모는 살아지고 대신에 싱싱하고 힘찬 생명이 다시 되살아날 것이다.(Toeplitz, p.v)

이와 같이, 개념, 정의, 정리 등의 기원을 보여주고자 의도된 저술된 'Calculus- A Genetic Approach'에서, 미적분학의 기본정리는 대략 다음의 4단계로 나누어 발전된 것으로 설명되고 있다.[3]

1단계 : 귀납적인 발견의 과정
2단계 : Galileo의 낙하의 법칙과 미적분학의 기본정리의 아이디어
3단계 : 일반적인 관계의 발견과 Barrow의 증명
4단계 : Newton과 Barrow의 미적분학의 기본정리

Toeplitz는 미적분학의 기본정리가 어떻게 발견되게 되었는가에 대한 중요한 실마리를 제공하고 있다. 즉, 미적분학의 기본정리는 어떤 한사람에 의해 갑작스럽게 발견된 것이 아니라, 넓이를 구하는 문제에서부터 점진적으로 인식되었으며 역학의 연구에서 발견의 단서를 얻게 되었다는 점이다.

그러나, 그는 연구에서 몇 가지 한계가 있다. 즉, 3단계의 증명을 Barrow의 증명을 그대로 싣지 않고 현대적인 증명으로 대치하고 있다는 점과 Newton이 사용한 방법을 자세히 소개하고 있지 않다는 점 그리고 Newton 이후에 현대적인 미적분학으로 이행하는 과정이 소개되어 있지 않다는 점 등이 그것이다.

Barrow의 증명과 교과서에 제시되고 있는 증명의 차이는 당시의 미적분학의 기본정리의 아이디어나 그것을 이해하는 태도가 오늘날과

---

2) 고등학교 과정에서는 정리1을 '미분과 적분의 관계', 정리2를 '정적분의 기본정리'로 소개하고 있다. 정리1은 연속함수의 성질(특히, 최대, 최소의 정리)를 이용해서 증명되고 있으며, 정리2는 정리1에 의해 유도된다.
3) Toeolitz는 이와 같은 구분을 분명하게 표현하고 있지는 않다.

어떻게 다른가를 보여 줄 수 있을 것이다. 또한 Newton과 Barrow의 구적법의 차이는 미적분학의 창시자로서의 지위를 Newton에게 부여하는 근거가 될 만큼 중요한 의미를 가진다. 마지막으로, 미적분학 기초의 엄밀성의 문제와 관련하여 적분 개념이 확립되는 과정에서 미적분학의 기본정리가 어떻게 발전해 왔는가 하는 문제는 현재 고등학교 과정에서 지도되고 있는 내용이 어떤 과정을 통해 형성되었는지를 밝히는 단서를 제공해 줄 것이다.

그러므로 Toeplitz의 연구를 기초로 하여 미적분학의 기본정리를, 귀납적인 발견의 과정, Galileo의 낙하의 법칙과 미적분의 기본정리의 아이디어, 일반적인 관계의 발견과 Barrow의 증명, Newton의 구적법, 해석학의 엄밀화와 미적분의 기본정리 등의 5단계로 나누어 아래에서 살펴보기로 한다.

3. 미적분학의 기본정리의 역사-발생 과정

(1) 귀납적인 발견의 단계

곡선으로 이루어진 도형의 넓이를 구하는 문제의 기원은 고대 그리스로 거슬러 올라가며, Archimedes는 '무한히 작은 사각형의 합'이라는 아이디어를 이용해 포물선 등의 넓이를 구해냈다.

르네쌍스 이후의 근대 유럽에서는 그리스의 방식을 계승하여 곡선의 넓이를 구하는 문제가 연구되었는데, 특히 해석 기하학이 출현한 이래로 대수식으로 표현된 곡선 아래의 넓이를 구하는 문제가 활발히 연구되었다. 이시기에 고등학교에서 '구분구적법'으로 소개되고 있는 방법과 유사한 근사적인 방식을 통해 다음과 같은 발견이 이루어졌다(Toeplitz, 1967, p.52, p.53, p.56).

Cavalierri는 0에서 x까지의 $y = x^n$ 아래의 넓이 S가,

$$S = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ (n = 1,2, \ \dots \ ,9)$$

라는 사실을 발견하게 된다.

Fermat는 이를 발전시켜 n이 -1이 아닌 임의의 유리수일 때에도 이 관계가 성립함을 증명한다.

Vincentio는 로그를 이용해서 n이 -1인 경우에도 이 관계가 성립함을 증명한다.

이 시기에는 이미 접선을 구하는 문제(미분법)와 그 역을 구하는 문제가 연구되고 있었으며, 이러한 사실들로부터 귀납적으로 넓이와 접선을 구하는 것 사이에 모종의 관계가 있음을 인식할 수 있는 토대가 만들어지고 있었다.

(2) Galileo의 낙하의 법칙과 미적분의 기본정리

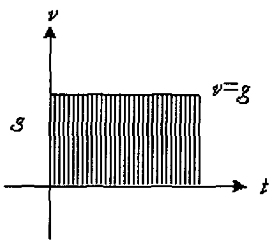
Toeplitz는 미적분학의 기본정리의 발견을 가능하게 했던 연구로 Galileo의 낙체에 관한 연구를 들고 있다(Toeplitz, 1967, pp.84-85). Galileo의 연구를 살펴보면서 이것이 미적분학의 기본정리와 어떤 관련을 맺고 있는가를 생각해 보자.

Galileo는 자유 낙하하는 물체의 낙하 거리 S가 $S = \frac{1}{2}gt^2$의 식을 만족한다는 사실을 발견했다고 한다. 그런데 당시에는 사진기는 물론이고 정확한 시계조차 없던 시절이었다. 따라서 이 정리는 떨어지는 물체의 시간에 따른 위치를 측정함으로써 발견할 수 있는 것이 아니었다. 그렇다면 Galileo는 이 식을 어떻게 발견하게 된 것일까?

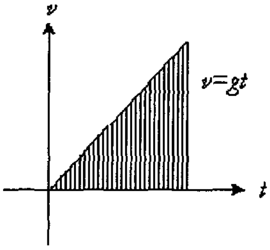
기록에 의하면 그는 떨어지는 물체의 위치를 직접 측정한 것이 아니라, 여러 가지 경사면에서 굴러 내려오는 물체의 위치를, 주기적으로 운동하는 진자를 이용해서 측정하는 실험을 했다고 한다. 그러나 이렇게 실험을 했다고 해서 낙하하는 물체가 정확히 시간의 제곱에 비례한다는 사실을 얻어낼 수는 없었을 것이다.

Toeplitz에 의하면 Galileo는 그의 법칙이 성립함을 실험하기 이전에 이미 이론적인 방법으로 추측할 수 있었다고 한다. 즉, 그의 실험은 그의 이론에 의한 가설이 성립함을 증명하기 위한 수단이었다는 것이다. 이것을 보다 자세히 살펴보자.

Galileo는 등속도 운동인 경우 그 물체가 움직인 거리가 직선 아래의 넓이임을 알고 있었다.(그림1) 그리고 그는 속도가 일정하게 증가하는 경우에 그 물체가 이동한 거리가 어떻게 되는 가를 생각했다.(그림2)



<그림 1>



<그림 2>

여기서 그는 등속도 운동의 결과에서 곡선 아래의 넓이가 바로 이동 거리가 될 것임을 가정했다. 즉, 그는 곡선 아래의 넓이가 무한히 얇은 직사각형의 합이며 그 직사각형 하나 하나가 각 순간에 이동한 거리임을 가정했다.

그리하여 그는 낙하하는 물체의 속도가 $v = gt$인 가정 아래에, 그 물체의 이동한 거리가 $s = \frac{1}{2}gt^2$가 됨을 추론했다. 즉, 넓이가 이동거리이므로 이동 거리는 $s = \frac{1}{2} \times t \times gt$ 가 된다.

그는 이러한 추론을 바탕으로 낙체에 관한 실험을 했고, 움직이는 물체의 시간에 따른 위치를 기록하는 실험이 아니라 예상되는 위치를 지정하고 실제의 운동이 각 시간에 예상되는 위치를 통과하는 지를 관찰함으로써 자신의 가설을 확인하게 된다.

미적분학의 기본정리와 관련해서 위의 논의를 분석하면, 한편으로는 $v = gt$ 아래의 넓이가 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 됨을 추론했다는 것과 다른 한편으로는 $s = \frac{1}{2}gt^2$의 속도가 $v = gt$ 임을 추론했다는 것에 주목할 수 있다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

이동 거리가 곡선 아래의 넓이이고, 거리의 변화율이 속도이며, 각 점에서의 속도가 바로 주어진 곡선이므로, 넓이의 변화율이 주어진 곡선이 된다.

Galileo의 낙체의 연구는 1) 낙하하는 물체가 등가속도 운동을 한다는 가정과 2) 무한소를 이용한, 속도 그래프 아래의 넓이가 이동거리라는 유추적 사고를 바탕으로, 3) 거리와 속도와의 관계로부터, 넓이의 변화율과 곡선 사이의 관련을 보여주고 있다. 즉 미적분의 기본정리의 아이디어가 드러나게 된 것이다. 그러나 그는 이 사실을 명확히 인식하지 못했고, Barrow에 이르러서야 이 사실에 대한 일반적인

인식과 함께 엄격한 증명이 이루어진다.

(3) 일반적인 관계의 발견과 Barrow의 증명

앞서 살펴 본대로 곡선 아래의 넓이를 구하는 문제에서 귀납적으로 넓이와 접선의 기울기를 구하는 문제 사이의 관계가 추측되기 시작했으며, Galileo의 낙체의 운동의 연구에서 미적분학의 기본정리의 기본적인 아이디어가 숨겨져 있었다. 이러한 배경에서 Barrow는 넓이와 접선 사이의 관계를 명확히 인식하고 이를 최초로 증명하게 된다. 물론 그가 어떤 사고 과정을 거쳐 이 정리의 증명을 하게 되었는가는 정확히 알 수는 없다. 그러나 그의 Geometrical Lectures의 초기 부분에서 그는 곡선을 점의 운동으로 설명하고 있으며, 각 점에서 접선의 기울기가 그 점에서의 속력이 됨을 증명하고 있다. 따라서 Galileo와 유사한 사고 과정을 거쳐 오늘날의 미적분학의 기본정리로 해석될 수 있는 정리를 증명한 것으로 추측할 수 있다(Katz, 1993, p.458).

그가 제시하는 정리는 다음과 같다.

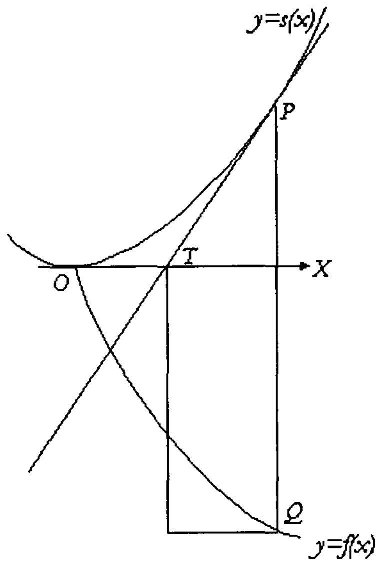
그림과 같이 한 곡선($f(x)$)이 주어지고, 그 곡선 위에 각 점까지 그 곡선 아래의 넓이를 나타내는 곡선($s(x)$)이 있다고 하자. 여기서 T를 $TX \times XQ = PX$가 되도록 잡으면 직선 TP는 접선이 된다(Flashman, 1996, pp.312-313).

이 정리를 해석하면, 다음과 같다.

접선의 기울기($S'(x)$)

$= \frac{PX}{TX} = \frac{TX \times XQ}{TX} = XQ\ (f(x))$

즉, 넓이의 변화율이 함수값이 된다는 것이



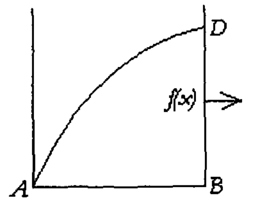
유도된다.[4)]

이와 같이 Barrow는 미적분학의 기본정리를 최초로 발견하고 증명을 했다. 그런데 일반적으로 미적분학의 발명의 영예를 Barrow보다는 Newton 혹은 Leibniz에 두고 있다. 그 이유는 Barrow가 이 정리를 기하학적으로 증명하는 것에 그친 반면에 그의 후계자들은 이를 새롭게 이용했기 때문이다.

(4) Newton의 구적법

Newton은 그 이전 세대의 연구 결과로부터 곡선 아래의 넓이가 작은 사각형(무한소 사각형)의 합이라는 아이디어를 가지고 있었다. 또한 그는 미적분학의 기본정리를 아주 당연한 것으로 받아 들였다(Katz, 1993, pp. 470). 즉 그림과 같이 그는 넓이의 변화율(fluxion)이 바로 y좌표의 길이(ordinate)라고 생각했다.

4) 제시된 정리에서 알 수 있듯이 이 정리는 기하학적으로 제시된 것이며, 이 정리의 증명 또한 기하학적으로 증명되고 있다. 즉 TP가 접선이라는 것을 보이기 위해 TP와 주어진 곡선이 다른 점에서 만나지 않는다는 것을 귀류법으로 증명하고 있다.



이것을 현대적인 기호로 표시하면, $\frac{dS(x)}{dx} = f(x)$가 된다. 따라서 그에게 있어서 넓이를 구하는 문제는 부정적분(fluent)을 구하는 문제로 귀결된다. 그는 대수식으로 주어진 다양한 곡선의 넓이를 나타내는 대수식의 표를[5] 만들었고 이를 통해 넓이와 관련된 문제를 해결했다.

예를 들어, 그는 곡선 $f(x) = ax^{\frac{m}{n}}$ 아래의 넓이가

$$S(x) = (\frac{n}{m+n})ax^{(\frac{m+n}{n})}$$

이 됨을 보였는데, 그의 방법은 이전 세대와는 완전히 다른 것이었다.

즉, 그는

$$S(x) = (\frac{n}{m+n})ax^{(\frac{m+n}{n})}$$

인 경우, 넓이를 나타내는 곡선이 $f(x) = ax^{\frac{m}{n}}$이 됨을 다음과 같이 증명했다.

먼저, 넓이를 무한소 사각형의 합으로 파악하는 것으로부터 넓이의 순간적인 증가량이 바로 하나의 작은 사각형이 된다는 것에서 다음과 같은 일반적인 식이 유도된다.

$s(x+o) = s(x) + of(x)$ (여기서 o는 아주 작은 증분을 의미한다.[6]

이 관계를 대수식으로 주어진 곡선에 적용하면,

$$(1)\quad S(x+o) = \frac{n}{m+n}a(x+o)^{\frac{(n+m)}{n}}$$

$$(2)\quad S(x) + of(x) = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} + of(x)$$

이제 (1)의 식에 이항 정리를 적용하여 전개한 후 (2)의 식과 같다고 놓은 후, 양변을 o로 나누면, $f(x) = ax^{\frac{m}{n}}$이 얻어진다(Boyer, 1959, p.191).

이와 같이, Newton은 대수식으로 주어진 곡선과 그 곡선 아래의 넓이를 나타내는 대수식 사이의 일반적인 관계를 이용해서 넓이를 구했다. Newton은 미분법의 역과정을 이용해서 넓이를 구한 최초의 사람이었다. 그의 구적법은 그 이전 세대의 사람들과는 확실히 다른 방식을 취하고 있다. 비록 미적분의 기본정리의 아이디어를 그 이전 세대의 사람들이 깨닫고 있었지만, 무한소나 무한 급수 등을 이용한 해석학 속에서 이 정리를 탐구한 사람은 Newton이었기에 미적분학의 발명의 영예는 Newton에게 돌아가게 되는 것이다(Boyer, 1968, p.434).

지금까지 살펴본 바, 넓이를 구하는 두 가지 방식이 있음을 알 수 있다. 그 하나는 Newton 이전 시대의 방법으로 무한히 작은 사각형의 합으로 근사해 가는 것이다. 또 다른 하나는 Newton에 의해 발견된 방식으로 대수식으로 주어진 곡선의 부정적분를 이용하는 방식이다. 전자가 문제 하나 하나의 개별적인 상황에 따라 다른 방식을 적용해야 하는 번거로움이 있는 반면, 후자는 일단 일반적인 관계가 대수식으로 주어지면 넓이를 기계적으로 구할 수 있게 된다. 더구나 이 방식은 넓이 문제에만 국한된 것이 아니라, 그 이전 시대에 개별

5) *오늘날의 의미에서 부정적분표*
6) 이 식은 오늘날의 미분법의 정의로 볼 수 있다. 즉, 부정적분을 구하는 방법이 적용되고 있다.

적으로 받아들여지던 많은 문제를 통일성 있게 구하는 방식이기도 했다. 따라서 17세기 이후 후자의 연구가 활발해지고 18세기에 이르러서는 적분을 미분의 역과정으로 정의하게 된다.

그렇다면 왜 현대에 와서는 적분을 미분의 역과정으로서가 아니라 그 이전 시대의 근사적인 구적법을 사용해서 정의하고 있는가? 이 문제는 현대의 미적분학의 기본정리와 그 증명을 이해하는 데 중요한 역할을 하며, 18세기 이후의 미적분학의 발전과 미적분학의 기초의 엄밀성과 관련이 있다. 이를 다음 절에서 살펴보도록 한다.

(5) 미적분의 기초의 엄밀화와 미적분의 기본정리

18세기에 이르러 미적분학은 한편으로는 외형적인 성장을 거듭하지만, 다른 한편으로 심각한 도전을 받게 된다. 즉, Newton이나 그 이전 사람들이 생각했던 무한히 작은 값이나 무한히 합하는 과정에 대한 심각한 반성을 하게 되었다. 그 과정에서 Lacroix는 적분을 무한과 직접적인 연관성이 없는 미분의 역과정으로 정의했고, 이는 Cauchy에 이르기 전까지 적분의 일반적인 정의로 받아들여졌다(Katz, 1993, p.647).

19세기에 이르러 미적분학의 영역이 확대되고, 특히 Fourier는 그의 독창적인 연구에서 불연속 함수의 적분을 이용했는데, 그는 Newton 이전의 무한합으로서의 적분 개념을 이용해서 이들을 계산했다. 그의 연구에 자극을 받아 불연속 함수를 적분 하는 문제가 심각하게 대두되었으며, 더 이상 부정적분의 개념만으로 적분을 설명할 수 없게 되었다(Klein, 1972, p.956-958). 게다가 Cauchy는 모든 함수에 부정적분이 존재하는 것이 아니라는 사실을 발견하게 된다. 이러한 이유들로부터 한 때 간과되었던 무한합으로의 구적법이 부활하게 되었다. 그리하여 Cauchy의 극한을 기초로 한 미적분학의 체계 속에서 적분은 정적분이라는 이름으로 부분합의 극한으로 정의되게 되며 오늘날과 같은 해석학적인 증명이 등장하게 된다(Katz, 1993, p. 648).

이러한 역사적 배경을 통해 미적분학의 기본정리를 다시 생각해 보면, 이 정리는 연속함수인 경우 극한에 의해 정의된 정적분이 그 함수의 부정적분과 일치한다는 것을 의미한다. 그러나 불연속 함수의 경우 그 정리가 만족되지 않는 예가 등장할 수 있다(Bartle · Sherbert, 1992, p.254). 따라서 미적분학의 기본정리에서 '연속성'은 핵심적인 조건이 된다.

고등학교 과정에서는 적분 가능성이나 불연속 함수에 대한 적분을 다루지 않는다. 그러나 위와 같은 배경에서 정적분과 부정적분의 개념분화가 일어나게 되었으며, 미적분학의 기본정리가 이들의 정의를 바탕으로 전개된다. 또한 함수의 연속성이 증명에서 핵심적인 역할을 하게 된다.

4. 미적분학 기본정리의 역사의 교육적 함의

지금까지 미적분학의 기본정리가 발견 되어온 과정과 변천 과정 대해서 살펴보았다. 이것을 바탕으로 미적분학의 기본정리가 의미 있게 지도되는 것이 어떤 것인지에 대하여 고찰하고자 한다.

미적분학의 기본정리를 이해한다는 것을 다음의 여러 가지 형태로 구체화하여 표현될 수 있을 것이다.

1) 미적분학의 기본 정리를 이용하여 정적

분(넓이)을 구할 수 있다.

2) 정적분과 부정적분의 개념을 구분해서 이해하고 그 관계를 진술할 수 있다.

3) 미적분학의 기본정리를 증명할 수 있다.

4) 미적분학의 기본정리 대한 어떤 상(이미지)을 가진다. (직관적 이해)

5) 미적분학의 기본정리의 이론적 가치를 이해한다.

6) 미적분학의 기본정리의 유용성을 이해한다.

7) 미적분학의 기본정리의 발견과정을 경험한다.

1)에서 4)까지는 전통적인 수업에서 시도되고 있는 것이라 할 수 있을 것이며, 5)와 6)은 태도와 관련이 있다. 그리고 마지막으로 7)은 수학을 완성된 지식으로 가르칠 것이 아니라 만들어지는 과정으로 지도해야 한다는 생각을 바탕으로 하고 있다. 이 장에서는 미적분학의 기본 정리의 발견 과정을 경험하는 것, 미적분학의 기본정리에 대한 태도, 마지막으로 이 정리를 직관적인 상을 가지는 것과 관련하여 앞서 논의된 미적분학의 기본정리의 교육적인 함의를 분석해 보고자 한다.

(1) 발견 과정의 교육적 시사점

미적분학의 기본정리의 역사는 그 정리가 발견되는 논리가 있다는 점을 보여준다. 이것은 위에 제시된 7)을 구현하는데 중요한 단서를 제공한다.

미적분학의 기본정리가 발견되는 과정은 크게 귀납적으로 인식되는 과정과 역학의 문제를 통해 기본적인 아이디어가 드러나는 과정으로 나누어 볼 수 있으며 이들은 다음 4가지의 중요한 교육적인 시사점을 보여주고 있다.

귀납적 유추 과정의 도입

현재 고등학교 과정에서의 지도 계열은 미분법, 부정적분, 구분구적법, 정적분, 정적분의 응용으로서의 넓이, 부피, 거리등의 순서로 구성되어 있다. 구분구적법의 지도에서 Newton 이전의 넓이를 구하는 방식이 소개되고 있는데, 이때 역사에서 발견되는 귀납적인 유추의 과정이 충분히 소개되어야 할 것이다.

역학 문제의 위치

미적분학의 기본정리의 발견의 가장 결정적인 단서는 역학 문제와 관련이 있다. 넓이와 접선의 기울기의 관련성은 쉽게 이해되기 어려운 것이지만, 곡선을 점의 운동으로 그리고 넓이를 이동 거리로 파악하는 상황에서는 넓이의 변화율이 쉽게 각 점에서의 속도가 됨을 파악할 수 있다. 따라서 역학과 관련된 문제는 미적분의 기본정리를 다 익힌 후의 응용문제로서가 아니라 이 정리를 발견하는 과정상의 문제로 인식되어야 한다.

동적 상황 (함수적 사고)

미적분학의 기본정리의 발견뿐만 아니라 그 증명에 있어서도 동적 상황은 중요한 구실을 한다. 특히 넓이를 고정된 것으로 파악하지 않고 변화하는 것으로 파악할 때 넓이의 변화율이 의미 있게 이해될 수 있다. 함수를 고정된 식이나 대응관계로 파악하는 관점에서 넓이를 나타내는 함수의 변화를 따지는 것은 어려운 일이다. 그러므로 이 정리가 의미 있게 지도되기 위해서는 함수의 지도에서 이미 함수적인 사고가 길러져야 한다.

발견적 사고로서의 무한소

미적분학의 기본정리를 발견하는 과정에서 또 다른 중요한 아이디어는 '아주 작은 값'

'순간적인 변화'와 같은 개념이다. 이들은 미적분학의 역사에서 논리적으로 불완전한 개념이라는 이유에서 모두 극한으로 대체된다. 그러나 위의 역사에서 살펴보았듯이, 미적분의 기본정리를 발견은 이러한 무한소의 개념을 바탕으로 이루어지고 있다. 학생들이 Newton처럼 미적분학의 기본정리를 당연한 것으로 파악하게 하는 이미지를 가지게 되는 것은 의미 있는 일일 것이다.

(2) 미적분학의 기본정리의 의의

태도와 관련된 5)와 6)의 경우는, 미적분학의 기본정리에 '기본'이라고 말이 들어간 이유와 관련지어 생각해 볼 수 있을 것이다.

미적분학의 이론적 가치

아무런 관련이 없어 보이는 넓이를 구하는 문제와 접선의 기울기를 구하는 문제가 독립적으로 주어져야 하며, 이후에 상이한 두 이론이 서로 관련됨을 파악할 수 있어야 한다. 더 나아가 그것이 덧셈에 대한 뺄셈의 관계와 유사한 역연산의 관계임을 이해해야 한다.

미적분학의 유용성

이러한 이론적인 아름다움이 유용한 역할을 할 수 있음이 보여져야 한다. 이것은 Newton과 Newton 이전의 구적법의 차이에서 이해될 수 있다. 인류의 역사에서 넓이를 구하는 문제는 아주 실제적인 문제였다는 것이 이해되어야 한다. 그 이후에 넓이를 구하는 두 가지 방식이 소개되어야 하며, 후자에 의해 넓이를 구하는 문제가 아주 단순한 문제가 됨을 이해해야 한다.

(3) 동적 이미지의 중요성

이 절에서는 미적분학의 기본정리를 직관적으로 이해하는 것에 대해 고찰해 본다. 미적분학의 기본정리를 미분법과 적분법 사이의 관련성이라고 할 때, 미분법은 접선을 구하는 것이며 적분법은 넓이를 구하는 것이므로 접선을 구하는 것과 넓이를 구하는 것이 서로 역의 관련이 있다는 것을 말하는 셈이 된다. 그러나 접선을 구하는 것과 넓이를 구하는 것 사이의 직관적인 관련을 파악하기란 쉽지 않다. 그러나 이미 살펴 본대로 뉴턴은 이 정리를 아주 당연한 것으로 받아 들였다. 그렇다면 그가 이 정리를 이해한 방식은 어떤 것인가?

이미 살펴 본대로 뉴턴의 아이디어의 핵심은 넓이를 나타내는 함수를 동적으로 파악하는 것과 그 변화 과정상의 무한소 변화에 대한 상을 가지고 있었다는 점이다. 발견의 과정과 관련하여 이미 언급했지만, 미적분학의 기본정리에 대한 직관적인 상을 가지는데 동적 상황과 함수적 사고, 무한소의 아이디어가 중요한 요소가 된다.

5. 요약 및 제언

지금까지 미적분학의 기본정리의 역사를 발생 과정에 주목하여 다섯 단계로 나누어 고찰해 보았다. 미적분학의 기본정리는 명확하게 인식되기 이전의 많은 연구에서 암시되고 있었는데 이것을 귀납적인 발견의 과정으로 표현할 수 있을 것이다. 또한 당시의 역학과 관련된 연구에서 보다 분명한 형태로 이 정리가 인식되게 되며, Barrow에 이르러서 최초의 수학적인 증명이 탄생하게 된다. 그러나 이 정리는 Newton에 이르러서야 그 진정한 가치를 발휘하게 되며, 미적분학이 엄밀화되는 과정에서 오늘날의 완성된 모습을 띄게 된다.

이러한 미적분학 기본정리의 발생과정은 이 정리의 지도와 관련하여 많은 시사점을 제공한다. 발생의 과정에 드러나 있듯이, 이 정리는 귀납적인 발견의 과정으로 재현할 수 있으며, 역학 문제와 관련하여 발견의 아이디어를 얻을 수도 있다. 역학 문제와 관련하여 동적 상황, 함수적 사고, 무한소의 아이디어가 발견의 핵심적인 요소가 되고 있다. 미적분학의 기본정리의 역사 발생 과정은 그 정리의 가치가 이론적인 아름다움과 실용성의 조화에 있음을 분명히 드러내고 있다. 이 정리의 지도는 이와 같은 가치를 명시적으로 드러낼 수 있어야 할 것이다. 그리고 Newton이 가졌던 것과 같은 동적인 이미지를 통해 직관적인 이해를 할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

참고문헌

금종해, 정순영, 박평순 (1996). 수학I. 서울: 한샘출판사.

정동명, 조승제 (1991). 실해석학 개론. 서울: 경문사.

Bartle, G., & Sherbert, R. (1992). *Introduction to Real Analysis.* J. Wiley, & Sons.

Boyer, B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* Dover Publications.

Boyer, B. (1968). *A history of mathematics.* J. Wiley & Sons.

Courant, R. (1960). *What is mathematics.* Oxford University Press.

Eves, H. (1995). *Great moment in mathematics.* 허민, 오혜영(공역). 수학의 위대한 순간들. 서울: 경문사.

Flashman, F. (1996). *Historical motivation for a calculus course : barrow's theorem,* Vita Mathematica. MAA.

Katz, J. (1993). *A history of mathematics.* Harper Collins College Publishers.

Klein, M. (1972). *Mathematical thought from ancient To modern times.* Oxford University Press.

Toeplitz, O. (1967). The calculus - A genetic approach. The University of Chicago press.

A study on a genetic history of the fundamental theorem of calculus

Han, Dae-Hee

The fundamental theorem of calculus is the most 'fundamental' content in teaching calculus. Since the aim of teaching the theorem goes beyond simple application of it, it is difficult to teach it meaningfully. Hence, for the meaningful teaching of the fundamental theorem of calculus, this article seeks to find the educational implication of the fundamental theorem of calculus through reviewing the genetic history of it.

A genetic history of the fundamental theorem of calculus can be divided into the following five phases:

1. The deductive discovery of the fundamental theorem of calculus
2. Galileo's Law of falling body and the idea of the fundamental theorem of calculus
3. The discovery of the fundamental theorem of calculus and Barrow's proof
4. Newton's mensuration
5. the development of calculus in 19th century and the fundamental theorem of calculus

The developmental phases of the fundamental theorem of calculus discussed above provides the three educational implications. First, we can rediscover this theorem through deductive methods and get the ideas of it in relation to kinetic problems. Second, the developmental phases of the fundamental theorem of calculus shows that the value of this theorem lies in the harmony of its theoretical beauty and practicality. Third, Newton's dynamic image of this theorem can be a typical way of understanding the theorem.

We have different aims of teaching the fundamental theorem of calculus, according to which the teaching methods can be adopted. But it is self-evident that the simple application of the theorem is just a part of teaching the fundamental theorem of calculus. Hence we must try to put the educational implications reviewed above into practice.