

■ 응용논문

− \bar{x} 관리도의 표준관리한계와 부트스트랩 백분율 관리한계의 수행도 비교 평가

Comparison and Evaluation of Performance for Standard Control Limits and Bootstrap Percentile Control Limits in \bar{x} Control Chart

송서일*
Song, Suh Ill
이만웅**
Lee, Man Woong

Abstract

Statistical Process Control(SPC) which uses control charts is widely used to inspect and improve manufacturing process as a effective method. A parametric method is the most common in statistical process control.

Shewhart chart was made under the assumption that measurements are independent and normal distribution. In practice, this assumption is often excluded, for example, in case of \bar{x} chart, when the subgroup sample is small or correlation, it happens that measured data have bias or rejection of the normality test. A bootstrap method can be used in such a situation, which is calculated by resampling procedure without pre-distribution assumption.

In this study, applying bootstrap percentile method to \bar{x} chart, it is compared and evaluated standard process control limit with bootstrap percentile control limit.

Also, under the normal and non-normal distributions, where parameter is 0.5, using computer simulation, it is compared standard parametric with bootstrap method which is used to decide process control limits in process quality.

1. 서론

관리도를 이용한 통계적 공정관리는 제조공정에서 검사하고 개선하는데 효과적인 방법으로 써 널리 사용되고 있다. 이러한 통계적 공정관리에서 가장 일반적으로 이용되는 기법은 모수적 방법이다.

* 동아대학교 산업공학과 교수

** 동아대학교 산업공학과 박사과정

Shewhart 관리도는 관측치가 독립이고 정규분포를 따른다는 가정하에 만들어졌다. 이 가정은 실제적으로 종종 위배되는 경우가 있다. 예를 들어, \bar{x} 관리도에서 하위그룹 샘플이 작거나 상관관계를 가질 경우에는 측정된 데이터의 분포가 치우침을 가지거나 정규성 검사에 위배되는 경우가 발생한다.[1][2] 이때 사용할 수 있는 기법으로는 사전분포의 가정이 없더라도 재샘플링 절차에 의해 계산되는 부트스트랩(bootstrap)방법이 있다.[3]

본 연구에서는 \bar{x} 관리도에서 부트스트랩 백분위수(bootstrap percentile) 방법을 적용하여 표준공정관리한계와 부트스트랩 백분위수를 통한 관리한계를 비교·평가한다.

또한 정규분포와 치우친 분포 하 즉, 감마분포의 모수가 0.5 일 때 시뮬레이션을 통하여 공정의 품질 특성치에 관한 공정관리한계를 결정하기 위한 비모수적 방법인 부트스트랩과 표준모수적 방법을 비교하고자 한다.

2. \bar{x} 관리도의 표준관리한계

일반적으로 관측치가 평균 μ_0 와 표준편차 σ_0 이고, 독립적이고 정규분포한다면, 그 공정은 통계적 관리상태라고 한다. 샘플 크기 n 의 샘플 평균 \bar{x} 는 $N(\mu_0, \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$ 분포를 한다. 대부분의 경우 μ_0 와 σ_0 는 미지이므로, 데이터로부터 추정한다. 보통 n 개의 관측치의 k 개를 공정에서 샘플링한다. 여기서 k 은 적어도 20이상이고, n 은 약 4 또는 5개가 일반적이다. x_{ij} 를 i 번째 샘플에서 j 번째 관측치라 두면, 샘플평균(\bar{x}_i)과 샘플표준편차(s_i)는

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (1)$$

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2} \quad (2)$$

이고, 여기서 $i=1, \dots, k$, $j=1, \dots, n$ 이고 $n \geq 2$ 이다.

공정이 통계적인 관리상태라 가정하면 전체의 평균(\bar{x})과 전체의 표준편차(s)는

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i \quad (3)$$

$$\bar{s} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i \quad (4)$$

이다. 식 (1), (2), (3) 및 (4)를 이용하여 \bar{x} 관리도에서 관리한계를 구하면

$$\bar{\bar{x}} \pm \frac{3}{\sqrt{n}} \sigma = \bar{\bar{x}} \pm A \sigma \quad (A = \frac{3}{\sqrt{n}}) \quad (5)$$

$$\bar{\bar{x}} \pm \frac{3}{C_2 \sqrt{n}} \bar{s} = \bar{\bar{x}} \pm A_1 \bar{s} \quad (A_1 = \frac{3}{C_2 \sqrt{n}}) \quad (6)$$

이고, 표준편차가 기지일 때 식 (5)를 이용하고, 미지일 때는 식 (6)을 이용한다.

3. 부트스트랩 백분■의 관리한계

Efron(1979)에 의해서 처음 제안된 부트스트랩은 통계량의 샘플링 분포를 효과적으로 예측하는 계산적 기법이다. 특별히 샘플이 추출된 모집단을 대표한다는 가정이 있을 때, 그리고 관측치들이 독립적이고 연속적인 분포일 때 통계량의 샘플링 분포를 예측하는 비모수적 부트스트랩을 이용할 수 있다. 이 간단한 형태에서 비모수적 부트스트랩은 샘플이 추출된 것인 근원적인 모집단에 관한 분포적 추정에 의존하지 않는다.

Bajgier(1992)는 하위 그룹화된 데이터에 대한 부트스트랩 관리도를 제안했다. 표준 Shewhart 관리도와 그의 제안된 부트스트랩 관리도의 평균 런 길이 ARLs(average run lengths)의 모의실험된 분포들을 그래프화해서 비교함으로써 그의 관리도를 평가했다. Bajgier(1992)의 기법은 부트스트랩 관리도의 수행도의 의미있는 평가를 제시했다. Seppala, Moskowitz, Plante 와 Tang(1995)은 데이터의 하위집단의 평균 또는 표준편차를 감시하는데 사용될 수 있는 하위집단 부트스트랩이라 불리는 기법을 제안했다. Seppala 등(1995)은 하위집단 부트스트랩의 수행도를 평가하는데 모의실험된 범위라 불리는 척도를 사용했다. Liu 와 Tang(1996)은 하위집단화된 데이터에 대한 관리도를 설계하는데 유사한 기법을 제시했다. 그들은 실제 관리도와 부트스트랩 관리도에서의 차이점을 살펴봄으로써, 그들 관리도의 수행도를 평가했다. 그러나 모의실험된 범위도 실제 한계와 부트스트랩 한계와의 차이도 부트스트랩 관리도의 적당한 그림을 제시할 수는 없었다.

따라서, 본 연구에서는 하위집단 부트스트랩은 측정치들은 식 (7)에 의해 설명된다고 가정한다.

$$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

이 때 $i = 1, 2, \dots, k$ 그리고, $j = 1, 2, \dots, n$ 이다. 여기서 μ_i 는 i 번째 하위집단의 실제 평균이고, ε_{ij} 는 랜덤오차의 조건이다. 하위집단 부트스트랩에 대한 알고리즘은 다음과 같다.

1. $n \cdot k$ 총 측정치에 대한 n 크기의 k 하위집단을 관측한다.
2. $i = 1, 2, \dots, k$ 그리고, $j = 1, 2, \dots, n$ 에 대해서 $e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i$ 를 계산한다. 이 때, \bar{x}_i 는 i 번째 하위집단의 샘플평균이다.
3. 단계 2에서 계산된 $n \cdot k$ 잔차들의 샘플의 집합에서 복원으로 n 크기의 랜덤샘플을 추출한다. 이 샘플 $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ 은 부트스트랩 샘플이다.
4. $j = 1, 2, \dots, n$ 에 대해서 $x_j^* = \bar{x} + a \cdot e_j^*$ 를 계산한다. 여기서 $a = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ 은 샘플링된 하위 집단의 분산을 조정하는데 사용되는 상관관계인자이다.
5. $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ 으로부터 샘플평균 \bar{x}^* 을 계산한다.
6. 큰 숫자 B 회 만큼 단계 3-5를 반복한다.
7. B 부트스트랩 예측치 $\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_B^*$ 를 소트(sort)한다.
8. $\frac{a}{2} \cdot B$ 값보다 큰 최소의 \bar{x}^* 값을 찾는다. 이것이 부트스트랩 관리하한 LCL이다.

9. $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot B$ 값보다 큰 최소의 \bar{x}^* 값을 찾는다. 이것이 부트스트랩 관리상한 UCL이다.

여기서 다시 α 는 관리도에서 관리한계를 벗어날 확률이다.

그리고 각각의 관리한계의 정확한 포함확률(*CVG*; coverage probability)은 식 (8)과 같이 계산된다.

$$CVG = P(\bar{x}_n < UCL) - P(\bar{x}_n < LCL) \quad (8)$$

이 때 UCL과 LCL은 하위집단 부트스트랩의 관리상한과 관리하한이다. 그러나 Seppala 등 (1995)은 관리상한과 관리하한 각각에 대해서 시뮬레이션된 범위를 계산했다. 그들은 시뮬레이션된 범위의 측정치를 계산하는데 측정치를 어떻게 계산하는지 구체적으로 언급하지는 않는다. 이 시뮬레이션에서 식 (8)에 따라서 각각의 관리한계의 조합에 대해서 *CVG*를 찾음으로써 평균포함확률(*CVG_{avg}*; average of coverage probability)이 계산된다. 관리한계의 시뮬레이션된 숫자는 NSIM(number of simulation)이라고 표현하고, 이를 *CVG*값들의 평균은 *CVG_{avg}* 즉 식 (9)와 같다.

$$CVG_{avg} = \frac{1}{NSIM} \sum_{i=1}^{NSIM} CVG_i \quad (9)$$

NSIM 관리상한(*UCL_{avg}*)이 처음 평균이 되었을 때 Seppala 등(1995)과 유사한 결과가 발견되었고, NSIM 관리하한(*LCL_{avg}*)도 평균화하였다. *CVG_{avg}*는 다음과 같이 계산된다.

$$CVG_{avg} = P(\bar{x}_n < UCL_{avg})$$

그리고

$$CVG_{avg} = P(\bar{x}_n > LCL_{avg})$$

관리도의 상한과 하한에 대한 *CVG_{avg}*는 식 (9)에 의해서 각각 계산된다. 그리고 관리도의 상한과 하한에 대한 관리도의 수행도 평가를 위해 평균련 길이(*ARL*)로 평가하였고, 이때 *ARL_{avg}*는 다음식에 의해서 각각 계산된다.

$$ARL_{avg} = \frac{1}{NSIM} \sum_{i=1}^{NSIM} \frac{1}{(1 - CVG_{avg})}$$

따라서, 표준 \bar{x} 관리도와 부트스트랩 방법에 의한 \bar{x} 관리도의 비교는 바람직한 *ARL_{avg}*를 비교하여 관리도의 수행도를 평가한다.

4. 시뮬레이션

본 연구에서는 \bar{x} 관리도의 수행도를 평가하기 위해 관리한계를 벗어날 확률이 10%일 때 표준관리한계와 부트스트랩 백분율 관리한계를 비교하고, 이때 각 공정 상태는 정규분포상태와 차우친 분포 즉, 감마분포에서 모수가 0.5일 때로 가정하여 시뮬레이션 하였다.

그 결과는 아래의 [표 1], [표 2], [표 3] 및 [표 4]와 같다.

[표 1] 정규분포하에서 표준방법과 부트스트랩 방법의 관리한계 비교 ($\alpha = 0.1$)

분포	정규 분포 N(0,1)				
	n	5	10	5	10
샘플 크기	k	5	5	20	20
UCLavg	standard	0.7244 (0.0074)	0.7236 (0.0052)	0.5233 (0.0048)	0.5260 (0.0020)
	bootstrap	0.7235 (0.0075)	0.7221 (0.0052)	0.5228 (0.0048)	0.5256 (0.0024)
	desired	0.7356	0.7356	0.5201	0.5201
LCLavg	standard	-0.7367 (0.0075)	-0.7331 (0.0051)	-0.5164 (0.0049)	-0.5136 (0.0024)
	bootstrap	-0.7394 (0.0076)	-0.7353 (0.0052)	-0.5167 (0.0050)	-0.5139 (0.0025)
	desired	-0.7356	-0.7356	-0.5201	-0.5201
CVGavg	standard	0.8512 (0.0027)	0.8742 (0.0015)	0.8608 (0.0020)	0.8898 (0.0007)
	bootstrap	0.8512 (0.0020)	0.8736 (0.0010)	0.8605 (0.0020)	0.8895 (0.0000)
	desired	0.9000	0.9000	0.9000	0.9000
ARLavg	standard	9.3831 (0.2088)	9.2443 (0.1263)	8.5943 (0.1183)	9.4527 (0.0605)
	bootstrap	9.4326 (0.2138)	9.2680 (0.1301)	8.6008 (0.1194)	9.4654 (0.0642)
	desired	10.000	10.000	10.000	10.000

[표 1]로부터 정규분포의 가정하에서 샘플링된 자료에서는 대부분의 경우 표준 \bar{x} 관리도와 부트스트랩 방법에 의한 \bar{x} 관리도는 바람직한 ARL_{avg} 를 비교하여 볼 때 비교적 근사하게 나온다.

[표 2] 표준 \bar{x} 관리도와 부트스트랩 관리도의 수행도 비교(모수가 0.5일 때)

분포		감마 분포 ($\alpha = 0.1$)			
모수	(r, λ)	(0.5,1)			
하위그룹 크기	n	5	10	5	10
샘플 크기	k	5	5	20	20
UCLavg	standard	0.9854 (0.0094)	0.8600 (0.0058)	1.0138 (0.0050)	0.8662 (0.0029)
	bootstrap	1.0335 (0.0101)	0.8953 (0.0062)	1.0782 (0.0056)	0.9087 (0.0032)
	desired	1.1070	0.9154	1.1070	0.9154
LCLavg	standard	0.0163 (0.0033)	0.1432 (0.0019)	-0.0095 (0.0019)	0.1350 (0.0011)
	bootstrap	0.0800 (0.0022)	0.1905 (0.0016)	0.0648 (0.0013)	0.1866 (0.0008)
	desired	0.1145	0.1970	0.1145	0.1970
CVGavg	standard	0.8570 (0.0037)	0.8668 (0.0029)	0.9136 (0.0015)	0.9072 (0.0013)
	bootstrap	0.8496 (0.0035)	0.8542 (0.0025)	0.9114 (0.0015)	0.8942 (0.0011)
	desired	0.9000	0.9000	0.9000	0.9000
ARLavg	standard	24.1585 (2.0177)	18.6110 (2.0269)	16.7170 (0.4928)	13.363 (4.2404)
	bootstrap	28.1059 (4.7648)	9.748 (0.2657)	18.1647 (0.8398)	10.6069 (0.1294)
	desired	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000

[표 3] 표준 \bar{x} 관리도와 부트스트랩 관리도의 수행도 비교(모수가 1일 때)

분포		감마 분포 ($\alpha = 0.1$)			
모수	(r, λ)	(1,1)			
하위그룹 크기	n	5	10	5	10
샘플 크기	k	5	5	20	20
UCLavg	standard	1.7130 (0.0118)	1.7395 (0.0056)	1.5190 (0.0070)	1.5183 (0.0036)
	bootstrap	1.7716 (0.0126)	1.8074 (0.0062)	1.5578 (0.0074)	1.5602 (0.0039)
	desired	1.8307	1.5705	1.8307	1.5705
LCLavg	standard	0.2881 (0.0049)	0.2712 (0.0025)	0.4926 (0.0031)	0.4874 (0.0016)
	bootstrap	0.3581 (0.0040)	0.3493 (0.0020)	0.5395 (0.0029)	0.5368 (0.0015)
	desired	0.3940	0.5425	0.3940	0.5425
CVGavg	standard	0.8559 (0.0033)	0.9077 (0.0013)	0.8646 (0.0024)	0.8967 (0.0011)
	bootstrap	0.8506 (0.0031)	0.9006 (0.0012)	0.8568 (0.0022)	0.8885 (0.0010)
	desired	0.9000	0.9000	0.9000	0.9000
ARLavg	standard	17.9715 (1.4934)	13.6907 (0.2691)	10.6845 (0.2936)	10.9248 (0.1322)
	bootstrap	13.7145 (0.7319)	12.2100 (0.2316)	8.9487 (0.1663)	9.7034 (0.0913)
	desired	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000

[표 4] 표준 \bar{x} 관리도와 부트스트랩 관리도의 수행도 비교(모수가 5일때)

분포		감마 분포 ($\alpha=0.1$)			
모수	(r, λ)	(5,1)			
하위그룹 크기	n	5	10	5	10
샘플 크기	k	5	5	20	20
UCLavg	standard	6.6112 (0.0203)	6.6549 (0.0104)	6.1497 (0.0131)	6.1495 (0.0064)
	bootstrap	6.6703 (0.0211)	6.7271 (0.0110)	6.1903 (0.0134)	6.1930 (0.0067)
	desired	6.7505	6.2171	6.7505	6.2171
LCLavg	standard	3.3713 (0.0127)	3.3694 (0.0065)	3.8924 (0.0089)	3.8373 (0.0043)
	bootstrap	3.4388 (0.0121)	3.4459 (0.0063)	3.8472 (0.0090)	3.8836 (0.0044)
	desired	3.4764	3.8965	3.4764	3.8965
CVGavg	standard	0.8542 (0.0027)	0.8922 (0.0011)	0.8578 (0.0023)	0.8904 (0.0008)
	bootstrap	0.8520 (0.0027)	0.8897 (0.0011)	0.8554 (0.0023)	0.8885 (0.0008)
	desired	0.9000	0.9000	0.9000	0.9000
ARLavg	standard	10.2658 (0.4219)	10.3905 (0.1240)	8.9337 (0.1573)	9.6106 (0.0710)
	bootstrap	9.4970 (0.2247)	10.0426 (0.1133)	8.6059 (0.1384)	9.4336 (0.0684)
	desired	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000

[표 2]에서 [표 4]까지의 치우친 분포 하, 즉 감마분포하에서 샘플링된 자료에서는 각 모수의 변화에 따른 부트스트랩 방법에 의한 \bar{x} 관리도와 표준방법에 의한 \bar{x} 관리도를 비교하여 보면, 감마분포의 모수가 0.5이고 $n=5$, $k=5$ 인 경우에는 ARL_{avg} 가 아주 크게 나오나, 그외 다른 샘플크기에 대해서는 부트스트랩 방법의 ARL_{avg} 가 바람직한 ARL_{avg} 에 가까워진다.

그러나 부트스트랩 기법을 적용할 때 문제점은 모수가 0.5에서 나타나듯이 샘플수가 작고 그 군 또한 작을 때 극단적인 값에 민감하다는 것이다.

따라서 부트스트랩 기법을 표준 \bar{x} 관리도에 사용할 때 관리한계를 설정하기 전에 공정이 관리상태인지 그렇지 않은지를 먼저 확인하여 사전분포를 모를 경우 부트스트랩 방법에 의한 관리한계를 설정하는 것이 좋다고 할 수 있겠다.

5. 결론

이 시뮬레이션 연구의 결과들로부터 부트스트랩 관리도가 정규분포상태하의 관리상태의 평균 런 길이의 조건에서 수행도가 평가될 때 표준기법보다 실제적으로 더 나은 수행도를 보이지 못하지만 근사적으로 나타나고, 극단적으로 치우친 분포를 가질 때, 부트스트랩 기법은 표

준 Shewhart 기법보다 실제 백분률값이 평균에 더 근사한 추정치를 만들어내고 있다.

따라서 사전분포의 가정이 없을 경우 적용되는 부트스트랩 기법은 비모수적 관리도를 사용하고자 하는 품질담당자들은 먼저 공정이 관리상태인지 아닌지의 주의를 가지고 부트스트랩 관리도를 사용하여 개선을 행할 수 있으며, 부트스트랩 기법과 관련되어 산출된 이론적인 결과를 확장·적용하여 개선의 기회로 삼을 수 있을 것이다.

앞으로는 작은 공정변화에 민감한 EWMA 관리도에 부트스트랩 기법의 적용과 결합 \bar{x} -EWMA 관리도의 적용에 관해, 그리고 자기상관관계를 가지고 있는 데이터를 감시하는 기법에 좀더 깊은 연구가 있어야겠으며, 부트스트랩 기법을 다변량 데이터로 확장하는 것 역시 앞으로 많은 연구가 있어야겠다.

참 고 문 헌

- [1] Alwan, L. C. and Roberts, H. V., "Time Series Modeling for Statistical Proecss Control." *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 6, No. 1, pp. 87-95, 1988
- [2] Montgomery, D. C. and Mastrangelo, C.M., "Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data." *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 3, pp. 179-193, 1991
- [3] Efron, B., "Bootstrap Method : Another Look at the Jackknife." *Annals of Statistics*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-26, 1979
- [4] Bajgier, S. M., "The Use of Bootstrapping to Construct Limits on Control Charts." *Proceedings of the Decision Science Institute*, San Diego, CA, pp. 1611-1613, 1992
- [5] Seppala, T., Moskowitz, H., Plante, R. and Tang, J., "Statistical Process Control via the Subgroup Bootstrap." *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, No. 2, pp. 139-153, 1995
- [6] Liu, R. Y. and Tang, J., "Control Charts for Dependent and Independent Measurements Based on the Bootstrap." *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 91, No. 436, pp. 1694-1700, 1996