

재질이 주기적으로 불균일한 보의 굽힘 진동 해석

Flexural Vibration of a Bar with Periodically Nonuniform Material Properties

김진오*, 문병환*, 김준태**

(Jin Oh Kim*, Byung Hwan Moon*, Jun Tai Kim**)

* 본 논문은 숭실대학교 1998년도 교내연구비 지원에 의한 결과입니다.

요약

본논문은 재질의 물성치가 주기적으로 불균일한 탄성보의 굽힘 진동에 관한 이론적 결과를 제시한다. 굽힘강성과 밀도의 조화함수적 변화에 대한 섭동기법에 의해 고유진동수와 모드형상의 근사해를 구하였다. 유한요소법에 의한 수치해로써 근사해의 경향을 검증하였다. 해석결과 저차모드에서도 분할된 분포진동모드가 공존하고 있으며 이러한 접근방법을 확장하여 평판스피커용 불균일 평판의 진동해석에 적용할 수 있음이 확인되었다.

ABSTRACT

The paper describes a theoretical study on the flexural vibration of an elastic flat bar with periodically nonuniform material properties. The approximate solution of the natural frequency and mode shape has been obtained using the perturbation technique for sinusoidal modulation of the flexural rigidity and mass density. The numerical solution obtained by using the finite element method verifies the trend of the approximate solution. It appears that distributed vibrations exist in the low modes, and this approach can be extended to the vibration analysis of the plate in the flat panel speaker.

I. 서론

지난 수십 년간 사용되어온 상자형 스피커와 다른 형태인 '평판 스피커'가 최근에 출현하였다[1,2]. 기존의 스피커는 보이스코일에 전달되는 전기신호에 따라 원뿔형막이 진동하여 소리를 방사하는 방식으로서, 그 음향특성을 해석하고 설계하는 체계적인 방법들이 이미 확립되어 있다[3,4]. 이에 비해 얇고 가벼운 평판 스피커는 평판 내에 분포된 진동 모드에 의해 인접 공기를 떨어주는 방식인데, 효율적으로 소리를 방사하기 위해서 Fig. 1에 보인 바와 같이 평판 내부가 복잡한 형상으로 이루어지기 때문에 그 이론적 뒷받침이 완성되어 있지 않다.

평판 스피커의 개발은 판 구조물에서의 소음 방사를 억제시키려는 연구 과정에서 얻어진 역설적 부산물이다. 비행기 동체와 같이 일정한 간격으로 보강된 구조물에서의 진동에 의한 소음 방사 현상은 오래 전부터 연구대상으로 다루어졌다[5,6,7]. 그러한 연구 결과에 따르면 보강 간격의 불규칙성이 소음 방사를 제한할 수 있음이 보여진다[8]. 따라서 판 구조물에 규칙적 주기성을 유지함으로써

음향 방사를 증대할 수 있다는 것이고, 이것이 평판 스피커의 원리이다. 기존의 연구보고들은 주기적으로 보강된 구조물을 주기적으로 지지된 조건으로 가정하여 해석하거나[5,6], 주기에 해당하는 간격의 균일한 요소들이 결합되었다고 가정하여 결합부에서의 파동 전달로 해석한 것으로서[7], 재질이 주기적으로 불균일한 판의 분포진동모드를 해석하지는 않았다.

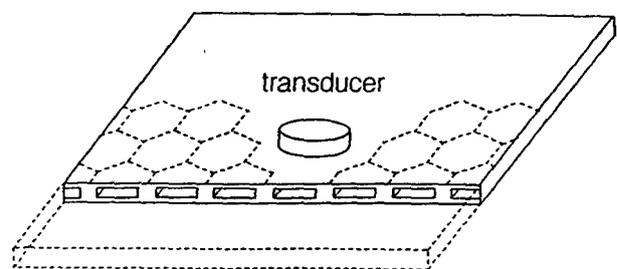


그림 1. 평판 스피커의 개략도

Fig. 1. Schematic diagram of the flat-panel speaker.

본 연구는 평판 스피커의 음향특성을 향상시키는 설계에 활용할 해석적 해를 구하기 위한 목적으로 시작되었다. 평판의 진동특성 해석은 보의 진동특성 해석에서 출발할 수 있다. 또한 수학적으로 주기함수는 조화함수의 Fourier

* 숭실대학교 공과대학 기계공학과

** 삼성종합기술원 수퍼컴퓨팅Lab.

접수일자: 1999년 1월 11일

급수 형태로 표현할 수 있다. 따라서 Fig. 1에 보인 평판을 단순화하여 Fig. 2에 보인 바와 같이 조화함수 형태로 재질 물성치가 변화하는 보를 대상으로 하였다. 보에 대한 해석은 그 과정이 향후에 평판에 대한 해석에 기반이 될 수 있을 뿐만 아니라, 그 결과로부터 평판의 진동모드 경향을 예상할 수 있게 해준다. 주기적 구조물을 대상으로 진동을 해석함에 있어서, 주기에 해당하는 간격의 균일한 요소들이 결합되었다고 가정하고 접근하는 방법[5,6,7]은 다소 복잡한 반면, 주기적 변화량을 섭동(perturbation)량으로 취급하는 방법[9,10,11]은 근사해를 훨씬 간편히 구하게 해준다. 본 논문은 주기적으로 불균일한 재질의 보에서의 굽힘 진동모드에 대해 섭동기법에 의해 근사해를 구하고 유한요소법으로 검증한 결과를 제시한다.

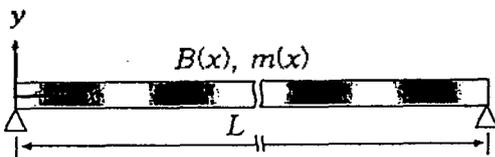


그림 2. 재질이 주기적으로 불균일한 일차원 보 모델
Fig. 2. One-dimensional bar model with periodically nonuniform material properties.

II. 문제의 정식화

Fig. 2에 보인 바와 같이 굽힘 강성이 $B(x)$, 단위길이당 질량이 $m(x)$ 이고 길이가 L 인 탄성 보의 굽힘 진동의 운동방정식은 횡방향 변위를 $y(x,t) = Y(x) \exp(i\omega t)$ 로 할 때 $Y(x)$ 로써 다음과 같이 표현된다[12].

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[B(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] = \omega^2 m(x) Y(x) \quad 0 < x < L \quad (1)$$

보의 양단이 단순 지지되어 있으면 경계조건은 다음과 같이 표현된다

$$Y(0) = 0 \quad B(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2a, b)$$

$$Y(L) = 0 \quad B(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (2c, d)$$

보의 재질이 위치에 따라 주기적으로 변화하는 경우, $B(x)$ 와 $m(x)$ 는 각각 다음과 같이 조화함수를 이용하여 표현할 수 있다.

$$B(x) = B_0 (1 + \varepsilon \sin \alpha x) \quad (3)$$

$$m(x) = m_0 (1 + \varepsilon \gamma \sin \alpha x) \quad (4)$$

여기서 ε 는 평균값 B_0 를 기준으로 한 강성 변화 폭이고, $\varepsilon \gamma$ 는 평균값 m_0 를 기준으로 한 단위길이당 질량 변화 폭이다. 또한 α 는 단위길이당 물성치 변화 횟수로서, 편의상 $\alpha L = (2k+1)\pi$ (k 는 정수)로 전제하여, $\sin \alpha L = 0$ 으로 한다. 이와 같이 굽힘 강성과 밀도가 위치 x 에 따라 변화하는 경우 엄밀해를 구할 수 없으므로 다음과 같이 근사해를 구한다.

III. 섭동기법에 의한 근사해

식(1)-(4)로 정의된 경계치 문제는 식(3)-(4)로 표현된 물성치로 인해 엄밀해를 구할 수 없으므로 근사해법을 사용하게 되는데, 물성치가 위치 x 에 따라 섭동량만큼 주기적으로 변화하고 있어 섭동기법[13,14]을 채택한다. 이를 위해 변위 진폭 $Y(x)$ 와 고유진동수 ω 를 다음과 같이 섭동량 ε 의 급수로 전개한다.

$$Y(x) = Y_0(x) + \varepsilon Y_1(x) + \varepsilon^2 Y_2(x) + \varepsilon^3 Y_3(x) + \dots (5)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots (6)$$

식(5)-(6)을 식(1)-(2)에 대입하고 ε 의 오름차순으로 정리하여, ε 의 차수별 운동방정식과 경계조건에 대해 다음과 같이 단계적으로 해를 구한다.

3.1 $O(\varepsilon^0)$ 해

선도차수 $O(\varepsilon^0)$ 에 대해서 다음과 같이 고전적인 굽힘 진동 방정식과 경계조건을 얻는다.

$$\frac{d^4 Y_0}{dx^4} - \beta^4 Y_0 = 0 \quad (7)$$

$$Y_0(0) = 0, \quad \frac{d^2 Y_0}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (8a, b)$$

$$Y_0(L) = 0, \quad \frac{d^2 Y_0}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (8c, d)$$

여기서

$$\beta^4 = \frac{m_0 \omega_0^2}{B_0} \quad (9)$$

식(7)-(8)로 정의된 문제의 해는 잘 알려진 대로 다음과 같다.

$$Y_{0,n} = A_{0,n} \sin \beta_n x \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

$$\beta_n L = n\pi, \quad \omega_{0,n} = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{B_0}{m_0 L^4}} \quad (11a,b)$$

여기서 n 은 진동모드를 나타내고, $A_{0,n}$ 은 진폭으로서 $A_{0,n}=1$ 로 정규화할 수 있다.

3.2 $O(\epsilon^1)$ 해

제1차수 $O(\epsilon^1)$ 에 대한 경계치 문제는 $Y_1(x)$ 에 대한 문제로서 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 Y_1}{dx^4} - \beta^4 Y_1 &= -\sin \alpha x \frac{d^4 Y_0}{dx^4} - 2a \cos \alpha x \frac{d^3 Y_0}{dx^3} \\ &\quad + a^2 \sin \alpha x \frac{d^2 Y_0}{dx^2} \\ &\quad + \frac{m_0}{B_0} (2\omega_0 \omega_1 + \omega_0^2 \gamma \sin \alpha x) Y_0 \\ &= 2A_0 \beta^4 \frac{\omega_1}{\omega_0} \sin \beta x \\ &\quad + \frac{1}{2} A_0 \beta^4 ((\beta + \alpha)^2 - \beta^2 \gamma) \cos(\alpha + \beta)x \\ &\quad - \frac{1}{2} A_0 \beta^4 ((\beta - \alpha)^2 - \beta^2 \gamma) \cos(\alpha - \beta)x \end{aligned} \quad (12)$$

$$Y_1(0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 Y_1}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad (13a,b)$$

$$Y_1(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 Y_1}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (13c,d)$$

식(12)-(13)으로 정의된 경계치 문제의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y_{1,n}(x) &= A_{1,n} \sin \beta_n x + D_2 \cos \beta_n x + D_3 \sinh \beta_n x \\ &\quad + D_4 \cosh \beta_n x \\ &\quad + \frac{1}{2} A_{0,n} \beta_n \frac{\omega_{1,n}}{\omega_{0,n}} x \cos \beta_n x \\ &\quad + \frac{1}{2} A_{0,n} \beta_n^2 \left\{ \frac{(\alpha + \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha + \beta_n)^4 - \beta_n^4} \right\} \cos(\alpha + \beta_n)x \\ &\quad - \frac{1}{2} A_{0,n} \beta_n^2 \left\{ \frac{(\alpha - \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha - \beta_n)^4 - \beta_n^4} \right\} \cos(\alpha - \beta_n)x \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

$$D_2 = \frac{1}{4} A_{0,n} \left\{ \frac{(\alpha - \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha - \beta_n)^2 + \beta_n^2} - \frac{(\alpha + \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha + \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right\} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} D_3 &= -\frac{A_{0,n}}{4 \sinh \beta_n L} \left[\left\{ \frac{(\alpha + \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha + \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(\alpha - \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha - \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right\} \cosh \beta_n L \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{(\alpha - \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha - \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right\} \cos(\alpha - \beta_n)L \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{(\alpha + \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha + \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right\} \cos(\alpha + \beta_n)L \right] \end{aligned} \quad (15b)$$

$$D_4 = \frac{1}{4} A_{0,n} \left\{ \frac{(\alpha + \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha + \beta_n)^2 + \beta_n^2} - \frac{(\alpha - \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha - \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right\} \quad (15c)$$

그리고

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{1,n}}{\omega_{0,n}} &= \frac{-1}{2\beta_n L \cos \beta_n L} \left[\left\{ \frac{(\alpha - \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha - \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(\alpha + \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha + \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right\} \cos \beta_n L \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{(\alpha + \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha + \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right\} \cos(\alpha + \beta_n)L \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{(\alpha - \beta_n)^2 - \beta_n^2 \gamma}{(\alpha - \beta_n)^2 + \beta_n^2} \right\} \cos(\alpha - \beta_n)L \right] \end{aligned} \quad (16)$$

식(14)와 (16)은 모드형상 $Y(x)$ 와 고유진동수 ω 에 대한 제1차수 근사해이다.

3.3 고유진동수와 모드형상

지금까지 얻은 결과로부터 고유진동수와 모드형상에 대한 근사해를 구성한다.

$$\frac{\omega_n}{\omega_{0,n}} = 1 + \epsilon \frac{\omega_{1,n}}{\omega_{0,n}} + O(\epsilon^2) \quad (17)$$

$$Y_n(x) = Y_{0,n}(x) + \epsilon Y_{1,n}(x) + O(\epsilon^2) \quad (18)$$

보 재질의 주기성 αL , ϵ 및 γ 가 주어지고, 진동변위 진폭을 $A_{0,n}=1$ 및 $A_{1,n}=0$ 으로 하여 정규화 하면, 식(17)과 (18)로부터 주기적 불균일 재질 보의 고유진동수와 모드형상을 계산할 수 있다.

IV. 결과 및 토의

앞에서 구한 근사해를 검증하고 수학적 해가 의미하는 물리적 현상을 파악하기 위하여, $\alpha L = 21\pi$ (즉 $k=10$), $\epsilon = 0.5$, $\gamma = 0$ 인 경우에 대해 고유진동수와 모드형상을 계산하였다. 근사해에 대입하여 계산한 결과와 비교하기 위해 MSC/NASTRAN을 사용하여 유한요소해석을 행하여 수치해를 구하였다. 여기서는 양단 단순지지된 보를 400개의 CBAR 요소로 분할하였으며, 각 절점에서 수평 횡방향 변위를 구속하고 수직 횡방향 변위만 허용하였다. 그리고 고유치 문제 해법으로 Lanczos법을 택하였다.

4.1 고유진동수

4.1 고유진동수

식(17)을 이용해 기본모드로부터 십여 개의 모드에 대해 고유진동수비 ω/ω_0 를 계산한 결과를 Fig. 3에 ●로 표현하였다. 또한 유한요소해석 결과를 ○로 나타내었다. 여기서 β 는 식(11a)에 표현된 진동모드 파수(wavenumber)이고, α 는 식(3)에 표현된 단위길이당 물성치 변화횟수 즉 재질 주기성 파수로서, 무차원 변수 β/α 는 파수 비이다. 근사해와 수치해 결과들이 공통적으로 보여주다시피, 재질의 주기성이 고유진동수에 미치는 영향은 기본모드 부근의 저차모드에서는 거의 없으나, $\beta/\alpha=0.5$ 부근에서 점프하였다가 고차모드로 갈수록 다시 영향이 없게 되는 경향을 나타낸다. 두 결과의 차이는 제1차수 $O(\epsilon^2)$ 까지만 구해놓은 근사해의 오차로서, 다음 차수까지 연장하여 해를 구하면 그 차이는 줄어들 것이다.

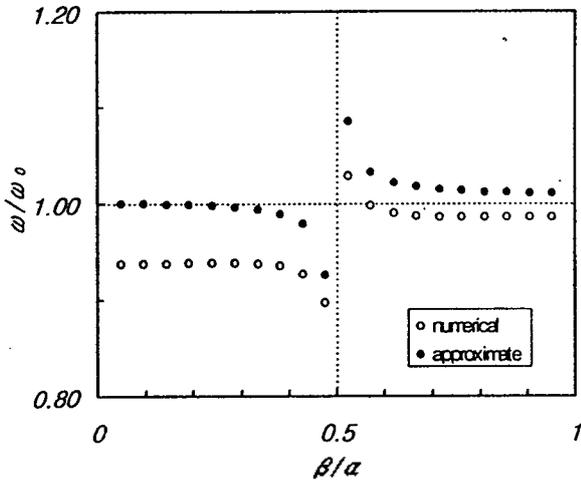


그림 3. 주기적으로 불균일한 보의 고유진동수 ω 를 균일한 보의 고유진동수 ω_0 로 정규화한 결과. 진동수 비 w/w_0 는 여러모드에 대해 계산되었고 β/α 의 함수로 표현되었다
Fig. 3. Natural frequency of the periodically nonuniform bar, ω , normalized to the natural frequency of the uniform bar, ω_0 . The frequency ratio ω/ω_0 has been calculated for several modes and depicted as a function of β/α .

4.2 모드형상

식(18)을 이용해 기본모드부터 4개의 모드에 대해 모드형상 $Y(x)$ 를 계산한 결과를 Fig. 4의 (a)-(d)에 실선으로 나타내었다. 또한 유한요소해석 결과는 점선으로 나타내었다. 그런데 이 그림들에서는 모드형상들이 균일 보의 모드형상 $Y_0(x)$ 과 유사한 모습을 보여주지만 재질 주기성이 모드형상에 미치는 영향은 파악되기 어렵다. 그래서 불균일 재질 보의 모드형상에서 균일 재질 보의 모드형상을 제거한 결과, 즉 $Y-Y_0$ 를 Fig. 5의 (a)-(d)에 표현하였다. 이 그림들에서 알 수 있다시피, 주기적 불균일 재질 보의 고유진동모드에는 주기성의 영향이 분할모드로 포함되어 있다. 이러한 모드형상은 마치 고차모드의 진동이 저차모드에서 함께 발생하는 것처럼 나타나며, 평판스피커에서

음향발생 원리로 작용하는 것이다.

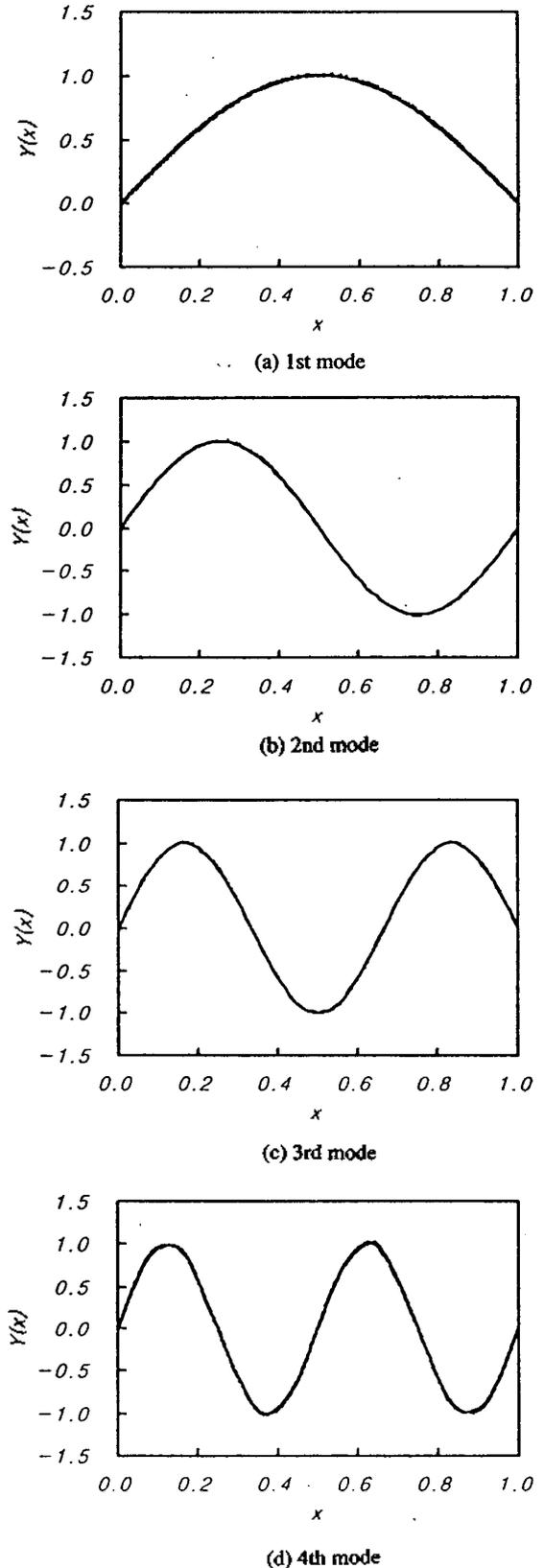
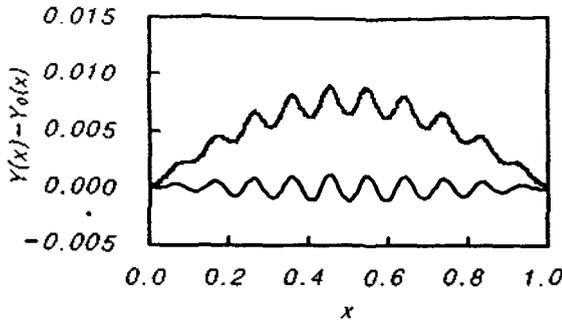
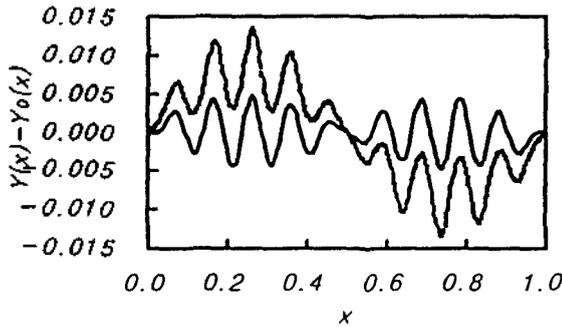


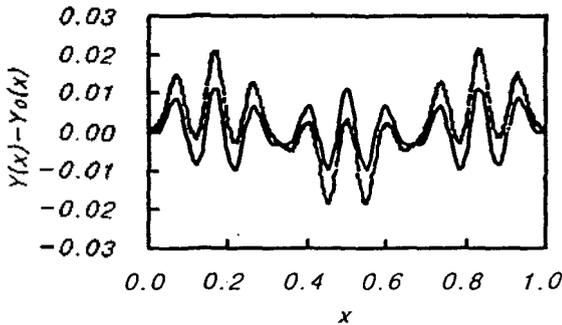
그림 4. 주기적으로 불균일한 보의 모드 형상 (—근사해, ---수치해)
Fig. 4. Mode shapes of the periodically nonuniform bar. (— approximate, --- numerical solutions)



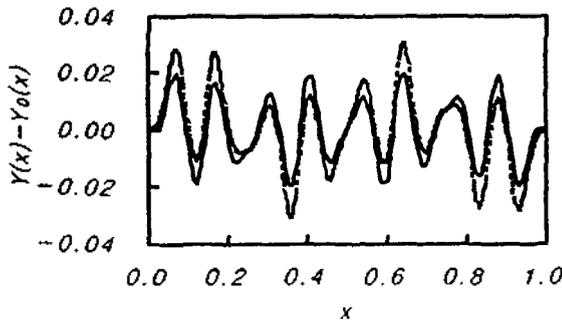
(a) 1st mode



(b) 2nd mode



(c) 3rd mode



(d) 4th mode

그림 5. 주기적으로 불균일한 보의 모드 형상에서 균일한 보의 모드 형상을 뺀 결과 (— 근사해, --- 수치해)

Fig. 5. Mode shapes of the periodically nonuniform bar subtracted by the corresponding mode shapes of the uniform bar. (— approximate, --- numerical solutions)

재질이 주기적으로 불균일한 보의 진동을 섭동기법으로 근사해를 구하고 그 결과를 유한요소법으로 검증한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 재질의 주기성에 따라 분할된 분포진동 모드가 저차모드에서 공존한다. 이는 평판스피커에 사용되는 주기적 불균일 재질 평판의 분포진동 발생 원리이다. 둘째, 섭동법에 의해서 구한 근사해에 형상과 재질의 수치를 대입하여 편리하게 주기적 불균일 재질 보의 진동특성을 계산할 수 있게되었다. 이러한 근사해 유도과정을 확장하여 주기적 불균일 재질 평판에 적용하면 평판스피커에 관한 연구에 직접 활용될 있을 것이다.

참고 문헌

1. N. Harris, M. O. Hawksford, "The Distributed-Mode Loudspeaker as a Broad-Band Acoustic Radiator", Audio Engineering Society 103rd Convention Preprint 4526 (D-6), 1997.
2. M. Colloms, High Performance Loudspeakers, 5th ed., John Wiley & Sons, New York, 1997, pp. 39-50.
3. 김정호, 김준태, 김진오, 민전기, "진동/음향 해석에 의한 스피커의 음향특성 연구", 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제10호, pp.1742-1756, 1997.
4. 김준태, 김정호, 김진오, "직접방사형 스피커의 음향특성 해석 및 설계", 한국소음진동공학회지, 제8권, 제2호, pp.274-282, 1998.
5. G. Sen Gupta, "Natural Flexural Waves and the Normal Modes of Periodically Supported Beams and Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 13, pp. 89-101, 1970.
6. D. J. Mead, "Free Wave Propagation in Periodically Supported Infinite Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 11, pp. 181-197, 1970.
7. F. W. Williams, Z. Wanji, P. N. Bennett, "Computation of the Eigenvalues of Wave Propagation in Periodic Substructural Systems", ASME J. of Vibration and Acoustics, Vol. 115, pp. 422-426, 1993.
8. Wave Propagation in a Fluid-Loaded Elastic Plate With Periodically Varying Rigidity", ASME J. of Vibration and Acoustics, Vol. 119, pp. 415-419, 1997.
9. J. O. Kim, H. H. Bau, "Torsional Stress Waves in a Circular Cylinder With a Modulated Surface", ASME J. Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 710-715, 1991.
10. M. A. Hawwa, A. H. Nayfeh, "Acoustic Radiation From Multi-Span Baffled Panels", ASME J. of Vibration and Acoustics, Vol. 119, pp. 80-84, 1997.
11. 김진오, "주기적 불균일 원형막대에서 전파하는 비틀 탄성파", 한국음향학회지, 제17권, 제5호, pp. 79-84, 1998.
12. L. Meirovitch, Elements of Vibration Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1986, Ch. 10.
13. M. Van Dyke, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, The Parabolic Press, Stanford, California, 1975, pp. 36-37.
14. A. H. Nayfeh, Introduction to Perturbation Techniques,

14. A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*,
John Wiley and Sons, New York, 1981, pp. 418-426.

▲김 진 오 (Jin Oh Kim) 1958년 5월 5 일생
 1981년 2월: 서울대학교 기계설계
 학과 (공학사)
 1983년 2월: 서울대학교 기계설계
 학과 (공학석사)
 1983년 3월~1985년 6월: 한국표
 준과학연구원 음향진
 동 연구실 (연구원)

1989년 12월: University of Pennsylvania 기계공학과
 (공학박사)

1989년 11월~1994년 1월: Northwestern University
 (연구조교수)

1994년 3월~1997년 8월: 삼성종합기술원 슈퍼컴응용
 실 (수석연구원)

1997년 9월~현재: 숭실대학교 기계공학과 (조교수)

※주관심분야: 초음파 현상 해석 및 활용, 진동/음향
 해석 및 응용

▲문 병 환 (Byung Hwan Moon) 1975년 10월 24일생
 1993년 3월~현재: 숭실대학교
 기계공학과 재학중

▲김 준 태 (Jun Tai Kim) 1963년 2월 23일생
 1985년 2월: 한양대학교 기계설계학
 과 (공학사)
 1987년 2월: 한양대학교 기계설계학
 과 (공학석사)
 1994년 8월: 소음진동 기술사
 1998년 2월: 한국과학기술원 기계공
 학과 (공학박사)

1987년 1월~현재: 삼성종합기술원 슈퍼컴응용Lab (전
 문연구원)

※주관심분야: vibro-acoustics, noise and vibration