

불량률의 측도로 비정규 공정능력의 평가: Gamma 분포

김홍준

대구산업정보대학 산업안전과

김진수

대전산업대학교 산업공학과

송서일

동아대학교 산업공학과

Using percentage Nonconforming to evaluate Non-Normal Process Capability: Gamma Distributions

Hong Jun Kim

Dept. of Industrial Safety Taegu polytechnic college

Jin Soo Kim

Dept. of Industrial Engineering Taejon National University of Technology

Suh Ill Song

Dept. of Industrial Engineering Dong-A University

Abstract

This paper is a brief review of the different procedures that are available for fitting theoretical distributions to data. The use of each technique is illustrated by reference to a distribution system which including the Pearson, Johnson and Burr functions. These functions can be used to calculate percent out of specification.

Therefore, in this paper a new method for estimating a measure of process capability for Gamma distributed variable data proposed using the percentage nonconforming. Process capability indices combines with the percentage nonconforming information can be used to evaluate more accurately process capability.

1. 서론

비정규공정에 대한 공정능력지수는 Pearson System의 경우 Clements(1989)에 의해 고안되었으며, 그후 Pearn과 Kotz(1994-1995)에 의하여 연구되어왔다. Pearson system의 대안으로 개발된 Johnson system의 경우는 Farnum(1996-1997)에 의해 제안되었다. 최근에 Lovelace(1994)에 의하여 비음수 값을 갖는 공정에 대한 공정능력지수 C_{pb} 가 개발되었고, 그후 Wright(1995)에 의해 C_s 가 개발되었다. 일반적으로 비정규성에 관한 논의는 2가지 주요부분으로 나누어 볼 수 있다.

첫 번째는 특성치 X 의 분포가 특정한 비정규분포를 할 때 지수들과 그것의 추정량의 성질을 조사하는 것이다.

두 번째는 비정규성에 강건하게 만들어진 새로운 공정능력지수의 사용을 고려하고, 비정규성에 관한 평가방법을 제시하는 것이다. 그러나 McCoy(1991)는 정규분포만이 모집단 분포의 정확한 추정치를 잘 반영시키고 있다고 말한다.

본 연구에서는 공정이 감마분포를 하는 비정규공정에 대한 공정능력의 평가를 Pearson system, Gamma 분포의 포아송근사 및 Burr분포의 3가지 분포를 사용하여 규격을 벗어나는 불량률의 측도를 사용함으로써 비정규공정의 공정능력에 대해 보다 합리적인 의사결정을 내릴 수 있는 새로운 공정능력의 측도를 제시하고자 한다.

2. 비정규 공정능력의 선행측도

비정규분포를 하는 공정에 대한 공정능력을 평가하는 방법은 크게 2가지 형태로 구분할 수 있다.

- (1) 공정능력지수를 사용하는 방법
- (2) 불량률을 사용하는 방법

2.1 비음수값을 갖는 비정규 공정의 공정능력지수: C_{pb}

Lovelace(1994)는 비음수 값을 갖는 공정에 대한 공정능력지수를 한쪽규격의 C_p 지수인 C_p^* 의 대수정규 수정으로 개발되어지는 C_{pb} 로 정의한다. 상한 C_p^* 지수는 정규인 경우 식(2.1)와 같이 정의된다.

$$C_p^* = \frac{USL - T}{3\sigma} \quad (2.1)$$

C_{pb} 는 상기 지수를 대수 정규화시켜 식(2.2)와 같이 나타낸다.

$$C_{pb} = \frac{USL - T}{e^{\mu_Y + 3\sigma_Y}} - e^{\mu_Y} \quad (2.2)$$

2.2 왜도에 민감한 공정능력지수: C_s

Wright(1995)는 구멍가공 공정과 같은 공정에 발생하기 쉬운 왜도에 민감한 새로운 지수인 C_s 를 개발하였다. 그는 왜도의 측도로 3차 중심적률 $\mu_3 = E(X - \mu)^3$ 를 사용하여 식(2.3)과 같은 공정능력 지수를 정의하였다.

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2 + |\mu_3/\sigma|}} \\ &= \frac{d - |\mu - T|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2 + |\mu_3/\sigma|}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서 μ_3 는 비대칭항을 신뢰하기 위하여 분모에 있는 다른 항과 동일한 단위가 되도록 σ 로 나누며, 절대값은 음의 비대칭을 신뢰시키고 또한 지수에 손실을 부과시킨다. 그리고 C_s 의 각 항을 σ 로 나누면 식(2.4)와 같이 된다.

$$C_s = \frac{d/\sigma - |(\mu - T)/\sigma|}{3\sqrt{1 + |(\mu - T)/\sigma|^2 + |\beta_1^{1/2}|}} \quad (2.4)$$

여기서 $\sqrt{\beta_1} = \mu_3/\sigma^3$ 은 왜도의 전통적 표준화된 측도이다.

2.3 Pearson 시스템에 의한 공정능력지수

C_p 지수값을 추정하기 위해서 Clements는 6 σ 대신 $U_\alpha - L_\alpha$ 로 교체하여 식(2.5)와 같이 나타낸다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_\alpha - L_\alpha} \quad (2.5)$$

여기서 U_α 는 99.865 백분위수이고, L_α 는 0.135 백분위수인 점의 값을 나타낸다. 이 값은 추정되는 왜도 (S_K) 및 첨도 (K_U)의 특정값이 주어지는 경우 Gruska et

al.(1989)에 의해 제시된 표에서 구해진다

식(2.5)에서 $U_a - L_a$ 를 취하는 이론적 근거는 공정이 $C_p = 1$ 일 때의 정규분포를 가정하면 평균으로 부터 $\pm 3\sigma$ 를 벗어날 확률은 0.27%라는 것이다.

따라서 C_p 는 식(2.6)과 같은 분위수로 나타낼 수 있다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{X_{0.99865} - X_{0.00135}} \quad (2.6)$$

여기서 $X_{0.99865}$ 와 $X_{0.00135}$ 는 각각 U_a 와 L_a 를 나타낸다.

C_{pk} 도 동일한 접근으로 $USL - \mu$ 대신에 $USL - M_e$ 로, $\mu - LSL$ 대신에 $M_e - LSL$ 로 변경되며, 3σ 도 각각 $U_a - M_e$, $M_e - L_a$ 로 되어 식(2.7)과 같다.

$$\begin{aligned} C_{pk} &= \min \left[\frac{USL - M_e}{U_a - M_e}, \frac{M_e - LSL}{M_e - L_a} \right] \\ &= \min(C_{pu}, C_{pl}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

μ 대신에 메디안 M_e 을 취하는 이유는 메디안이 비정규분포의 중심을 잘 표현하기 때문이다.

같은 방법으로 적용하면 식(2.8)~식(2.11)과 같이 된다.

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{U_a - L_a}{6}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \quad (2.8)$$

$$C_{pm}^* = \frac{\min[USL - T, T - LSL]}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - L_a}{6}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} C_{pmk} &= \min \left[\frac{USL - M_e}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - M_e}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{M_e - LSL}{3\sqrt{\left(\frac{M_e - L_a}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$C_{psk} = \min \left[\frac{USL - M_e - |M_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - M_e}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}, \frac{M_e - LSL - |M_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{M_e - L_a}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \right] \quad (2.11)$$

2.4 Johnson 시스템에 의한 공정능력지수

Johnson(1949)에 의해 제시된 Johnson 시스템은 비정규분포를 모형화 하는데 Pearson 시스템의 대안으로 제시되었다.

Johnson 곡선을 공정능력지수계산에 적용하게 된 배경은 Johnson 곡선은 Pearson 시스템 보다 나은 장점을 지니고 있기 때문이다. 즉 Johnson 곡선은 주어진 데이터 집합에 가장 좋은 Johnson 곡선을 선택하는데 단순한 구조를 보여주고, 표본의 적률에 기초한 방법보다 더욱 신뢰할 수 있는 절차이고, 일반적으로 쉽다고 Farnum (1996-1997)는 지적하였다.

또한 Johnson 접근의 가장 현저한 특징 중의 하나는 표준정규곡선으로 변환하여 사용하는 확률계산이다. 이러한 Johnson 시스템은 식(2.12)의 변환식과 식(2.13)~식(2.15)인 3가지 분포족을 갖는다.

$$Z = \gamma + \eta K_i(x, \lambda, \epsilon) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

$$K_1(x, \lambda, \epsilon) = \sin h^{-1} \left(\frac{x - \epsilon}{\lambda} \right) \quad (2.13)$$

$$K_2(x, \lambda, \epsilon) = \ln \left(\frac{x - \epsilon}{\lambda + \epsilon - x} \right) \quad (2.14)$$

$$K_3(x, \lambda, \epsilon) = \ln \left(\frac{x - \epsilon}{\lambda} \right) \quad (2.15)$$

식(2.13)~식(2.15)는 $\eta, \gamma, \lambda, \epsilon$ 의 적절한 모수선택에 의해 Z분포로 변환시킬 수 있고 ϵ, γ 는 위치모수이며, λ, η 는 척도모수이다.

식(2.13)은 S_U 곡선으로 정의역은 전 실직선이 되며, 식(2.14)는 개구간 $(\epsilon, \epsilon + \lambda)$ 에 대해 정의되는 S_B 곡선을 나타낸다. 식(2.15)는 S_L (대수정규)곡선을 나타낸다. S_L 곡선은 모수 λ 를 소거함으로써 단순화시켜 $Z = r^* + \eta \ln(x - \epsilon)$ 로 나타낼 수 있다.

Johnson 곡선은 종전의 Pearson 곡선과 같이 적률법으로 추정되었지만, Slifker와

Shapiro(1980)의 표본 백분위수에 기초한 보다 신뢰할 만한 추정 방법과 주어진 데이터 집합의 Johnson 곡선의 분포족 형태를 결정하는 식 (2.16)과 같은 판별 함수를 제시하였다.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \frac{mn}{p^2} > 1 : S_U \text{ 곡선} \\
 \textcircled{2} \quad & \frac{mn}{p^2} < 1 : S_B \text{ 곡선} \\
 \textcircled{3} \quad & \frac{mn}{p^2} = 1 : S_L \text{ 곡선}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

여기서 $m = x_{3z} - x_z$, $n = x_{-z} - x_{-3z}$, $p = x_z - x_{-z}$ 이다. Slifker-Shapiro 방법은 적절한 Z값을 택해서 표준정규 표로부터 $-3z, -z, z, 3z$ 와 누적확률인 $P_{-3z}, P_{-z}, P_z, P_{3z}$ P_{-z}, P_z, P_{3z} 를 찾는다. Slifker-Shapiro에 의해 추천되는 값은 0.524이다.

그리고 Johnson곡선에 대한 확률계산을 위하여 3가지 분포족에 관해 <Table 1> 같이 z를 x로 나타내어 표준정규분포와 동일한 계산을 할 수 있다.

비정규 공정에 대한 공정능력지수의 정의를 일반화시킬 때의 C_p 지수는 식(2.5)와 동일한 방법으로 식(2.17)로 나타낸다.

< Table 1 > Johnson curve and equation for x in terms of z

Johnson curve type	equation for x in terms of z	note
(1) S_U	$x = \epsilon - \lambda \operatorname{Sin h} \left(\frac{r-z}{n} \right)$	$\operatorname{Sin h} (u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
(2) S_B	$x = \epsilon + \frac{\lambda}{1 + \exp \left(\frac{\gamma - z}{\eta} \right)}$	—
(3) S_L	$x = \epsilon + \lambda \exp \left(\frac{z - \gamma}{\eta} \right)$ $= \epsilon + \exp \left(\frac{z - \gamma^*}{\eta} \right)$	$r^* = \eta \ln \left[\frac{\frac{n}{p} - 1}{p \left(\frac{m}{p} \right)^{1/2}} \right]$

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_{\alpha} - L_{\alpha}} \tag{2.17}$$

정규분포에 대해서는

$L_{\alpha_1} = \mu - 3\sigma$, $U_{\alpha_2} = \mu + 3\sigma$ 가 되며, Johnson곡선에 의한 비정규분포에 대한 L_{α_1} 와 U_{α_2} 는 <Table 1>에서 α_1 은 $z = -3$ 과 α_2 는 $z = 3$ 으로 치환하여 사용한다. 예를 들면 S_U 곡선, S_B 곡선을 사용할 때, L_{α_1} , U_{α_2} 값은 각각 식(2.18) 및 식(2.19)와 같다.

$$L_{\alpha_1} = \varepsilon - \lambda \sin h\left(\frac{r+3}{\eta}\right) \quad (2.18)$$

$$U_{\alpha_2} = \varepsilon - \lambda \sin h\left(\frac{r-3}{\eta}\right)$$

$$L_{\alpha_1} = \varepsilon + \lambda \left[1 + \exp\left(\frac{r+3}{\eta}\right)\right]^{-1} \quad (2.19)$$

$$U_{\alpha_2} = \varepsilon + \lambda \left[1 + \exp\left(\frac{r-3}{\eta}\right)\right]^{-1}$$

C_{pk} 지수인 경우의 일반화는 규격한계치인 LSL과 USL을 Johnson변환을 통하여 Z_L 과 Z_U 값으로 치환하여 식(2.20)과 같이 나타낸다.

$$C_{pk} = \min\left(-\frac{Z_L}{3}, \frac{Z_U}{3}\right) \quad (2.20)$$

3. 비정규공정능력의 새로운 측도

2장에서는 비정규분포에 대한 공정능력의 측도로 분위수를 사용하여 Pearson시스템을 이용한 공정능력지수로 나타내었다. 이 방법의 결점은 불량률을 추정하는데 어려움이 있다. 따라서 실무에 있어서 빈번히 사용되고 있는 불량률의 관점에서 비정규공정의 공정능력의 새로운 측도를 제시하고자 한다.

본 연구에서는 Pearson, 포아송근사 및 Burr의 3가지 분포를 사용하여 불량률의 척도로 공정능력을 평가하기로 한다.

3.1 Pearson system

Pearson system은 식(3.1)의 미분방정식을 만족시키는 $y = f(x)$ 의 분포들이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - c_0)y}{c_1 + c_2x + c_3x^2} \quad (3.1)$$

Pearson system에서 핵심역할은 적률을 이용해서 모수를 결정하고 적절한 곡선 형태의 선정의 기준을 제시해준다.

$f(x)$ 의 그래프의 형상을 결정하는 모수 c_0, c_1, c_2, c_3 은 식(3.2)~식(3.5)와 같이 적률의 함수로서 구해진다.

$$\begin{aligned} c_0 &= -\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2) / A \\ &= -\sqrt{\mu_2\beta_1}(\beta_2 + 3) / A \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2) / A \\ &= -\mu_2(4\beta_2 - 3\beta_1) / A \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$c_2 = c_0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} c_3 &= -(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3) / A \\ &= -(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6) / A \end{aligned} \quad (3.5)$$

여기서

$$\begin{aligned} A &= 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2 \\ A' &= 10\beta_2 - 18 - 12\beta_1 \\ \sqrt{\beta_1} &= \mu_3 / \sigma^3 = \text{Skewness} = S_K \\ \beta_2 &= \mu_4 / \sigma^4 = \text{Kurtosis} = K_U \end{aligned}$$

이 값들은 식(3.6)의 2차 방정식의 해에 따라 다양하게 변할 수 있다.

$$c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0 \quad (3.6)$$

식(3.6)의 해를 구하면 식(3.7)이 된다.

$$x = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_1 c_3}}{2c_1} \tag{3.7}$$

식(3.7)을 이용하여 분포의 형태를 정하기 위한 기준으로 다음의 K 값을 설정한다.

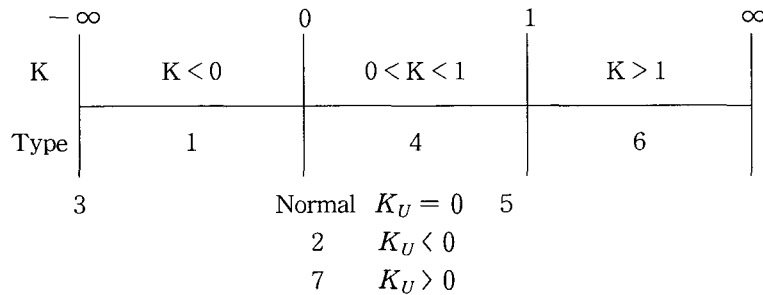
$$K = c_2^2 / 4c_1 c_3$$

여기에 식(3.2)~식(3.5)를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$K = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6) (4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

이것이 Pearson곡선의 형태를 결정하는 기준이 된다.

<Fig 1>은 K 값에 해당하는 Pearson 곡선의 상이한 형태간의 관계를 보여준다.



< Fig. 1 > The relationship between the different type Pearson curve and their corresponding K-value

Pearson 곡선중 잘 알려진 곡선을 선정하여 나타내면 <Table 2>와 같다.

< Table 2 > Well known Pearson Curve

Name	Type
Beta	1
Uniform	2 ($K_U = -1.2$)
Gamma, Chi-square	3
Normal	7 ($c_2 = c_3 = 0$)
t	7
Exponential	10

본 연구에서는 Gamma분포의 경우 일반적인 불량률을 추정하는 절차를 언급하기로 한다.

- (1) 표본으로부터 \bar{X} , s , S_K , K_U 의 통계량을 구한다.
- (2) S_K , K_U 로부터 K 값을 구하여 분포를 확인한다.
- (3) S_K , K_U 의 통계량에 해당(또는 근접)하는 Pearson 곡선의 표준화된 분위수에 일치하는 값을 Gruska et al.(1989)의 표에서 구한다.
- (4) 규격을 벗어나는 불량률을 구한다.

3.2 Gamma 분포의 포아송근사

공정의 품질특성이 감마분포를 할 때 그 확률밀도함수는 식(3.8)과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0 \quad (3.8)$$

여기서 α 는 형상모수이고, β 는 척도모수이다.

감마분포의 평균과 분산은 식(3.9)와 식(3.10)으로 나타낸다.

$$\mu = \alpha\beta \quad (3.9)$$

$$\sigma^2 = \alpha\beta^2 \quad (3.10)$$

그리고 감마분포의 왜도(S_K)와 첨도(K_U)는 식(3.11) 및 식(3.12)로 나타낸다.

$$S_K = 2/\sqrt{\alpha} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} K_U &= 1.5(S_K)^2 + 3 \\ &= 6/\alpha + 3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

감마분포의 누적분포함수는 식(3.13)으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^{\alpha-1}/\beta^\alpha) \exp(-x/\beta) dx \\ &= \Gamma(x/\beta, \alpha), \quad x > 0 \\ &= 1 - P(\alpha-1, x/\beta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

β 가 정수인 경우, 감마분포의 누적분포함수는 식(3.14)로 나타낼 수 있다.

$$F(x) = \Gamma(x/\beta, \alpha) = 1 - P(\alpha - 1, x/\beta) \quad (3.14)$$

여기서, $P(\alpha - 1, x/\beta)$ 는 평균 x/β 인 포아송분포에 있어 발생하는 개수가 $\alpha - 1$ 이하인 확률을 나타낸다.

3.3 Burr system

데이터 집합을 묘사하는 전통적인 접근은 밀도함수를 사용한다. 이 경우 데이터 비교를 위한 이론적 확률을 구하기 위해서 적분을 하여 적절한 분포함수를 구하는데 적분은 성가시고, 대부분의 밀도함수들을 구할 수 없는 현실적인 문제가 발생하게 된다. 그러나 누적분포함수가 직접 구해질 수가 있다면 불량률은 쉽게 추정할 수 있다. 이러한 접근은 Burr(1942)와 Hatke(1949)에 의해 식(3.15)와 같은 미분방정식을 고려함으로써 시도되었다.

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)g(x, y) \quad y = F(x) \quad (3.15)$$

여기서 $g(x, y)$ 는 $0 < y < 1$ 에 관해 양수이고 $F(x)$ 는 $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$ 인 비감소 함수이다.

식(3.15)는 (3.16)과 매우 유사하여 $g(x, y) = (a + bx + cx^2)^{-1}$ 일 때 Pearson system의 밀도함수를 발생시킨다.

$$\frac{dy}{dx} = y(m-x)g(x, y) \quad (3.16)$$

$g(x, y) = g(x)$ 일 때 식(3.15)의 해는

$$F(x) = \left[1 + \exp\left(-\int g(x) dx\right) \right]^{-1}$$

이다. Burr에 의해 상세하게 고려된 한가지 편리한 해는 식(3.17)과 같다. 이것이 Burr 누적분포이다.

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - (1 + x^c)^{-k} \quad x \geq 0 \\ &= 0 \quad x < 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

여기서 C, K 는 Gruska et al.(1989)의 Burr system의 모수의 표에서 주어지는 실수인 값들이다.

확률밀도함수는 식(3.18)과 같다.

$$F'(x) = f(x) = \frac{KCx^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}} \quad (3.18)$$

식(3.18)의 함수는 일반적인 적률대신에 식(3.19)와 같은 누적적률을 사용한다.

$$M_j = \int_0^\infty x^j (1+x^c)^{-k} dx \quad j < CK-1 \quad (3.19)$$

주어진 데이터에 대해 Burr system을 적용하는 절차는 다음과 같다.

- (1) 표본으로부터 \bar{X}, s, S_K, K_U 의 통계량을 구한다.
- (2) 구한 S_K, K_U 값에 해당(또는 근접)하는 Burr system의 모수의 표로부터 $C, K, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ 를 구한다.
- (3) $P_r(x < \hat{x}_0)$ 를 계산하기 위해서 아래식을 이용해서 x_0 를 구한다.

$$\frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{\hat{x}_0 - \bar{x}}{s}$$

또는

$$x_0 = \sigma (\hat{x}_0 - \bar{x}) / s + \mu$$

이 때 $P_r(x < \hat{x}_0) = F(x_0; C, K)$

- (4) x_0 를 구한다음 확률 P 를 계산한다.

$$P = F(x_0; C, K)$$

즉

$$x_0 = [(1-p)^{-1/k} - 1]^{1/c}$$

4. 공정능력의 평가

본 연구에서 공정이 감마분포를 할 때 불량률의 척도로 공정능력을 평가하기 위해서 Montgomery et al. (1996-1997)의 <Table 3>을 인용해서 Pearson system, Gamma 분포의 포아송 근사 및 Burr system의 3가지 방법에 의해 불량률을 추정하기로 한다. <Table 3>은 α , β 가 각각 0.5, 1 이고 평균과 분산이 각각 0.5인 감마분포를 하는 공정을 고려한다.

< Table 3 > Errors in C_{pk} When the Process is a Gamma Distribution

	$C_{pk} = 0.67$ (Normal)	$C_{pk} = 1.00$ (Normal)	$C_{pk} = 1.33$ (Normal)	$C_{pk} = 1.67$ (Normal)	$C_{pk} = 2.00$ (Normal)
$\mu + K\sigma$	1.91	2.62	3.33	4.04	4.74
Predicted Defective(Right Tail)	50,390 PPM	22,040 PPM	9,878 PPM	4,498 PPM	2,071 PPM
Predicted Defective (Normal)	22,750 PPM	1,350 PPM	32 PPM	0.29 PPM	0.001 PPM
Absolute Error	27,640 PPM	20,690 PPM	9,846 PPM	4,497 PPM	2,071 PPM
Relative Error	54.85 %	93.87 %	99.68 %	99.99 %	100 %
'Equivalent' C_{pk}	0.55	0.67	0.78	0.87	0.96

4.1 Pearson system

Gamma 분포의 불량률을 추정하는 절차로부터

- (1) 표본통계량은 $\bar{x} = 0.5$, $s = 0.71$, $S_K = 2.83$, $K_U = 15$ 로 구해졌다.
- (2) S_K , K_U 로부터 구한 K 값이 $K \ll 0$ 이므로 Gamma 분포를 한다.
- (3) Grusk et al(1989)의 표에서 $S_K = 2.8$ 과 $S_K = 2.9$ 값으로부터 $S_K = 2.83$ 의 값을 보간법으로 계산하여 Z 값을 구할 수 있다.
- (4) $X = Z \cdot s + \bar{X}$ 로부터 $Z = 1.972$ 일 때, $X = 1.900$, $Z = 3.922$ 일 때, $X = 3.285$, $Z = 6.614$ 일 때 $X = 5.196$ 이다. 따라서 $\mu + K\sigma$ 를 벗어나는 불량률은 $C_{pk} = 0.67$ 일 때 47,112 PPM, $C_{pk} = 1.00$ 일 때 29,206 PPM, $C_{pk} = 1.33$ 일 때, 9,796 PPM, $C_{pk} = 1.67$ 일 때 6,583 PPM, $C_{pk} = 2.00$ 일 때, 3,414 PPM으로 나타났다.

4.2 Gamma 분포의 포아송근사

감마 분포의 누적 분포함수인 식(3.13)에 의해 구해진 값은 <Table 4>에 주어져 있다. 그런데 β 가 정수인 경우, 감마분포의 누적분포함수는 식(3.14)로 나타내어 질 수 있기 때문에 식(3.14)를 이용한 감마분포의 근사값을 구한 결과와 누적분포함수로 구한 값을 비교해 본다. Montgomery et al. (1996-1997)는 α , β , 평균, 분산이 각각 1인 감마분포에서 누적분포함수로 구한 불량률은 일 때, $C_{pk} = 0.67$ 일 때 49,787 PPM, $C_{pk} = 1.00$ 일 때 18,316 PPM, $C_{pk} = 1.33$ 일 때 6,700 PPM, $C_{pk} = 1.67$ 일 때, 2,500 PPM, $C_{pk} = 2.00$ 일 때, 900 PPM으로 나타나 매우 근사한 결과를 보여준다. 상기내용을 정리해서 나타내면 <Table 4>와 같다.

< Table 4 > Comparison between Poission approximation and Gamma distribution

	$C_{pk}=0.67$	$C_{pk}=1.00$	$C_{pk}=1.33$	$C_{pk}=1.67$	$C_{pk}=2.00$
Gamma distribution	49,787 PPM	18,316 PPM	6,738 PPM	2,479 PPM	912 PPM
Poission distribution	49,800 PPM	18,300 PPM	6,700 PPM	2,500 PPM	900 PPM

4.3 Burr system

Burr system을 적용하는 절차로부터

- (1) 표본통계량은 $\bar{X} = 1$, $s = 0.71$, $S_K = 2.83$, $K_U = 15$ 이고
- (2) Gruska et al.(1989)의 Burr system의 모수의 표로부터 근접한 $S_K = 2$, $K_U = 13$ 값을 택한 결과 C , K , $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ 는 다음과 같다.

$$C = 2.50080$$

$$K = 2.14834$$

$$\hat{\mu} = 0.76034$$

$$\hat{\sigma} = 0.44288$$

- (3) $P(x < x_0)$ 를 계산하기 위해서

$$x_0 = \sigma(\hat{x}_0 - \bar{x})/s + \mu$$

로부터 $\hat{x}_0 = 1.91$ 일 때, $x_0 = 1.6399$, $\hat{x}_0 = 2.62$ 일 때, $x_0 = 2.0827$,

$\hat{x}_0 = 3.33$ 일 때, $x_0 = 2.5256$, $\hat{x}_0 = 4.04$ 일 때, $x_0 = 2.9685$, $\hat{x}_0 = 4.74$ 일 때, $x_0 = 3.4051$ 이 된다.

(4) $P = F(x_0; c, k)$ 로부터

$$\begin{aligned} F(x) &= P(x \leq 1.91) \\ &= (1 + x^c)^{-k} \\ &= 1 - (1 + 1.6399^{2.5008})^{-2.14834} \end{aligned}$$

$$1 - F(x) = 0.040561 = 40,561 \text{ PPM}$$

같은 방법으로 적용하면 $C_{pk} = 1.00$ 일 때 14,124 PPM, $C_{pk} = 1.33$ 일 때 5,631 PPM, $C_{pk} = 1.67$ 일 때 2,522 PPM, $C_{pk} = 2.00$ 일 때 1,255 PPM 으로 불량률이 추정된다. 이상을 정리해서 나타내면 <Table 5>와 같다.

< Table 5 > Computation of Gamma, Pearson, Burr system (PPM)

	$C_{pk}=0.67$	$C_{pk}=1.00$	$C_{pk}=1.33$	$C_{pk}=1.67$	$C_{pk}=2.00$
Gamma	50,390	22,040	9,878	4,498	2,071
Pearson	47,112	29,206	9,796	6,583	3,414
Burr	40,561	14,124	5,631	2,522	1,255

<Table 4>, <Table 5>에서 알 수 있듯이 공정이 감마분포에 따를 때, 불량률을 추정해 본 결과 포아송근사는 거의 차가 없음을 알 수 있고, Pearson system과 Burr system은 이보다 조금 벗어남을 알 수 있었다. 그러므로 비정규공정에 대한 불량률의 측도에 의한 공정능력의 평가는 포아송근사가 가장 좋고, 그 다음으로 Pearson system에 의한 방법이 양호하다고 판단된다.

5. 결론

본 연구에서 감마분포에 대한 공정능력의 평가를 Pearson system, 포아송 근사 및

Burr분포의 3가지 분포를 사용하여 규격을 벗어나는 불량률을 추정함으로써 비정규 공정의 공정능력에 대해 보다 구체적인 추가 정보를 제시할 수 있어 실무자로 하여금 공정의 개선을 유도하는 합리적인 의사결정을 내릴 수 있는 공정능력의 새로운 측도를 제시하였다.

감마분포를 하는 공정에 대한 불량률의 측도에 의한 공정능력의 평가는 감마분포의 포아송근사가 가장 좋고, 그 다음 Pearson system 에 의한 방법이 양호하다고 판단된다. 적절한 S_K 와 K_U 값을 취할 수 있다면 Burr system에 의한 방법이 용이하면서도 계산의 정확도를 높일 수 있어 보다 신뢰할 수 있는 방법이 될 것이다. 향후 실제 공정에서 나타날 수 있는 다양한 비정규분포의 경우에도 불량률의 측도로 나타낼 수 있도록 이에 따른 추가연구가 행해져야 되며, 불량률의 추정에 새로운 접근법도 제시하여 비정규공정의 공정능력의 평가를 불량률의 측도로 정착될 수 있도록 개선시켜 나가야 할 것이다.

참고문헌

- [1] Benson, E.D.(1994), "Statistical Properties of a System of Fourth - Generation Process Capability Indices $C_{psk}(U, V, W)$," Ph. D. Dissertation, University of Maryland.
- [2] Burr, I.W.(1942), "Cumulative Frequency Functions," Ann. Math. Stat, 13, pp. 215-232.
- [3] Chan, L.K., Cheng, S.W., Spiring, F.A. [CCS].(1988(a), "A New Measure of Process Capability: C_{pm} ," *Journal of Quality Technology*, 20(3), pp. 162-173.
- [4] Choi, B.C., Owen, D.B.(1990), "A Study of A New Process Capability Index," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 19(4), pp. 1231-1245.
- [5] Clements, J.A.(1989), "Process Capability Calculations for Non-Normal Distributions," *Quality Progress*, 22(9), pp. 95-100.
- [6] Farnum, N.R.(1996-1997), "Using Johnson Curves to Describe Non-Normal Process Data," *Quality Engineering*, 9(2), pp. 329-336.
- [7] Gruska, G.F., Lamberson, L.R., and Mirkhani, K.(1989), "Non-Normal Data Analysis," Multifac Publishing Co., Michigan.
- [8] Hahn, G.J., and Shapiro, S.S.(1967), "Statistical Models in Engineering," *John Wiley and Sons, Inc.*, New York, p. 207.
- [9] Hatke, Sister M.A.(1949), "A Certain Cumulative Probability Function," Ann. Math. Stat, 20, pp. 461-463.
- [10] Johnson, N.(1949), "Systems of Frequency Curves Generated by Translation," *Biometrika*, 36, pp. 149 - 176.

- [11] Kane, V.E.(1986), "Process capability indices," *Journal of Quality Technology*, 18(1), pp. 41-52.
- [12] Lovelace, C.R.(1994), "The Development of a Process Capability Index for Non-Normal Processes Naturally Bound at Zero." Ph. D. Dissertation. University of Alabama in Huntsville.
- [13] McCoy, P.F.(1991), "Using Performance Indexes to Monitor Production Processes," *Quality Progress*, 24(2), pp. 49-55.
- [14] Montgomery, D.C., and Someville, S.E.(1996-1997), "Process Capability Indices and Non-Normal Distributions," *Quality Engineering*, 9(2), pp. 305-316.
- [15] Pearn, W.L., Kotz, S., Johnson, N.L.(1992), "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, 24(4), pp. 216-231.
- [16] Pearn, W.L., and Kotz, S.(1994-1995), "Application of Clement's Method for Calculating Second-and-Third-Generation Process Capability Indices Non-Normal Pearsonian Population," *Quality Engineering*, 7(1), pp. 139-145.
- [17] Slifker, J.F., Shapiro, S.S.(1980), "The Johnson System: Selection and Parameter Estimation," *Technometrics*, 22(2), pp. 239-246.
- [18] Wright, P.A.(1995), "A Process Capability Index Sensitive to Skewness," *Journal of Statistical Computation & Simulation*, 52, pp. 195-203.