大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 9 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.1, 245-261. July 1999

학생들의 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구

류 희 찬* · 조 완 영**

Ⅰ. 서 론

문제해결과 더불어 수학적 사고의 핵심이자 본질적인 특징으로 간주되어 온 증명은 수학 특히 중등기하 교육의 핵심적인 위치를 차지해 왔다. 그러나 학생들의 증명 능력을 조사한 연구결과에 따르면 학생들이 증명의 필요성이나 증명의 의미를 이해하지 못하고, 증명쓰기 능력도 매우 낮은 것으로 나타났다 (Fischbein, 1982; 우정호, 1998 ; 류성림, 1999 ; Senk, 1985).

명제를 증명한 후에도 명제의 타당성을 경험적으로 조사해 볼 필요가 있다고 생각하거나 직관적으로 분명한 것으로 보이는 명제를 증명하는 이유를 모르는 것은 증명의 필요성이나 의미에 대한 이해가 부족한 때문이라 할 수 있다. Fischbein(1982)은 중학교 3학년과 고등학생에 대한 조사 연구에서 학생들의 14.5%만이 증명된 명제에 대한 경험적 검사의 필요성을 느끼지 않았다고 보고하고 있는 바, 이는 결국 14.5%의 학생들만이 증명의 의미를 정확히 이해하고 있다고 볼 수 있다. Fischbein은 이러한 원인을 학생들이 논리적인 방법보다는 경험적인 방법에 더 비중을 두고 있기 때문이라고 보고, 학생들의 직관과 일치하는 방법으로 형식적 증명을 제시할 필요가 있다고 주장한다. 실제로 어떤 명제가 왜 참인가라는 질문을 했을 때, 시각적으로 확인하고 경험적 증거를 제시하는 학생들이 많다. 또한 일상적인 행동에서 상황을 표현, 해석하고, 가정을 구성할 때 경험적 귀납을 이용하는 경우가 많으며, 상황의 일반성을 나타내는 예들이 많을수록 그 타당성을 보다 확신하게 된다. 이런 경우, 연역적이고 형식적으로 전개되는 증명으로 수학적 명제의 타당성을 절대적으로 보증하려는 전통적인 증명 방식은 시각적이고 경험적으로 확인하려는 학생들의 실제적인 사고 방법과 기본적으로 상충되며(우정호, 1998, pp. 335), 이것이 전통적인 증명 지도에서 나타나는 문제의 한 가지 원인이 된다.

전통적으로 증명은 엄밀성을 바탕으로 연역적이고 형식적으로 전개되어야 한다는 신념이 있었다. 플라톤과 유클리드 정신을 이어받아 절대주의 수리철학으로 이어지면서, 증명은 타당한 연역적 논증으로, 어떤 논증이 증명이 되는 필요충분조건은 첫째, 모든 전제가 참이고 둘째, 논증이 타당한 것이다(Cooney et al., 1975). 그러나 수학적 증명의 본질과 역할, 타당한 논증이 무엇이냐에 대해서는 다양한 시각이 존재한다. Hanna(1983, pp. 43-65)는 19세기 말에서 20세기초에 발견된 여러 가지 역리로 인한 수학적 기초에 대한 위기를 해결하기 위하여 등장한 논리주의, 형식주의, 직관주의 등

* 한국교원대
** 청주남성중

의 절대주의 수리철학과 이 보다 늦게 나타난 준경험주의 수리철학 사이의 수학의 본질과 증명의 타당성에 대한 준거의 차이를 분석하고 있다. 절대주의자들은 수학적 지식은 절대적으로 확실한 지식이며, 수학적 지식의 절대적 확실성을 보장하기 위해 엄밀하고 연역적으로 증명이 전개되어야 한다고 주장한다. 이러한 철학적 관점은 60년대 새수학 운동으로 이어져 형식적이고 연역적인 엄밀한 의미에서의 증명이 더욱 강조되었고 이것이 오늘날 기하교육 특히 중등 논증기하의 기초가 되고 있다. 그러나 이러한 절대주의 증명관은 준경험주의 수리철학의 비판을 받는다. 준경험주의는 수학은 절대적인 것이 아닌 준경험적인 과학이라는 인식 아래, 수학적 지식의 절대적 확실성을 보장하기 위한 증명의 역할보다는 재발명의 과정에서의 증명의 역할을 강조하고 있다. 또한 실제적인 사고를 바탕으로 하는 경험과학과 수학에서의 타당성에 대한 기준이 다르지만, 경험과학에서의 진리의 입증 방법을 증명지도 시 고려할 필요가 있다. 경험과학에서는 실험과 측정의 결과를 중시하고 수학에서는 연역적이고 형식적인 즉 이론적인 기준을 중시한다. 그러나 학생들은 경험과학적 정당화 즉, 실험과 측정 등 이론적이기보다 실제적인 판단을 선호하는 경향이 있다.

증명의 역할을 다양한 관점에서 이해하고자 하는 시도가 늘고 있다. Bell(1976)은 증명의 역할을 정당화, 설명, 체계화 세 가지로 구분하고 있으며, De Viller(1991)는 여기에 발견과 의사소통의 역할을 첨가하고 있다. 정당화는 명제의 진리여부에 관련되는 것으로 증명은 어떤 명제가 참임을 주장하기 위한 근거가 된다는 것이다. 설명은 명제가 왜 참인가를 보여주는 증명의 역할이며, 체계화의 역할이란 증명을 통해 여러 가지 결과들을 공리, 정의, 정리, 여기서 유도되는 다른 결과 등을 이루어지는 연역적인 체계로 조직화된다는 것을 의미한다. 이러한 증명의 다양한 역할을 받아들인다면, 지금까지의 연역적이고 형식적인 증명 방법 일변도에서 벗어날 필요가 있다.

증명을 지도할 때 다양한 학생들의 정당화에 대한 이해 방법이 반영되어야 한다. Cooney et al.(1975, pp. 295-296 ; 서동엽, 1999에서 재인용)은 확신을 얻는 방법으로 경험적인 확인, 권위자의 판단, 귀납, 타당한 연역적 논증 등 4가지를 제시하고 있다. 또한 Balacheff(1987)는 정당화에 대한 학생들의 이해 수준을 4단계 즉, 소박한 경험주의(navie empiricism), 결정적 실험(crucial experiment), 포괄적인 예(generic example), 사고실험(thought experiment)으로 구분하고 있다. 이것은 각각 몇 개의 예를 이용하여 정당화하는 것, 극단적인 예를 이용하여 일반성을 조사하는 것, 포괄적인 예를 이용하여 논증을 개발하는 것, 예를 이용한 설명에서 벗어나 연역적 증명을 제시하는 것으로 요약된다(Simon & Blume, 1996). 國宗進(1992)은 학생들이 증명의 의의를 이해하게 되는 단계를 실험이나 실측에 의한 방법으로도 충분하다고 생각하는 단계, 연역적으로 증명하지 않으면 안 되는 의미를 이해하는 단계, 증명 체계의 의미를 이해하고 증명할 수 있는 단계 등 세 단계로 구분하고 있다. Sowder와 Harel(1998) 또한 학생들의 정당화 또는 증명 구조를 외부 기반 증명 구조(Externally based proof schemes), 경험적 증명 구조, 분석적(Analytic) 증명 구조(수학적)로 구분하고 있다. 외부 기반 증명 구조를 다시 권위적, 형식적(Ritual), 기호적(Symbolic) 증명 구조로, 경험적 증명 구조는 지각적(Perceptual), 예 기반(Examples-based) 증명 구조로, 분석적 증명 구조는 변환(transformational), 공리적 증명 구조로 세분하고 있다.

수학 사회에서 추구하는 목표가 궁극적으로는 연역적 정당화에 있다고 하더라도, 학생들이 갖고 있는 정당화 유형이 충분히 반영된 증명지도가 요구된다. 다른 사람들이 만들어 놓은 정리와 그에 대한 형식적이고 연역적인 증명절차를 단순히 모방하는 것으로 증명 교수학습이 이루어지면 학생들은 진정으로 증명의 의미나 형식적 증명으로서의 수학적증명을 이해하기 어렵다. 그렇다고 연역적인 증명이라는 수학적 목표를 거부하자는 것은 아니다. 경험적 정당화와 연역적 정당화가 상보적으로 작동될 때 학생들의 증명능력과 증명의 필요성과 의미에 대한 이해가 강화될 수 있을 것이라 생각된다. 몇 개의 사례를 토대로 실험과 측정, 시각적으로 정당화하는 과정에서 탐구형 소프트웨어가 유용하다. 탐구형 소프트웨어는 평면도형과 공간도형에 대한 학생들의 경험을 강화시킬 수 있으며, 다양한 예를 쉽게 만들어 주고, 도형의 중요한 요소를 잃지 않으면서 도형을 자유 자재로 변형시킬 수 있다. 또한 측정과 실험 및 관찰이 용이하다.

본 연구는 탐구형 소프트웨어를 활용한 증명활동에 관한 사례연구의 일환으로, 탐구형 소프트웨어의 활용 방법을 고찰하기 위해 학생들의 증명활동에서 나타날 수 있는 정당화 유형을 체계화하는 데 그 목적이 있다. 이러한 정당화 유형의 체계화는 첫째, 학생들의 정당화 과정을 평가할 수 있는 기준이 될 수 있고 둘째, 비형식적 증명활동과 형식적 증명활동 사이의 관계를 분석할 수 있는 이론적 토대를 제공할 수 있으며, 셋째, 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용이 가능한 증명 과제를 구성할 때 이론적인 배경이 될 수 있다는 점에서 의미가 있다.

이러한 목적 달성을 위해 II장에서 절대주의 수리철학과 준 경험주의 수리철학에서의 증명관의 차이와 경험과학에서의 증명과 수학적 증명 사이의 관계를 먼저 검토하고, III장에서는 정당화 유형을 체계화하고 탐구형 소프트웨어의 활용 가능성에 대해 논의한다.

II. 증명의 재개념화

수학적 지식의 본질에 대한 인식에 따라 다양한 증명관이 존재한다. 절대주의는 수학적 지식을 절대적인 진리로 보고 수학적 지식의 절대적 기초를 확립하기 위한 수단으로서의 증명관을 갖고 있다. 반면, Lakatos의 준경험주의는 수학적 지식을 준경험적이고 오류 가능하며, 인간의 창조적 활동 즉 발명의 산물로 보고, 증명을, 이미 주장된 정리가 참이라는 최종 결말을 내리는 것이 아니라 비판을 용이하게 하기 위해 초기의 정리, 즉 추측을 가능한 한 작은 부분으로 분해하여 분석하는 사고실험이며, 정리의 잘못된 부분들을 찾음으로써 정리를 수정해 나가는 계속적인 과정으로 규정하고 있다. 또한, 사회적 구성주의에서는 수학적 지식을 사회적 합의에 의한 사회적 구성물로 규정하면서, 타당한 증명이란 사회적으로 인정되고 합의된 것이며, 증명을 수학을 행하는 사람들의 의사소통의 수단이자 명제에 대한 확신을 얻기 위한 수단으로 보고 있다.

각 학파들의 수학적 지식의 본질과 증명에 대한 관점이 외형상 서로 분리되어 있는 것처럼 보이지만, 실제로는 서로 밀접하게 관련되어 있다. 증명이 이루어지는 과정은 일반적으로 추측 형성 과정, 그 추측이 참인지 거짓인지를 조사하는 확인과정, 그 결과를 다른 사람에게 설명하여 확신시키는 과정으로 구성되어 있다. 따라서, 이러한 증명과정을 어느 한 측면에서 파악하는 것은 바람직하지 않으며, 증명

이 갖는 다양한 측면을 학교수학에서 적절히 반영할 필요가 있다(나귀수, 1998).

또한, 수학 내부에서 보는 증명과 경험과학에서 보는 증명은 다소 차이가 있지만 밀접한 관련이 있다. 경험과학에서는 실험과 측정에 의해 어떤 명제가 참임을 입증한다. 수학에서도 추측을 하는 과정에서 실험과 측정에 의한 경험적 추론과 시각적 추론이 이용되며, 학생들은 실제로 이러한 추론을 이용하여 어떤 명제의 정당성을 밝히는 경향이 있다. 따라서, 학생들의 경험적 정당화를 연역적 정당화와 관련시켜 증명을 지도하는 것이 자연스러울 것이다.

본 장에서는 연역적이고 형식적인 것으로의 증명 개념을 정당화라는 보다 넓은 의미에서 해석하며, 이를 토대로 학생들이 보일 수 있는 정당화 유형을 구분하기 위한 이론적인 근거를 논의하고자 한다.

1. 절대주의와 준경험주의 수리철학에서 본 증명

전통적으로 증명은 객관적이고 절대적인 수학적 지식이 참임을 보장하는 유일한 수단으로 인식되어 왔다. 이러한 관점에서 증명은 새로운 수학적 진리의 확실성을 보증하는 원천으로서, 공리 체계 내에서 수학적 진리를 공리에서 정리로 전달하는 유일한 메커니즘으로 작용한다. 즉, 수학적 공리를 참이라고 가정하고 수학적 정의는 절대적인 의미에서 참이며 논리적 공리 역시 참인 것으로 인정된다. 다음에는 논리적 추론 규칙을 이용하여 진리를 보존해 가는 가운데 연역적 증명에 의해 참이라고 인정된 명제가 수학적 정리가 된다. 결국 연역적 증명에 의해 입증된 모든 수학적 정리는 참이며 우리는 절대적인 의미에서 새로운 수학적 지식의 확실성을 믿을 수 있다. 이러한 절대주의 증명관에서의 증명은 엄밀하고 연역적인 증명일 수밖에 없다(Ernest, 1991). 지금까지 학교 수학에서의 증명 지도는 이러한 절대주의 증명관의 영향아래 엄밀성을 강조하면서 연역적 전개양식 중심으로 이루어져 왔으며, 이로 인해 학생들은 증명의 필요성이나 증명의 의미를 이해하지 못하고 증명은 수학적으로 재능이 있는 학생들이나 하는 것으로 잘못 인식해 왔다. 이러한 절대주의 수리철학의 신념은 다음과 같은 두 가지 중요한 가정을 전제로 하고 있다.

(a) 현대 수학은 수학적 증명의 타당성을 판단할 수 있는 일반적인 기준이 있다.

(b) 엄밀한 증명은 현대 수학적 실제의 검증 기준이다(Hanna & Jahnke, 1996, 878쪽).

이러한 가정에 따르면 수학에서의 증명은 이미 확실하게 참이라고 알려진 공리로부터 정리를 연역하는 것이며, 증명을 마친 명제는 정리가 되고 참이라는 것이 보장된다. Bell(1976, p. 24, 강문봉, 1993, p. 78에서 재인용)은 증명은 정리의 진리성을 정당화하는 과정이며, 좋은 증명은 그 정리가 왜 참인지에 대한 통찰력을 제공한다는 의미에서 계몽적이라고 주장한다. 절대주의 수리철학에서 강조하는 정당화 수단으로서의 증명관은 어떤 명제가 참이라는 것을 보증하기 위해 증명이 필요하며, 형식적이고 논리적으로 타당한 형식을 갖춰야 한다는 관점에서 증명을 해석하고 있다.

그러나, 이러한 정당화 수단으로서의 증명에 대한 절대주의 철학의 두 가지 신념 모두 문제가 있다(Hanna, 1983). 첫째, 수학에서의 증명의 역할과 수학적 증명의 타당성에 대한 기준이 절대주의 수리철학자들에 따라(논리주의, 형식주의, 직관주의) 다르다. 둘째, 실제 활동중인 수학자들마다 엄밀성에 대한 기준이 다르며, 엄밀성 자체보다는 이해와 의미를 더 중요

하게 여긴다. 수학자들이 증명의 타당성을 받아들이고 확신을 하게 되는 것은 증명의 내용을 이해할 때다. Hanna(1983)는 수학자들이 증명을 수용하는 조건을 다음 다섯 가지로 제시하고 있다.

(1) 증명을 이해하고(증명에 내재된 수학적 개념, 증명의 논리적 전제, 증명의 함의) 증명 과정을 참이 아니라고 주장할 만한 근거를 찾지 못했을 때,

(2) 정리가 다른 수학 분야에 어떤 함의를 갖고 세밀한 연구와 분석을 정당화할 만큼 충분히 의미가 있을 때,

(3) 정리가 이미 수용된 결과들과 일관성이 있을 때,

(4) 증명을 한 사람이 정리의 내용 분야에서 전문가로 평판이 나 있을 때,

(5) 엄밀하든 엄밀하지 않든 전에 보았던, 증명에 대한 믿을만한 논증이 있을 때,

수학자들의 실제를 보면 엄밀성이나 형식성보다 증명이 이해되고 증명이 기존의 학문적 체계 내의 다른 분야와 의미 있게 관련이 있을 때 증명을 수용한다는 것이다.

증명을 정당화 수단의 관점에서 해석하고 있는 절대주의의 증명관은 증명은 많은 사람들이 비판을 해 왔으며, 특히 증명은 본질상 사고실험이라는 Lakatos의 준 경험주의 증명관으로부터 비판을 받아왔다. Lakatos(1976)는 수학적 사고 활동은 인간의 경험에 바탕을 둔 역사적 활동이며, 수학은 절대적으로 확실한 것이 아니라 오류가능한 준-경험과학이라고 주장한다. Lakatos에 따르면 수학은 공리를 기초로 증명을 통해 불변의 정리를 축적해 가는 활동이 아니라 반박될 가능성이 있는 '잠재적 반증자'로 인해 개선되고 성장해 가는 준-경험과학이라는 것이다. Lakatos의 관점에서 보면, 증명은 정리가 참임을 정당화하는 수단이 아니라 발견과 개선을 위한 수단이자, 원래의 추측을 부분 추측 곧 보조정리로 분해하여 비판과 개선을 용이하게 하기 위한 사고실험이다. 즉, 그는 증명을 원시적인 추측→증명→반례에 의한 반박→증명분석→추측의 개선과 새로운 개념의 출현의 순서로 이루어지는 수학적 발견 과정이라는 맥락에서 이해한다. 이러한 입장에서 보면 증명의 무오류성은 보장될 수 없으며 증명의 확실성은 절대적인 것이 아니다. 또한 증명은 정당화의 도구가 아니라 비판을 이끌어내고 발견을 주도하는 열린 활동이다(우정호, 1998, p. 325).

절대주의 수리철학이 증명을 정당화의 관점에서 보는데 반해, Lakatos는 증명을 재발명의 맥락에서 해석하고 있다. 이러한 현상이 연역적 증명을 약화시키는 결과를 초래한다. 수학적 진리의 정당성을 확보하기 위한 연역적 증명을 반박하고 발견술의 일부로서의 증명으로 증명관이 바뀌면서 연역적 증명이 소홀히 취급되는 경향이 있다. 그러나, 비형식적 반증자와 수학의 오류가능성이라는 Lakatos의 개념을, 교육과정에서 '형식적' 수학 또는 형식적 증명을 배제해야 한다는 식으로 해석하는 것은 바람직하지 않다. 형식적 증명은 정당화를 위한 유용한 수단으로 오래 동안 인정을 받아왔으며, 새로운 수학적 진리를 입증한다는 제한된 의미에서가 아니라 새로운 결과의 개연성에 대한 근거와 참인 이유를 제공한다는 보다 넓은 의미에서 연역적 증명을 해석할 필요가 있다(Hanna & Jahnke, 1996, p. 889). Lakatos가 주장한 바와 같이 교육과정에서 발견술을 지도하는 과정에서 비형식적 증명 방법을 강조할 필요가 있지만, 추측을 옹호하기 위한 형식적 증명 역시 소홀히 취급할 수 없다.

2. 수학적 증명과 경험과학

경험과학에서 진리의 입증방법은 주로 실험과 측정에 의해 이루어진다. 현재 중등학교 기하교육의 원전이 되고 있는 유클리드기하는 공간적 직관에 의해 표현되는 의미를 갖고 있으며, 일상언어를 이용하여 형식적이고 연역적으로 전개되고 있는 바, 일상적 사고를 형식화된 사고로 바꾸는 과정에서 기하학적 사고가 중요한 역할을 한다고 볼 수 있다. 증명지도의 문제는 실제 현상과 기하와의 관련성을 소홀히 하고 엄밀하고 형식적인 전개양식에 지나치게 치중해 왔기 때문에 발생한 것이라 할 수 있다.

형식주의적인 엄밀한 유클리드 기하 교육 일변도에서 벗어나 수학 본래의 유용성을 추구하는 교육을 주장한 Perry(1902)는 실험과 구체적인 예를 통한 발견을 강조하였다. Dieudonné(OECD, 1961, pp. 31-49)는 한 세미나에서 "유클리드는 사라져야 한다!"는 슬로건 아래 유클리드기하 대신에 벡터공간을 다루는 선형대수적 접근을 제안하여 그 이후의 중등학교 기하교육에 상당한 영향을 끼쳤다. 그런데, 그 세미나의 결과, 유클리드기하는 연역적 사고 방법을 훈련시키는 주요한 분야이고 그 바탕이 되는 삼각형은 인간의 지적인 발달의 근원으로 실용적인 학문과 생활에서 매우 중요하며 직관적이고 경험적인 절차를 통한 초기의 기하교육에서 매우 중요하다는 점을 지적하고 있는 것도(우정호, 1998, pp. 318-319에서 재인용) Perry와 같은 맥락에서 해석할 수 있다. 결국, 유클리드기하가 비록 연역적이고 형식적인 전개양식으로 구성되어 있다 하더라도 실험과 구체적인 예를 통한 발견의 과정이 기하교육에서 중요하다는 점을 시사하고 있는 것이다.

물론, 수학에서의 증명과 실험과 실측에 의한 정당화 방법은 그 성격이 다소 다르다. 예를 들어 삼각형의 세 각의 합이 180도라는 것은 측정에 의해 또는 비형식적인 활동에 의해 발견될 수 있다. 그러나 이러한 결과가 모든 삼각형의 경우에도 참이라는 것을 보장받기 위해서는 증명이 필요하다는 것이 플라톤이나 유클리드, 절대주의 수학철학의 관점이다. 그러나 실험과 측정이 과학적 방법의 기초로 받아들여지면 형식적인 증명의 필요성을 인식하기 어렵다. 과학에서는 이론적인 방법으로 증명해야 자연의 법칙이 성립한다고 생각하지 않는다. 모든 그러한 법칙은 실험과 측정만으로도 입증할 수 있다고 생각한다. 실험과 측정 결과를 토대로 삼각형의 세 각의 합이 180도가 된다는 확신을 할 수 있다. 이러한 갈등은 증명 수업에서도 나타날 수 있다. 수학 교사들은 증명이 필요하다고 생각하지만 학생들의 입장에서 보면, 이미 배워서이든 직접 측정을 통해 확인을 해서든 증명의 필요성을 인식하기 어렵다. 따라서, 학생들의 경험을 토대로 증명 수업이 이루어질 필요가 있다.

수학화된 경험적 이론과 증명의 역할 사이에는 역동적인 관계가 있다. 수학화된 경험적 이론은 발달 단계가 있고 각 단계에서의 증명의 의미는 다양하다. 이론이 구성되기 시작할 때, 증명은 도출된 결과의 진리를 확립하기보다는 그 결과가 도출되는 가정의 신뢰성, 개연성 그리고 효과를 검증하는 역할을 하고, 그 이론이 이미 수용된 지식의 일부로 통합될 때 증명의 의미는 가정과 이미 참임이 밝혀진 정리를 토대로 새로운 정리의 정당성을 보장하는 역할을 한다(Hanna & Jahnke, 1996).

여기서 언급한 역동적인 관점은 학생들에게 증명을 가르칠 때 교사들이 경험하는 여러 가지 현상을 설명하는 데 유용하다. 학생들은 어떤 사실이 왜 증명되어야 하는지를 이해하지 못한다. 왜냐하면, 그들의 관점에서 보면 실제 측정만으로도 그 사실은 분명하고 충분히 정당

화된 것이기 때문이다. 학생들에게 증명을 보여 준 다음에도 학생들은 정리의 일반적인 타당성을 확신하지 못하고 어떤 예를 가지고 정리가 참인지를 검사한다(Fischbein, 1982). 이러한 현상은 증명이 상황마다 다른 의미를 갖고 있다는 사실을 반영하는 것이고, 학생들이 연역적 논증과 경험과학 사이의 관계를 깨닫지 못하고 있음을 나타낸다.

따라서, 증명의 경험적 의미만을 강조하거나 플라톤과 유클리드의 언어만을 강조하는 것은 바람직하지 않으며, 증명의 경험적 의미와 연역적이고 형식적인 증명사이의 상보적 관계가 강조되어야 한다. Freudenthal(1973)이 학습자에게 익숙한 사실로부터 시작하여 그것을 국소적으로 조직화하는 활동이 재발명 과정에서 가장 중요한 활동이라고 제안하고 있듯이, 증명교육에서도 학생들이 갖고 있는 다양한 정당화 유형에서 출발하여 점차 연역적이고 형식적인 정당화로 발전시켜 가는 것이 온당한 증명지도 방법이라 할 수 있다.

III. 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용

수학교사를 비롯한 수학계의 구성원들은 증명하면 일반적으로 연역적인 증명을 떠올린다. 6차 교육과정의 교과서들도 Euclid 기하의 형식적이고 연역적인 증명 방법을 따르고 있으며 연역적인 증명만을 증명으로 인정하고 있다. 그러나 앞장에서 논의했듯이 증명의 의미는 다양하며, 실제로 정당화 요구에 대한 학생들의 반응은 연역적 정당화보다는 경험적 정당화를 선호하는 것으로 나타났다. 학생들이 갖고 있는 정당화 수준에서 증명지도가 시작되어야 한다는 점에서 정당화 유형에 대한 구분은 의미가 있을 것으로 보인다. 여기서 언급되고 있는 '정당화'라는 말은 증명을 엄밀하게 전개되는 연역적이고 형식적인 증명이라는 좁은 의미에서가 아니라 심리학적인 의미에서 보다 포괄적인 관점에서 증명개념을 지칭하고 있다 (Sowder & Harel, 1998).

어떤 정리에 대한 증명을 학습한 후에도 명제의 타당성을 경험적으로 조사해 볼 필요가 있다고 생각하거나 직관적으로 분명한 것으로 보이는 명제를 증명해야 하는 이유를 모르는 경우가 있다. 또는 교과서에 나와 있는 것이기 때문에 그리고 교사가 수업 시간에 알려준 정리이기 때문에 타당한 것이라고 믿는 경우도 있다. 이러한 각 사례는 학생들의 정당화에 대한 이해 수준을 나타내는 것으로 보인다. 본 장에서는 II장에서 논의를 이론적 배경으로, Balacheff(1989), Sowder와 Harel(1998)의 정당화 유형 구분을 비판적으로 검토한 후 증명 또는 정당화에 대한 학생들의 이해 수준을 체계화한다.

1. Balacheff의 정당화 유형과 그 예

학생들이 고도의 수학적 능력을 요구하는 형식적이고 연역적인 증명을 다루기 전에 경험적이고 귀납적인 추론을 경험하는 것은 고차원적인 연역적이고 형식적인 증명을 더욱 쉽게 만들 수 있다. Balacheff(1987)의 구분은 학생들의 증명 이해 수준을 조사하는 기준이 될 수도 있으며, 학생들이 자신들이 만든 결과를 정당화해야 하는 과제를 해결하는 과정에서 교사들이 기대하는 증명의 종류이기도 하다. 다음은 Knuth & Elliot(1998)가 Balacheff의 정당화 이해 수준을 토대로 제시한 사례를 중심으로 논의한 것이다. 여기서 다음과 같은 문제가 이용되었으며, 어떤 정리를 증명하라는 전통적인 교육과정의 문제와는 그 성격이 다르다.

문제: 중심이 F이고 원 내부의 한 점 H를 지나는 현을 그렸을 때 두 선분의 곱이 가장 큰 현은 어느 것인가? 자신의 풀이를 정당화하는 논증을 제시하시오.

교과서에 나오는 증명 문제는 학생들로 하여금 처음부터 형식적인 증명을 시도할 것을 요구하고 있으며, 연역적이고 형식적인 증명을 할 수 있는 준비와 능력을 갖추지 못한 학생들은 대부분 증명을 기피하게 된다. 그러나 위와 같은 문제형식으로 제시되면 학생들은 먼저 추측을 하게되고 자신의 추측을 어떻게 정당화할 것인지를 생각하게 된다. 전통적인 기하 수업 시간에 배우는 증명이 엄밀하고 연역적으로 전개되는 공리적 특성에 따라 증명을 모방하고 암기한 후 곧 잊어버리는 것이라면, 위에서처럼 학생들이 풀고 확인하는 문제로 제시되면 훨씬 더 많은 활동이 이루어질 것이다. 더욱이, 이미 알려진 것을 연역적으로 증명하는 것에서 가능한 추측을 정당화하는 것으로 초점이 바뀌면 보다 많은 학생들이 문제에 접근하게 될 것이다. 전통적인 기하 수업에서 교사나 학생들이 증명을 기피하는 문제를 해결할 수 있는 대안이 될 것이다. 그러나 학생들이 보이는 정당화 방법은 수학적 성숙도에 따라 다양하게 나타날 수 있다(수학적 증명에 관한 이해 수준). 본 논문에서는 Knuth & Elliot(1998)가 제시한 예를 중심으로 논의했지만 중학교 논증기하에 나오는 대부분의 증명 문제들을 이와 같은 형식으로 제시할 수 있을 것으로 보이며, 그럴 경우 학생들이 보일 수 있는 정당화 유형도 Balacheff의 정당화 이해수준에 따라 구분할 수 있을 것이다.

(1) 소박한 경험주의

소박한 경험주의란 몇 개의 예를 이용하여 정당화하는 것을 의미한다. 위의 예에서 많은 학생들이 처음에는 귀납적으로 문제에 접근하였다. 예를 들면, 문제상황을 그림으로 나타내어 주어진 점을 지나는 여러 개의 현을 그리고, 각 현에 대해 두 선분의 길이를 측정하여 두 선분의 곱을 계산한다. 다음에는 그 결과들을 비교한다. 학생들이 그린 그림이 정확하고 많은 그림을 그렸다면, 두 선분의 곱이 근사적으로 같을 것이라고 추측할 수 있을 것이다. 이 때 학생들이 보이는 반응은 다양하게 나타날 수 있다. 주어진 점을 지나는 모든 현에 대해 두 선분의 곱이 같다고 주장하는 학생도 있을 수 있고, 더 많은 예들을 조사해 볼 필요가 있으며 자신들의 주장을 조사하기 위해 그림을 더 그려보아야 한다고 생각하는 학생도 있을 것이다. 그러나, 몇 가지 사례를 근거로 자신의 풀이가 정당하다고 주장한다는 면에서 공통점을 갖는 바, 이러한 정당화 유형은 Balacheff의 소박한 경험주의에 해당된다.

(2) 결정적 실험

Balacheff의 정당화 유형의 두 번째는 결정적 실험이다. 학생들은 몇 가지 사례를 근거로 추측을 하고, 자신의 추측을 확인하기 위해 극단적인 예를 이용하여 조사하는 경우가 있다. 결정적 실험 수준의 두드러진 특징은 극단적인 예를 선택하여 자신의 추측을 조사한다는 점이다. 예를 들어, 앞의 문제에서 학생들은 아주 대조적인 두 현 또는 두 원을 선택하여 각각의 경우 두 선분의 곱이 같은지를 확인함으로써 자신의 추측이 정당함을 주장할 수 있다. 자신의 추측이 일반화될 수 있다는 확신도 얻을 수 있다. 즉 어떤 원에서든 그리고 어떤 현이든 결과가 늘 같다고 확신을 하게 된다.

결정적 실험 수준도 넓은 의미에서 경험적 정당화로 구분될 수 있다. 그렇지만, 소박한 경험주의와는 다소 차이가 있다. 소박한 경험주

의 수준에서 학생들은 몇 가지 예를 선택하여 추측을 하고 그 결과가 타당하다고 확신을 하는 반면, 결정적 실험 수준에서는 일반화 가능성을 의식하여 극단적인 예를 가지고 확인할 필요가 있다고 생각한다. 이 수준의 학생들은 아주 대조적인 두 예에서 자신들의 추측이 참이면 그 사이에 있는 다른 모든 경우도 참일 것이라고 생각한다. 그러나 자신들의 추측이 왜 참이 되는 지를 연역적으로 입증하지는 못한다. 따라서 연역적인 정당화와는 구분된다. 또한 권위적인 정당화도 분명 아니다.

(3) 포괄적인 예

포괄적인 예의 수준은 Balacheff의 세 번째 정당화 유형으로 연역적 증명에 대한 경험이 없는 학생들로서는 가장 설득력 있는 정당화 방법이라 할 수 있다. 포괄적인 예의 수준에서는 자신의 추측을 확인하기 위해 학생들이 선택하는 예가 중요한 의미가 있는 바, 가능한 모든 경우의 대표적인 예를 추측을 조사하기 위한 예로 선택한다. 예를 들어, 이 수준의 학생들은 몇 개의 현을 이용하여 추측을 한 후, 모든 현과 모든 원에서 자신들의 추측이 참일 것이라고 생각한다.

따라서 처음의 사례를 모든 경우로 일반화할 수 있으며, 포괄적인 예를 이용하여 자신의 추측이 왜 참이 되는지를 생각한다는 의미에서 연역적인 증명 수준과 밀접한 관련이 있다. 포괄적인 예의 수준에서 학생들의 정당화가 연역적인 정당화에는 미치지 못하지만 처음에는 경험적인 결과에 의존하지만 더욱 일반적인 논증을 보인다. 그러나 수학적 명제의 정당화 방법으로 귀납적인 생각을 갖고 있으며 경험적 정당화로 구분된다.

(4) 사고실험

Balacheff의 네 번째 정당화 유형은 사고실험이다. 사고실험의 수준에서 학생들은 앞에서의 세 가지 경우와 마찬가지로 귀납적인 방법으로 추측을 할지도 모르지만 몇 가지 예에 의존해서 자신의 설명 또는 정당화를 시도하지 않는다. 경험적인 정당화에서 벗어나 연역적인 정당화를 시도한다. 이 수준의 학생들은 자신들의 기하에 관한 지식을 근거로 증명을 한다. 전통적인 증명지도에서 나타나는 증명 전개양식과 유사하지만 이단 증명과 같은 형식적인 증명 전개 양식만을 고집하지는 않는다. 사고실험이라는 용어는 Lakatos의 증명관에서 나타나는 용어다. Lakatos(1976)는 증명을 확인 과정인 사고실험이라고 규정짓고 이를 발견의 도구로 파악해야 한다고 주장한다. 증명은 곧 사고실험이라는 Lakatos의 관점에는 수학적 지식의 오류가능성을 인정하면서 증명은 곧 추측을 검사하는 것이라는 의미가 내포되어 있다(강문봉, 1993).

2. Sowder와 Harel의 정당화 유형

Sowder와 Harel(1998) 또한 학생들의 정당화 또는 증명 구조를 외부 기반(Externaly based) 증명구조, 경험적 증명 구조, 분석적(Analytic) 증명 구조로 구분하고 있다. 외부 기반 증명구조는 다시 권위적(Authoritarian) 증명구조, 형식적(Ritual) 증명구조, 기호적(Symbolic) 증명구조로, 경험적 증명 구조는 지각적(Perceptual), 예 기반(Examples-based) 증명으로, 분석적 증명 구조는 변환(transformational), 공리적 증명으로 세분하고 있다. 본 절에서는 이에 대해 자세히 알아보고 이를 Balacheff의 정당화 유형과 비교해 본다.

(1) 외부기반 증명 구조

외부기반 증명구조의 특징은 학생들이 확신을 얻거나 다른 사람들을 설득시킬 때 외부

의 자원을 이용한다는 것이다. 외부의 자원이란 예를 들어 교과서나 교사의 권위를 이용하는 경우에서처럼 권위일 수도 있고, 논증의 형식 또는 의미 없는 기호조작일 수도 있다.

권위적 증명구조란 교과서나 교과서에 의존하여 정당성을 주장하는 것을 말하며, 형식적 증명구조나 기호적 증명구조는 수학의 기초주의 학파들 즉, 형식주의나 논리주의 학파의 증명관을 그대로 따르는 경우를 의미한다. 이러한 정당화 유형에는 어떤 논증의 타당성을 논증 형식이나 의미 없는 기호조작에 지나치게 의존한다는 의미가 함축되어 있는 것으로 보인다. 예를 들어, 이단 형식의 증명이 아니면 증명이 아니라고 생각하는 것도 이 경우에 속한다.

(2) 경험적 증명구조

어떤 명제의 정당성을 예를 근거로 주장하는 경우가 여기에 속한다. 논리적인 면에서 '예를 이용하여 정당성을 주장한다'라는 말이 설득력이 없어 보이지만, 심리적인 측면에서는 타당성이 있다. 가장 자연스러운 개념 형성은 예를 이용한 개념형성이라고 주장하는 심리학자들도 있으며(Medin, 1989 ; Sowder & Harel, 1998에서 재인용), 연역적 논증을 배우기 전에 여러 가지 예에 의한 설명이나 정당화는 설득력이 있다. 일반적인 어떤 주장에 대해 조사된 모든 예가 참이라면 그 주장을 참이라고 믿으며, 반례를 발견한다면 일반적인 주장이 옳은 것이 아니라고 생각하기도 한다. Sowder와 Harel은 경험적 증명구조를 지각적 증명구조와 경험적 증명구조로 구분하여 제시하고 있다. Balacheff(1987)가 주장한 정당화에 대한 학생들의 이해 수준 4단계 중, 소박한 경험주의(navie empiricism), 결정적 실험(crucial experiment), 포괄적인 예(generic example) 등은 경험적 구조로 분류할 수 있다.

한 개 또는 몇 개의 그림에 대한 지각을 근거로 어떤 결론을 내리거나 다른 사람들을 설득시키려는 경우가 바로 지각적 증명구조에 해당된다. 예를 들면, 등변 사다리꼴의 네 변의 중점을 연결하면 마름모가 된다는 명제를 증명할 때, 등변사다리꼴의 예로 정사각형을 그리고 그것을 이용하여 추론하는 경우가 있는 바, 이것이 지각적 증명구조에 해당된다. 그러나 이 경우 시각적 오류를 범할 가능성이 있다. 탐구형 소프트웨어와 소집단 활동이 이러한 증명 구조로는 정당성을 주장하는 데 한계가 있음을 깨닫는 데 도움이 될 수 있다. 탐구형 소프트웨어는 많은 예를 쉽게 그릴 수 있으며 여러 가지 예에서 어떤 명제가 성립하는지를 확인할 수 있게 해준다. 또한 소집단 활동은 지각적인 정당화를 이용하는 학생들로 하여금 다른 유형의 정당화가 필요함을 느끼게 하는 자연스러운 교실문화를 형성할 수 있다.

예 기반 증명구조는 몇 개의 예를 이용하여 추측을 확인함으로써 자신이나 다른 사람들을 설득시키는 경우를 말한다. 예 기반 정당화가 오류를 범할 가능성이 있지만, 현실적으로 설득력이 있으며, 긍정적인 측면도 있다. 수학자들 또한 예와 반례를 이용하여 어떤 명제의 타당성을 설명하는 경우가 있다. 전체적으로 경험적인 증명 구조가 학생들 사이에서 나타날 수 있으며, 부분적으로 설득력이 있지만 학생들은 예를 근거로 한 추측과 확인이 오류가능성이 있음을 이해하고 연역적 증명의 필요성을 인식해야 한다.

(3) 분석적 증명구조

수학자나 수학교사들이 일반적으로 증명으로 인정하고 증명교육의 궁극적인 목표로 생각하는 것이 바로 분석적 증명이다. Sowder와

Harel은 분석적 증명 구조를 변환 증명구조와 공리적 증명구조로 구분하고 있는 바, 변환 증명구조는 연역적인 증명을 하기 전에 어떤 명제가 모든 경우에 참임을 밝히는 것을 의미하고 공리적 증명구조는 연역적인 증명 즉, 일반적으로 인식되고 있는 수학적 증명을 의미한다.

변환 증명구조는 어떤 상황의 일반적인 특징을 가지고 정당화하는 것 또는 추측을 일반화하기 위한 추론을 의미한다. 예를 들어 수열과 같은 어떤 패턴에서 그 패턴의 기본 구조를 인식하는 것이 변환 증명구조이다. 이러한 증명구조가 공리적 증명을 하기 전 단계에서 필요한 과정이지만 전통적인 의미에서 수학적 증명은 아니다. 공리적 증명은 공리-정의-정리를 기본 토대로 하는 수학 체계에서 이루어지는 증명이다. 공리적 증명구조 내에서 수학적인 명제의 증명은 이미 참이라고 밝혀진 명제로부터 논리적으로 필연적인 결론을 유도하는 과정이며, 기하학적인 명제는 정확히 정의된 도형의 성질에 관한 것으로 그 타당성은 증명에 사용된 논리적 추론 법칙의 타당성에 의해 보증된다. 유클리드 기하가 전형적인 공리적 증명구조의 예로 증명지도의 궁극적인 목표로 인식되고 있다. 그러나 앞에서 제시된 다양한 형태의 정당화에 대한 경험을 무시하고 공리적 증명을 시도하는 것으로는 다양한 연구에서 나타나는 증명교육의 문제를 해결하기 어렵다.

3. 정당화 유형의 체계

Balacheff가 구분한 학생들의 정당화 이해수준에서처럼 Sowder와 Harel의 증명구조 분류도 학생들이 제시하는 정당화 유형을 판단하는 기준이 되며, 학생들이 갖고 있는 정당화 유형에 대한 평가는 학생들이 공리적 증명 구조로 발전할 수 있도록 수업을 설계하는 데 도움이 될 수 있다. 여기서 Balacheff가 준경험주의의 재발명의 맥락이라는 관점에서 정당화 이해수준을 구분하고 있는 반면, Sowder와 Harel의 Lakatos의 준 경험주의 수리철학적 입장, 플라톤 유클리드 정신과 절대주의 수리철학을 종합하여 정당화 구조를 구분하고 있다. Balacheff의 구분은 전통적인 의미에서의 연역적 증명에 대한 언급이 없지만, Sowder와 Harel의 Lakatos의 준 경험주의 수리철학적 증명관과 전통적인 증명관을 포괄하고 있다는 점에서 후자의 구분이 보다 실제적이다. 경험적 정당화과정이 강조될 필요가 있지만, 그러한 주장이 연역적 정당화를 배격하는 것으로 해석되어서는 안 되기 때문이다. 증명의 의미와 역할을 상호 보완적인 관계로 해석될 필요가 있으며, 이러한 관점에서 앞에서 논의한 정당화 유형을 포함하여 정당화 유형을 체계화할 필요가 있다.

정당화 유형의 구분은 증명이 갖는 다양한 역할은 연역적이고 형식적인 증명을 강조해 온 전통적인 증명관에서 벗어나 증명의 다양한 역할을 인정하고 특히, 학생들이 갖고 있는 증명 또는 정당화 유형에서부터 증명교육이 시작되어야 함을 함의하고 있다. 따라서 앞에서 논의한 것처럼 정당화 유형을 세분할 필요도 있겠지만, 학교수학에서의 증명을 연역적 정당화와 경험적 정당화의 상호작용 과정으로 해석하여 전통적인 증명지도의 문제점을 개선할 수 있는 대안을 찾고자 하는 본 논문의 목적 상, 정당화 유형을 단순화할 필요가 있다. 특히, 탐구형 소프트웨어를 이용하게 되면 경험적 정당화를 세부적으로 구분하는 것은 별 의미가 없다. 따라서, 본 절에서는 지금까지의 논의를 토대로 학생들이 갖고 있는 정당화 유형을 경험적 정당화, 사고실험, 연역적 정당화, 권위적 정당화 등 크게 네 가지로 구분하고자 한다.

(1) 경험적 정당화, 연역적 정당화와 사고실험

몇 개의 예를 이용해서, 실험과 측정에 의해 또는 시각적인 그림을 이용하여 어떤 명제가 참이며 왜 참인지를 설명하는 것을 경험적 정당화, 보다 엄밀하고 형식적인 전통적인 의미에서의 증명을 연역적 정당화라고 한다. 이러한 관점에서 보면 Balacheff (1987)가 제시한 정당화에 대한 학생들의 이해 수준 4단계 중, 소박한 경험주의, 결정적 실험, 포괄적인 예 등은 모두 경험적 정당화로 구분될 수 있다. Sowder와 Harel은 경험적 정당화 구조를 지각적 구조와 예-기반 구조로 구분하였지만 본 논문에서는 경험적 정당화로 통합하였다. 경험과학에서의 정당화 수단들도 경험적 정당화라는 관점에서 해석할 수 있다. 또한 Cooney et al.(1975)이 확신을 얻는 방법으로 제시한 경험적인 확인과 귀납, 國宗進(1992)이 제시한 학생들이 증명의 의의를 이해하게 되는 단계 중 실험이나 실측에 의한 방법도 경험적 정당화 유형으로 분류될 수 있다.

Sowder와 Harel이 제시한 분석적 증명구조, Cooney et al.(1975)의 타당한 연역적 논증, 國宗進(1992)의 연역적으로 증명하지 않으면 안 되는 의미를 이해하는 단계와 증명 체계의 의미를 이해하고 증명할 수 있는 단계는 연역적 정당화로 분류된다. Balacheff의 네 번째 정당화 유형인 사고실험도 연역적 정당화로 분류된다. 사고실험의 수준에서 학생들이 귀납적인 방법으로 추측을 할 수도 있지만, 연역적인 정당화를 시도한다. 학생들은 기하에 관한 선행지식을 근거로 증명을 하는 등 전통적인 증명지도에서 나타나는 증명 전개양식과 유사하지만 이단 증명과 같은 형식적인 증명 전개 양식만을 고집하지는 않는다. 사고실험이라는 용어는 Lakatos의 증명관에서 나타나는 용어다. Lakatos (1976)는 증명을 확인 과정인 사고실험이라고 규정짓고 이를 발견의 도구로 파악해야 한다고 주장한다. 증명은 곧 사고실험이라는 Lakatos의 관점에는 수학적 지식의 오류가능성을 인정하면서 증명은 곧 추측을 검사하는 것이라는 의미가 내포되어 있다(강문봉, 1993).

일반적으로 학생들은 연역적 정당화보다 경험적 정당화를 선호하고 있으며(Fishbein, 1982), 학교수학에서의 증명지도는 경험적 정당화로부터 시작해서 연역적 정당화의 필요성을 인식하도록 하는 방향으로 발전되어야 한다.

(2) 권위적 정당화

Sowder와 Harel는 외부의 자원을 근거로 정당성을 주장하는 경우를 외부기반 증명구조로 분류하고, 외부의 권위, 논증형식, 기호논리 등을 외부의 자원에 포함시켰다. 형식적 증명구조나 기호적 증명구조는 수학의 기초주의 학파들 즉, 형식주의나 논리주의 학파의 증명관의 부정적인 측면을 의식한 것으로 어떤 논증의 타당성을 논증 형식이나 의미 없는 기호조작에만 의존하는 경우를 말한다. 그러나, 실제로 형식과 논리는 연역적 정당화에서 여전히 중요한 요소이며 이것을 외부의 요소로 보기어렵다. 따라서 이러한 증명구조는 연역적 정당화로 분류하는 것이 타당하다. 결국 외부의 자원은 권위만 남았고 본 글에서는 이를 권위적 정당화로 구분하였다. Balacheff는 권위적 정당화를 언급하지 않고 있으며, Cooney et al.의 권위자의 판단은 권위적 정당화로 분류할 수 있다.

권위적 정당화는 외부의 권위를 정당화의 수단으로 하는 경우를 말한다. 학생들이 확신을 얻거나 다른 사람들을 설득시킬 때 외부의 자원을 이용하는 경우가 있다. 교과서의 저자는 전문가이기 때문에 거짓인 명제를 다루지는 않을 것이라고 믿거나 교사가 말한 것이기 때문에 명제가 참이라고 믿는 경우가 여기에 해

당된다. 권위적 증명 구조는 학생들에게만 존재하는 것은 아니며 전적으로 나쁘다고만 할 수는 없다. 예를 들어, 수학을 전공하는 학생들의 논문을 심사하거나 그 방면에서 권위를 갖고 있는 학자의 논문을 검토할 때 상세한 부분을 검토하지 않는 경우가 있다. 그러나 이러한 정당화 유형을 갖고 있는 학생들은 교과서에 나와 있는 명제에 대한 증명의 필요성을 이해하기 어려우며, 교사의 증명을 모방하여 암기하기가 쉽다. 또한 책에 나와있지 않다거나 배우지 않았기 때문에 증명을 할 수 없다고 생각하는 경우도 있다. 학생들이 이러한 증명구조를 갖는 원인은 결과만을 강조하고 왜 그러한 결론이 나왔는지를 조사해 보지 않는 수업 방법에 있다. 따라서, 교사는 과제의 구성, 학생들의 탐구와 토론의 안내, 적절한 발문 등을 통해 학생들이 탐구, 추론, 의사소통할 수 있는 기회를 제공해 주는 역할을 하는 것이 중요하며, 어떤 명제 또는 논증의 타당성을 결정할 때 수학적인 근거에 의해 타협을 하는 교실문화를 조성할 필요가 있다.

NCTM(1989)의 Standards에서 이단 증명과 같은 형식적이고 연역적인 증명을 약화시킬 것을 주장한 것도 형식적이고 연역적인 증명 자체를 거부하는 것이 아니라 추론과 증명을 다양한 의미에서 해석해야 함을 지적하고 있는 것으로 보아야 할 것이다.

3. 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용

지금까지 논의한 정당화 유형의 구분은 연역적 정당화 특히, 이단 증명 형식의 형식적이고 연역적인 증명 위주의 증명지도에 대한 대안을 제시해 주고 있다. 전통적으로 학생들은 증명의 필요성이나 의미를 이해하지 못한 채, 모방과 암기 위주의 증명 교육을 받아 왔다. 수학교사를 비롯한 수학계의 구성원들은 증명하면 일반적으로 연역적인 증명을 떠올린다. 6차 교육과정의 교과서들도 Euclid 기하의 형식적이고 연역적인 증명 방법을 따르고 있으며 연역적인 증명만을 증명으로 인정하고 있다.

그러나 실제로 학생들은 연역적 정당화보다는 경험적 정당화를 선호한다. 그렇다면 연역적 정당화 이전에 학생들이 갖고 있는 정당화 유형을 확인하고 그것을 출발점으로 삼는 것이 자연스러운 증명지도 방법일 것이다. 정당화 유형의 확인은 탐구와 추측이 가능하고 자신의 추측에 대해 설명하고 정당화할 수 있는 문제를 통해 이루어질 수 있다. 따라서 이미 완성된 형태로 제시되어 있는 현행 교과서의 내용을 탐구 문제 형태로 재구성되어야 하며, 수업 활동도 재조직될 필요가 있다. 그러나, 이러한 문제를 본 논문에서는 논의하지 않는다.

문제 형태로 제시된 과제를 해결하는 과정에서 학생들은 예를 만들어 추측을 하고 그 추측을 정당화한다. 이런 과정에서 경험적 정당화의 한계를 이해하고 연역적 증명의 필요성을 인식할 수 있을 것이다. 여기서 탐구형 소프트웨어의 도입이 필요하다. 예를 만들어 실험을 하고 측정을 하는 것이 지필환경에서는 어렵다. 논증기하의 경우 학생들은 정확하게 여러 가지 형태의 도형을 작도할 수 있어야 하는데, 지필 환경에서는 많은 제한이 따른다. 탐구형 소프트웨어를 이용하면 도형의 작도는 물론 그 도형에서의 관계 탐구, 도형의 성질에 대한 추측, 추측의 검사를 용이하게 한다. 따라서 추측이 참인지 또는 왜 참인지를 확인할 필요성을 자연스럽게 인식할 수 있으며, 확인하는 과정도 지필환경보다 용이해진다.

지필환경에서는 이러한 활동이 쉽지 않다.

이미 연역적인 증명방법을 알고 있는 수학교사나 수학적 능력이 뛰어난 학생들은 아니라 하더라도 대부분의 학생들은 정당화는 물론이고 추측을 하기도 어렵다. 증명을 학습하지 않은 학생 10명(중학교 수학 경시반 학생들로 2학년 6명, 1학년 4명이었으며 2학년 학생 중 2명은 개인적으로 증명을 공부하였다.)을 대상으로 삼각형의 외심에 관한 추측과 자신의 추측에 대한 정당화를 요구하였다. 이 때 '삼각형의 세 변의 수직이등분선을 그려보고 그 결과를 추측하여라. 또 자신의 추측을 정당화하여라.'라는 문제 형식으로 제시하였다. 학생들의 반응은 '추측을 할 수가 없다', '삼각형이 다르면 결과도 다르다', '한 점에서 만날 때도 있고 내부에서 작은 삼각형이 될 때도 있다', '정삼각형, 이등변삼각형, 직각삼각형인 경우는 한 점에서 만나지만 그 외에는 작은 삼각형을 이룬다' 등 다양하게 나타났다. 물론 모든 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다'라고 정확하게 추측을 한 학생도 있었다. 삼각형과 수직이등분선의 부정확한 작도가 학생들의 추측을 방해하였으며, 이러한 문제를 탐구형 소프트웨어를 이용하여 해결할 수 있다. 정당화에 대한 요구에 대해서는 증명 단원을 미리 공부한 학생 하나만 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형에 대한 그림을 그려 시각적 정당화를 시도했을 뿐 나머지 9명의 학생들은 정당화를 시도하지 못하였다. 따라서, 지필환경에서는 학생들이 경험적으로 정당화하는 것조차 쉽지 않을 것임을 알 수 있다.

다양한 예를 만들고 실험과 측정이 용이하다는 점에서 Geometric Supposer, Cabri Geometry II, Geometer's Sketchpad와 같은 탐구형 소프트웨어가 경험적 정당화의 기회를 제공할 수 있으며, 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상보적 관계에도 도움이 될 것으로 보인다. 그러나 여기에는 과제의 구성문제와 구체적인 수업활동의 계획이라는 쉽지 않은 문제가 있다. 전통적인 교과서는 '삼각형에서 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만남을 증명하여라.'에서처럼 학생들의 입장에서는 의미가 없는 이미 완성된 형태로 제시되고 있으며, 교사들의 여러 가지 시도가 이루어지지만 대부분 정리의 내용과 정리에 대한 증명을 전달하는 것에 중점을 두고 있다. 이러한 문제점을 개선하여 학생들에게 의미 있는 정당화 또는 증명 활동이 이루어질 수 있도록 과제를 구성하고 수업을 조직하는 데 탐구형 소프트웨어가 유용하게 이용될 것으로 보인다.

IV 결론 및 제언

형식주의적인 증명교육의 문제를 개선하기 위한 노력들이 많이 제시되고 있는바, 대안들은 주로 엄밀성과 연역적이고 형식적인 증명 전개양식에 대한 비판과 더불어 학생들의 자연스러운 정당화 방법인 경험적 정당화의 가치에 비중을 두고 있다. 특히, 실험이나 귀납을 통한 발견과정과 비형식적인 증명활동을 통한 증명 지도 방법이 강조되고 있다. 실제로 학생들이 갖고 있는 정당화 유형은 연역적인 방법이 아니며 연역적인 정당화 방법을 학습하기 이전에 많은 학생들이 경험적 정당화나 권위적 정당화 방법에 의존하고 있는 것으로 나타났다(Cooney et al., 1975, pp. 295-296; 國宗進, 1992; Sowder & Harel, 1998; Balacheff, 1987; Knuth & Elliot, 1998).

본 논문에서는 학생들이 갖고 있는 정당화 유형을 경험적 정당화, 연역적 정당화, 권위적 정당화로 구분을 하였다. 이러한 정당화 유형의 구분은 증명 수업 방법을 설계하는 데 도움

이 될 수 있으며, 또한 학생들의 증명 수준을 평가하는 기준이 될 수 있을 것으로 보인다. 그러나 이러한 정당화 유형의 구분이 전부라고 할 수는 없으며, 다만 앞에서 제시된 정당화 유형과 증명의 의미와 역할에 대한 다양한 관점을 토대로, 일반적으로 학생들이 연역적 증명을 배우기 전에 갖고 있으리라고 예상되는 정당화 유형을 정리한 것이다. 또한 정당화 유형을 단순화시킨 것은 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호 관계에 초점을 두었기 때문이다.

경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용이 가능한 정당화활동에서 탐구형 소프트웨어의 활용이 권장되어야 한다. 지필환경은 도형의 정확한 작도가 어렵고 측정, 실험 등이 복잡하여 탐구와 추측은 물론 학생들이 갖고 있는 경험적 정당화가 이루어지기 어렵다. 이러한 지필환경의 한계를 탐구형 소프트웨어를 이용하여 해결할 수 있을 것이다. 그러나, 탐구형 소프트웨어를 효과적으로 활용하기 위해서는 과제의 구성과 수업의 조직이라는 쉽지 않은 문제를 고려해야 한다.

본 논문에서 구분한 정당화 유형은 외국의 문헌을 토대로 이루어진 것이며, 교사의 권위 등 교실문화가 다른 우리 나라 학생들의 정당화 유형에 대한 사례 연구가 요구되며, 논증기하를 배운 학생들과 논증기하를 배우기 이 전의 학생들이 갖고 있는 정당화 유형을 비교해 보는 것도 가치가 있을 것이다. 또한 실험과 측정 등을 이용한 경험적 정당화 활동과 경험적 정당화에서 연역적 정당화로의 전이 과정에서 탐구형 소프트웨어의 역할에 대한 사례연구가 요구된다. 탐구형 소프트웨어를 이용하면 예를 만들거나 측정을 하기가 용이한 바, 이때 학생들이 보이는 반응에 대한 연구도 증명 지도의 대안을 마련하는 데 도움이 될 것이다.

참고문헌

강문봉 (1993). 라카토스 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 박사학위논문.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교 기하단원을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 박사학위논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습 지도 방향 탐색—중학교 수학을 중심으로—. 서울대학교 박사학위논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

國宗進 (1992). 圖形の論證指導. 東京: 明治圖書.

Balacheff, N. (1987). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Ed.). *Radical constructivism in mathematics education*(pp. 89-110). Dordchet: Kluwer Academic Publishers.

Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*; 7, 23-40.

Clements, D. F., & Battista, M. T. (1992). geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, 420-464. New York: Macmilan.

Cooney, T. J., Edward, J. D., & Henderson, K. B. (1975). *Dynamics of teaching secondary school mathematics*. Illinois: Waveland Press.

De Villers, M. (1991). Pupils' needs for conviction and explanation within context of geometry. In F. Furinghetti(Ed.). *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education.* 255-262.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London: Falmer Press

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof.* New York, NY: Teachers of College.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as educational task.* D Reidel Publishing Company.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education.* Toronto: Oise Press.

Hanna, G. (1991). Mathematical Proof. In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking*(pp. 54-61). Dordchet: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G., & Janke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop et al.(Eds). *International handbook of mathemarics education-part2* (pp. 877-908). Dortchet: Kluwer Academic Publishers.

Knuth, E. J. & Elliot, R. L. (1998). Characterizing students' understandings of mathematical proof. *The Mathematics Teacher, 91(8)*, 714-717.

Lakatos, I. M. (1976). *Proofs and refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

NCTM (1998). *Principles and standards for school mathematics: Discussion draft. Reston.* VA: The Council.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?. *The Mathematics Teacher. 78(6)*, 448-456.

Simon, M., & Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 3-31.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher, 91(8)*, 670-675.

A study of the types of students' justification and the use of dynamic software

Lew, Hee Chan · Cho, Wan Young

Proof is an essential characteristic of mathematics and as such should be a key component in mathematics education. But, teaching proof in school mathematics have been unsuccessful for many students. The traditional approach to proofs stresses formal logic and rigorous proof. Thus, most students have difficulties of the concept of proof and students' experiences with proof do not seem meaningful to them. However, different views of proof were asserted in the reassessment of the foundations of mathematics and the nature of mathematical truth. These different views of justification need to be reflected in demonstrative geometry classes.

The purpose of this study is to characterize the types of students' justification in demonstrative geometry classes taught using dynamic software. The types of justification can be organized into three categories : empirical justification, deductive justification, and authoritarian justification. Empirical justification are based on evidence from examples, whereas deductive justification are based logical reasoning. If we assume that a strong understanding of demonstrative geometry is shown when empirical justification and deductive justification coexist and benefit from each other, then students' justification should not only some empirical basis but also use chains of deductive reasoning. Thus, interaction between empirical and deductive justification is important.

Dynamic geometry software can be used to design the approach to justification that can be successful in moving students toward meaningful justification of ideas. Interactive geometry software can connect visual and empirical justification to higher levels of geometric justification with logical arguments in formal proof.