多値 BCH 부호를 갖는 연산기 설계에 관한 연구

송 홍 복*, 이 흥 기**

Design of Arithmetic processor with multiple valued BCH code

Hong-Bok Song, Heung-Ki Lee

요 약

본 논문에서는 다치 부호 시스템 중에서 3치 부호 시스템인 3치 BCH 부호의 부호회로 및 복호회로에 대해서 연구 하였다. 여기서 3중 오류 정정 3치 BCH 부호중 3치 BCH(26.14) 부호와 3치 BCH (26,13)부호의 부호회로와 복호회로에 대해서 비교 검토를 하였다. 실험에 의해서 구현한 부호기 및 복호기에 대해서 확인을 해 본 결과, (26,13)부호의 복호회로 쪽이 (26,14)부호의 복호기에 비해서 회로를 설계할 때 하드웨어적으로 50% 가량 줄일수 있다는 것을 알수 있었다.

Abstact

In this paper, we present encoders and decoders with the two kinds of ternary Bose-Chaudhuri-Hocquenghem(BCH) codes in the most basic ternary code system from among multiple-valued code systems. One is the random-triple-error-correcting ternary BCH(26,14) code for sequential data, the other is random-triple-error-correcting ternary BCH(26,13) code.

The encoders and the decoders realized are verified by experiment. Amount of the (26,13) decoder's hardware is about 50% of the one of the (26,14) decoder's one.

Ⅰ. 서 론

다치 논리 회로 응용인 다치 정보 처리 시스템으로서 4칙 연산등을 행하는 다치 연산 시스템 연구는 오래전부터 행해져 있지만[(1),(2),(3)] 정보를 전달하고 기억하는 필요한 다치 부호 시스템 연구는

* 동의대학교 전기전자정보통신공학부 부교수

** 부산 정보대학 정보통신계열 교수

접수일자 : 1999년 11월 20일

거의 행해지지 않는다. 따라서 본 논문은 다치 부호 시스템 중에서 가장 기본적인 3치 부호 시스템을 취급하고 병렬 신호를 취급한 3치 해밍부호의 부호 및 복호회로, 직렬신호를 취급한 3치 순차 해밍 부호의 부호 및 복호회로와 3치 BCH 부호의 부호 및 복호회로에 대해서 연구하였다.

전자는 병렬로 보내주는 신호를 고속으로 정정하기 때문에, 후자등은 연속해서 보내주는 신호를 순차 정정하기 때문에 효과적이다. 직렬 신호를 취급한 3치 BCH 부호는 2중 오류정정 부호이므로 더욱더 오류 정정 능력이 높은 부호가 기대된다.

이 때문에 본 논문에서는 3중 오류 정정 가능한 3치 BCH 부호의 부호회로 및 복호로에 대해서 연구한다. 여기서 3중 오류 정정 가능한 3치 BCH 부호로서 (26,14)부호 및 (26,13)부호를 제안한다. 정보점수의 논리상 한계는 해밍 한계식 및 바셀호프, 길버트의 한계식에서 16~12를 구하지만 실제의 한계는 (26,14)부호의 정보점수를 14라고 생각된다.

한편 (26,13)부호는 부호장 26중에서 정보점수 13과 같이 부호 효율이 나쁘지만 검사점수 13중의 1개를 전 디지트에 대한 패리티 검사점으로서 이용되고 있기 때문에 오류의 크기를 간단하게 구할 수가 있고 회로구성이 (26,14)부호의 약 반으로 된다. 또 이들의 회로구성은 CMOS-IC와 3치 F-F 회로 등(6)을 이용한다.

Ⅱ. 3치 BCH 부호

1. t중 오류 정정 3치 BCH 부호

BCH 부호는 1959년에 Hocquenghem, 1960년에 Bose와 Chaudhuri에 의해서 독립으로 발견된 것이며 지금까지 알려지고 있는 대표적인 랜덤 오류 정정 부호 중에서 가장 오류 정정 능력이 높고 동시에 광범위하게 정의되어 있는 부호의 하나이다.[(3),(4)]

여기서 랜덤 t중 오류 정정 가능한 3치 BCH 부호에 대해서 연구한다. t중 오류 정정 부호를 만들려면 우선 부호의 최소거리를 고려할 필요가 있다. 부호 w에 있는 최소거리 $d_{\min}$은 다음 식으로 정의된다.[(4)]

$$d_{\min} = \min\{d_H(w_i, w_j)\}$$
$$d_H : \text{해밍거리}, w_i, w_j \in W,\ w_i \neq w_j \quad \cdots\cdots (1)$$

이것으로부터 t는 무거운 오차 정정 필요조건으로 $d_{\min}$(지금부터 d'라고 표기한다)은 다음식으로 주어진다.

$$d' \geq 2t+1 \quad \cdots\cdots (2)$$

BCH 부호는 임의의 Glois 체 $GF(q)$ 원으로 구성되며 생성다항식은 $GF(q)$의 확대체 $GF(q^{m'})$ 원에 의해서 정해진다. α를 승위수 (multi-plicative order) n의 $GF(q^{m'})$ 원으로서 임의의 정수 $r \geq 0$ 및 $a'(2 \leq d' \leq n)$에 대해서 $M_r(x), M_{r+1}(x), \cdots, M_{r+a'-2}(x)$ 를 $\alpha^r, \alpha^{r+1}, \alpha^{r+2}, \cdots, \alpha^{r+a'-2}$의 최소다항식이라 할 때 BCH 부호의 생성다항식은 다음식으로 주어진다.[(4)]

$$G(x) = LCM[M_r(x), M_{r+1}(x), \cdots, M_{r+a'-2}(x)] \quad \cdots (3)$$
$$LCM : \text{최소공배다항식}$$

이것으로부터 BCH 부호다항식이 $\alpha^r, \alpha^{r+1}, \alpha^{r+2}, \cdots, \alpha^{r+a'-2}$를 근으로서 갖는 부호라고 말한다.

2. 3중 오류정정 3치 BCH (26,14)부호

여기서 부호길이 n, 정보점수 k 및 검사점수 m라고 하는 부호어를 생각해 본다.

식(2)에서 $t=3$일 때 3중 오류정정부호 $a'=7$이 되도록 하면 좋다.

따라서 $q=3,\ m'=3,\ n=26,\ a'=7$ 및 $r=1$이라고 한 3중 오류정정 3치 BCH 부호생성다항식은 식(3)에서 다음식으로 주어진다.

$$G(x) = LCM[M_1(x), M_2(x), M_3(x), M_4(x), M_5(x), M_6(x)] \quad \cdots\cdots (4)$$

3치 BCH 부호에 대해서 임의의 i는 어떤 $i'(<i)$과 정수 $l' \geq 1$에 의해서 $i = i' \times 3^{l'}$로 나타내고 α^i와 $\alpha^{i'}$은 동일한 최소식을 갖는다.

따라서 $M_1(x)$와 $M_3(x)$ 근 α'와 α^3는 비슷하게 되고 $M_3(x)$는 $M_1(x)$에 흡수되며 $M_2(x)$와 $M_6(x)$ 근 α^2와 α^6은 비슷하게 되고 $M_6(x)$는 $M_2(x)$에 흡수된다.

이것으로부터 식(4)의 생성다항식은 다음식과 같이 된다.

$$G(x)=M_1(x)\cdot M_2(x)\cdot M_4(x)\cdot M_5(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

여기서 최소다항식 $M_1(x), M_2(x), M_4(x)$ 및 $M_5(x)$는 다음식으로 주어진다.

$$\left.\begin{array}{l} M_1(x)=x^3+2x+1 \\ M_2(x)=2x^3+x^2+x+1 \\ M_4(x)=2x^3+x+1 \\ M_5(x)=x^3+x^2+2x+1 \end{array}\right. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

식(5) 및 식(6)으로부터 3중 오류정정 3치 BCH(26,14) 부호의 생성다항식은 다음식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} G(x)&=(x^3+2x+1)(2x^3+x^2+x+1)\cdot \\ &\quad (2x^3+x+1)(x^3+x^2+2x+1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7) \\ &=x^{12}+2x^{11}+2x^{10}+x^9+2x^6+x+1 \quad \cdots\cdots\cdots (8) \end{aligned}$$

따라서 차수는 12이고 $m=12$ 및 $k=14$이다. 이 부호 패리티 검사행렬 H는 식(7)로부터 다음식으로 주어진다.

$$H=\begin{bmatrix} \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \cdots\cdots & \alpha^{20} & \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} & \alpha^{24} & \alpha^{25} \\ \alpha^0 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^8 & \alpha^{10} & \cdots\cdots & \alpha^{14} & \alpha^{16} & \alpha^{18} & \alpha^{20} & \alpha^{22} & \alpha^{24} \\ \alpha^0 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} & \alpha^{16} & \alpha^{20} & \cdots\cdots & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha^{14} & \alpha^{18} & \alpha^{22} \\ \alpha^0 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \alpha^{15} & \alpha^{20} & \alpha^{25} & \cdots\cdots & \alpha^{22} & \alpha^1 & \alpha^6 & \alpha^{11} & \alpha^{16} & \alpha^{21} \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

여기서 $M_1(x)=0$ 근을 α, $M_2(x)=0$ 근을 α^2, $M_4(x)=0$ 근을 α^4, $M_5(x)=0$ 근을 α^5라고 하면 $\alpha^l(l=0,1,\cdots,25)$은 표 1에 표시하는 벡터표현으로 된다.

표 1. $GF(3^3)$원 α^l 벡터 표현

M_1	M_2	M_4	M_5	α^l	1	x	x^2	벡터
				0	0			(0 0 0)
①	②	④	⑤	α^0	1			(1 0 0)
①			⑤	α^1		α		(0 1 0)
①	②	④	⑤	α^2			α^2	(0 0 1)
①			⑤	α^3	2	+	α^2	(2 0 1)
①	②	④	⑤	α^4	2 +	2α +	α^2	(2 2 1)
①			⑤	α^5	2 +	2α		(2 2 0)
①	②	④	⑤	α^6		2α +	$2\alpha^2$	(0 2 2)
①			⑤	α^7	1	+	α^2	(1 0 1)
①	②	④	⑤	α^8	2 +	α +	α^2	(2 1 1)
①			⑤	α^9	2 +	2α +	$2\alpha^2$	(2 2 2)
①	②	④	⑤	α^{10}	1 +	2α +	α^2	(1 2 1)
①			⑤	α^{11}	2 +	α		(2 1 0)
①	②	④	⑤	α^{12}		2α +	α^2	(0 2 1)
①			⑤	α^{13}	2			(2 0 0)
①	②	④	⑤	α^{14}		2α		(0 2 0)
①			⑤	α^{15}			$2\alpha^2$	(0 0 2)
①	②	④	⑤	α^{16}	1	+	$2\alpha^2$	(1 0 2)
①			⑤	α^{17}	1 +	α +	$2\alpha^2$	(1 1 2)
①	②	④	⑤	α^{18}	1 +	α		(1 1 0)
①			⑤	α^{19}		α +	α^2	(0 1 1)
①	②	④	⑤	α^{20}	2	+	$2\alpha^2$	(2 0 2)
①			⑤	α^{21}	1 +	α +	$2\alpha^2$	(1 2 2)
①	②	④	⑤	α^{22}	1 +	α +	α^2	(1 1 1)
①			⑤	α^{23}	2 +	α +	$2\alpha^2$	(2 1 2)
①	②	④	⑤	α^{24}	1 +	2α		(1 2 0)
①			⑤	α^{25}		α +	$2\alpha^2$	(0 1 2)

3. 3중 오류정정 3치 BCH(26,13) 부호

여기서 부호법을 간단하게 하기 위해 생성다항식에 패리티검사 디지트 $(x+2)$를 부여한다. 이 $(x+2)$항에 의해 해밍거리가 1 부호로 되고 생성다항식은 $d'=6$으로서 생각할 수 있다. 이것에 의해 식(4) 생성다항식은 다음식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} G(x)=LCM[&M_1(x), M_2(x), M_3(x), \\ &M_4(x), M_5(x), (x+2)] \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

$$= M_1(x) \cdot M_2(x) \cdot M_4(x) \cdot M_5(x) \cdot (x+2) \quad \cdots\cdots (11)$$

식(6) 및 식(11)에 의해 3중 오류정정 3치 BCH (26,13) 부호생성 다항식은 다음식과 같이된다.

$$G(x) = (x^3+2x+1)(2x^3+x^2+x+1)(2x^3+x+1) \cdot (x^3+x^2+2x+1) \cdot (x+2) \quad \cdots\cdots (12)$$

$$= x^{13}+x^{12}+2x^{10}+2x^9+2x^7+x^6+x^2+2 \quad \cdots\cdots (13)$$

이 부호의 H는 식(12)에서 다음식으로 주어진다.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \cdots & \alpha^{20} & \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} & \alpha^{24} & \alpha^{25} \\ \alpha^0 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^8 & \alpha^{10} & \cdots & \alpha^{14} & \alpha^{16} & \alpha^{18} & \alpha^{20} & \alpha^{22} & \alpha^{24} \\ \alpha^0 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} & \alpha^{16} & \alpha^{20} & \cdots & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha^{14} & \alpha^{18} & \alpha^{22} \\ \alpha^0 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \alpha^{15} & \alpha^{20} & \alpha^{25} & \cdots & \alpha^{22} & \alpha^1 & \alpha^6 & \alpha^{11} & \alpha^{16} & \alpha^{21} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (14)$$

Ⅲ. 부호회로

1. 3치 BCH 부호의 부호회로

3치 BCH 부호는 $(k-1)$차 다항식 $P(x)$ 계수에 정보를 대응시켜 $x^{n-k} \cdot P(x)$을 생성다항식 $G(x)$로 나누고 그 잉여 $R(x)$의 2배와 $x^{n-k} \cdot P(x)$화를 부호다항식 $F(x)$라고 한다. 즉 다음식으로 표시된다.

$$x^{n-k}P(x) = Q(x)G(x) + r(x) \quad \cdots\cdots (15)$$

$$F(x) = x^{n-k}P(x) + 2R(x) = Q(x)G(x) \quad \cdots\cdots (16)$$

식(15) 및 식(16)으로부터 부호회로는 생성다항식의 제산회로를 사용해서 구성할 수 있다. 여기서 2-2의 3중 오류정정 3치 BCH(26,14) 부호 및 2-3의 3중 오류정정 3치 BCH(26,13) 부호의 부호회로를 생각한다.

2. 3치 BCH(26,14) 부호회로 구성

3중 오류정정 3치 BCH(26,14) 부호회로는 식(8)의 생성다항식 제산회로를 이용해서 그림1과 같이 12단 3치 시프트레지스터, 배수기 및 가산기등으로 구성한다.

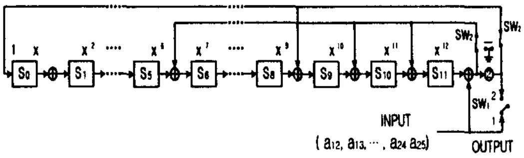

그림 1. 3중 오류정정 3치 BCH(26,14) 부호회로

이 회로에 있어서 우선 스위치 SW1을 1측으로 닫고 동시에 SW2 및 SW2'를 닫을 때까지 정보를 $a_{25}, a_{24}, \cdots, a_{13}, a_{12}$ 순으로 입력하고 $a_{25}, a_{24}, \cdots, a_{13}, a_{12}$를 출력하고 끝난 후에 SW1을 2측으로 닫고 동시에 SW2 및 SW2'를 열어서(실제는 접지에 접속한다.) 3치 시프트레지스터 S11~S0에 기억되고 있는 잉여 결과를 2배한 순서로 $a_{11}, a_{10}, \cdots, a_1, a_0$로서 출력한다.

3. 3치 BCH(26,13) 부호회로의 구성

3중 오류정정 3치 BCH(26,13) 부호회로는 3-2의 3치 BCH(26,14) 부호회로와 같은 모양으로 식(13)의 생성다항식 제산회로를 이용해서 그림 2처럼 13단 3치 시프트레지스터, 배수기 및 가산기등으로 구성한다.

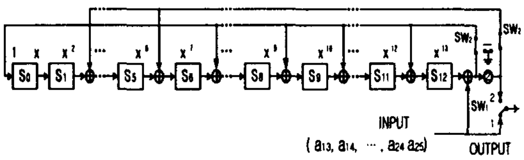

그림 2. 3중 오류정정 3치 BCH(26,13) 부호회로

Ⅳ. 복호회로

1. 3치 BCH 부호의 복호회로

3치 BCH 부호의 복호법으로 우선 수신계열에서 신드롬 계산을 행하며 이 신드롬에서 오류는 없고 단일오류, 2중오류 및 3중오류를 검출한다. 또한 오류 크기 및 오류 위치 수를 구해서 전정을 행한다.

여기서 3-2의 3치 BCH(26,14) 및 3-3의 3치 BCH(26,13) 부호회로에서 부호화된 부호에 단일오류, 2중오류 혹은 3중오류가 발생할 때의 정정복호

회로(지금부터 복호회로라고 약한다.)를 생각한다. 이들의 복호회로는 다음에 서술한 신드롬 계산회로, 신드롬 복잡회로, 오류패턴 검출회로(오류수 검출회로, 오류크기 검출회로, 오류위치수 검출회로 및 정정신호 발생회로)등으로 그림 3처럼 구성한다.

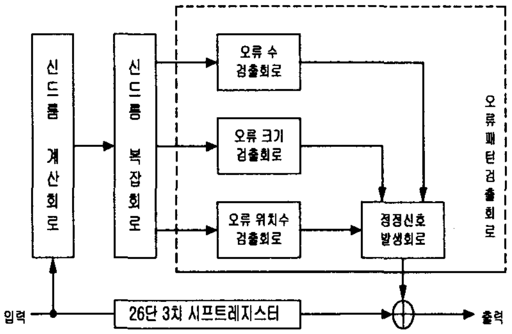

그림 3. 3치 BCH 부호의 복호회로

2. 3치 BCH(26,14) 부호의 복호회로

2.1 신드롬 계산회로

수신계열 $v=(b_0, b_1, \cdots\cdots, b_{24}, b_{25})$라 하면 식(9)의 패리티 검사행렬 H에서 계산되는 신드롬 S는 다음식으로 주어지며 신드롬 계산회로는 신드롬 디지트 B, C, D 및 E의 계산회로부터 된다. B, C, D 및 E의 계산회로 구성법을 예로써 B 계산회로에서 표시한다. 원의 상태 (a_0, a_1, a_2)를 α 배한 결과를 (a_0', a_1', a_2')라고 하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} a_0' + a_1'\alpha + a_2'\alpha^2 &= \alpha(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2) \\ &= 2a_2 + a_0\alpha + (a_1 + a_2)\alpha^2 \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

$$a_0' = 2a_2,\ a_1' = a_0,\ a_2' = a_1 + a_2 \quad \cdots\cdots\cdots (19)$$

식(19)에서 B 계산회로는 그림4 처럼 구성할 수 있다. 동일한 모양으로 해서 C, D 및 E 계산회로는 식(20), 식(21) 및 식(22)로 구성할 수 있다.

$$a_0' = 2a_1 + 2a_2,\ a_1' = 2a_2,\ a_2' = a_0 + a_1 + a_2 \quad \cdots\cdots\cdots (20)$$

$$a_0' = 2a_0 + 2a_1,\ a_1' = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2,\ a_2' = a_0 + 2a_2 \quad \cdots\cdots\cdots (21)$$

$$a_0' = 2a_0 + a_2,\ a_1' = 2a_0 + 2a_1,\ a_2' = 2a_1 + a_2 \quad \cdots\cdots\cdots (22)$$

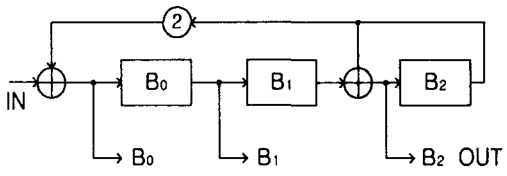

그림 4. B 계산회로

2.2 신드롬 복잡회로

신드롬 복잡회로는 4-2-1의 신드롬 계산회로에서 구한 신드롬의 값등을 26회에 1회, 3치 레지스터에 저장한다.

2.3 오류패턴 검출회로

오류패턴 검출회로는 오류수 검출회로에서 오류없이 단일오류, 2중오류 및 3중오류를 검출하고 오류크기 검출회로 및 오류위치수 검출회로에서 오류크기 및 오류위치수를 구해서 정정신호 발생회로에서 정정 신호를 출력한다.

(1-1) 오류없는 검출

다음식과 같이 성립할 때 오류가 없다.

$$B=0,\ C=0 \quad \cdots\cdots\cdots (23)$$

(1-2) 단일 오류 검출

단일오류가 제 i 행에 생긴 경우 오류 위치수를 $r_i = \alpha^i$, 오류 크기를 e^i라고 하면 B, C 및 D는 식(24)로 주어지고 식(25)가 성립할 때 단일오류이다.

$$B = e_i r_i,\ C = e_i r_i^2,\ D = e_i r_i^4 \quad \cdots\cdots\cdots (24)$$

$$B^6 + 2CD = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (25)$$

식(24)에 $e_i = 1$을 대입해서 r^i를 제거하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$B^2 + 2C = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (26)$$

식(26)이 성립할 때 $e_i = 1$, 성립하지 않을 때

$e_i=2$ 로 구한다.

오류 위치 수 r^i를 근으로 하는 다항식에 식(24)로부터 구한 r^i를 대입하면 식(27)을 얻는다. r^i는 식(27)의 x에 α^l을 모두 대입하는 방법으로 구한다.

$$x-r^i=0 \rightarrow x+2e_iB=0 \qquad (27)$$

(1-3) 동일 레벨 2중 오류검출

오류 크기가 같은 2중 오류를 제 i 행 및 제 j행에 생긴 경우 오류 위치수를 $r_i=\alpha^i, r_j=\alpha^j$, 오류 크기를 $e_i=e_j=e$ 라고 하면 B, C, D 및 E 는 식(28)로 주어지고 식(29)가 성립할 때 오류 크기가 같은 2중오류이다.

$$B=e(r_i+r_j),\ C=e(r_i^2+r_j^2) \\ D=e(r_i^4+r_j^4),\ E=e(r_i^5+r_j^5) \qquad (28)$$

$$(2B^2C+D)(B^5+BC^2+E)=0 \\ \text{또는 } B\neq 0, C=D=0, BE=0 \qquad (29)$$

식(28)에 $e=1$을 대입해서 구한 식(30)이 성립할 때 $e=1$, 성립하지 않을 때 $e=2$가 구해진다.

$$2B^2C+D+2B^4+C^2=0 \qquad (30)$$

r_i 및 r_j를 근으로 하는 다항식에 식(28)에서 구한 r_i+r_j 및 r_ir_j를 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$(x-r_i)(x-r_j)=0 \rightarrow x^2+2eBx+eC+2B^2=0 \qquad (31)$$

(1-4) 다른 벡터 2중오류 검출

오류의 크기가 다른 2중 오류가 제 i 행 및 제 j 행으로 생긴 경우 오류 위치수를 $r_i=\alpha^i, r_j=\alpha^j$, 오류 크기를 $e_i=2e_j=e$ 라고 하면 B, C, D 및 E 는 식(32)로 주어지고 식(33)이 성립할 때 오류 크기가 다른 2중오류이다.

$$B=e(r_i+2r_j),\ C=e(r_i^2+2r_j^2) \\ D=e(r_i^4+2r_j^4),\ E=e(r_i^5+2r_j^5) \qquad (32)$$

$$C^2(BE+CD)+2B^2(C^4+D^2)=0 \\ \text{또는 } B\neq 0, C=D=0, B^5+2E=0 \qquad (33)$$

r_i 및 r_j를 근으로 하는 다항식에 식(32)에서 구한 r_i 및 r_j를 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$e=1 \text{ 인때 } x-r_i=0 \rightarrow Bx+B^2+C=0 \qquad (34)$$

$$e=2 \text{ 인때 } x-r_j=0 \rightarrow Bx+2B^2+C=0 \qquad (35)$$

(1-5) 같은 벡터 3중 오류 검출

(1-1)~(1-4) 이외 일 때 3중 오류이다. 오류 크기가 같은 3중 오류를 제 i 행, 제 j 행 및 제 k 행에 생긴 경우 오류 위치수를 $r_i=\alpha^i, r_j=\alpha^j$, $r_k=\alpha^k$, 오류 크기를 $e_i=e_j=e_k=e$ 라 하면 B, C, D 및 E는 다음식으로 주어진다.

$$B=e(r_i+r_j+r_k),\ C=e(r_i^2+r_j^2+r_k^2) \\ D=e(r_i^4+r_j^4+r_k^4),\ E=e(r_i^5+r_j^5+r_k^5) \qquad (36)$$

식(36)에 $e=1$을 대입해서 구한 식(37)이 성립할 때 $e=1$, $e=2$를 대입해서 구한 식(38)이 성립할 때 $e=2$이다.

$$C(B^4+C^2)+B^2D+B^2(B^4+2C^2)+DC+2BE=0 \qquad (37)$$

$$2C(B^4+C^2)+2B^2D+B^2(B^4+2C^2)+DC+2BE=0 \qquad (38)$$

r_i, r_j 및 r_k를 근으로 하는 다항식에 식(36)에서 구한 $r_i+r_j+r_k$, $r_ir_j+r_jr_k+r_kr_i$, $r_ir_jr_k$를 대입하면 다음식이 얻어진다.

$(x-r_i)(x-r_j)(x-r_k)=0 \rightarrow B\neq 0$ 일 때

$$eBx^3+2B^2x^2+(BC+2eB^3)x+ \\ (eC+2B^2)^2+C^2+2eD=0 \qquad (39)$$

$B=0$ 일 때

$$eCx^3+2C^2X+2eE=0 \qquad (40)$$

(1-6) 다른 벡터 3중 오류 검출

(1-1)~(1-4) 이외 인때 3중 오류이고, (1-1)~(1-6)의 오류 조건은 오류무, 단일오류, 2중오류, 3중오류의 우선순위다. 오류 크기가 다른 3중오류를 제 i 행, 제 j 행 및 k행에 생긴 경우 오류 위치수를 $r_i=\alpha^i, r_j=\alpha^j, r_k=\alpha^k$, 오류 크기를 $e_i=e_j=2e_k=e$ 라고 하면 B, C, D 및 E 는 다음식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} &B=e(r_i+r_j+2r_k),\ C=e(r_i^2+r_j^2+2r_k^2)\\ &D=e(r_i^4+r_j^4+2r_k^4),\ E=e(r_i^5+r_j^5+2r_k^5) \end{aligned} \quad \cdots(41)$$

식(41)에 $e=1$을 대입해서 구한 식(42)가 성립할 때 $e=1$이고 성립하지 않을 때 $e=2$이다.

$$\begin{aligned} &(B^2+2C)[E(E+B)(2D+B^4+B^2C^2)]+\\ &2D(C^3+B^2D+CD)+C^3(2B^4+B^2C+C^2)+\\ &B^{12}+2D^3=0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots(42)$$

식(41)에서 구한 $r_i+r_j+r_k$, $r_ir_j+r_jr_k+r_kr_i$, $r_ir_jr_k$를 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x-r_i=0 \rightarrow\ &[(B^2+eC)^2+C^2+eD]x\\ &+e[B(B^4+C^2)+E]=0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots(43)$$

$$\begin{aligned} &(x-r_j)(x-r_k)=0 \rightarrow [(B^2+eC)^2+\\ &C^2+eD](x-eB^2)+e[B(B^4+C^2)+E]x\\ &+eDB^2+2BE+CD+2ec^3=0 \end{aligned} \quad \cdots(44)$$

4.3 3치 BCH(26,13) 부호의 복호회로

4.3.1 신드롬 계산회로

식(14)의 패리티 검사행렬 H에서 계산되는 신드롬 S는 다음식으로 주어진다.

$$S=Hv^T=\begin{bmatrix} A\\ B\\ C\\ D\\ E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_0+b_1 & + & \cdots & +b_{24} & +b_{25}\\ b_0+b_1\alpha^1 & + & \cdots & +b_{24}\alpha^{24} & +b_{25}\alpha^{25}\\ b_0+b_1\alpha^2 & + & \cdots & +b_{24}\alpha^{22} & +b_{25}\alpha^{24}\\ b_0+b_1\alpha^4 & + & \cdots & +b_{24}\alpha^{18} & +b_{25}\alpha^{22}\\ b_0+b_1\alpha^5 & + & \cdots & +b_{24}\alpha^{16} & +b_{25}\alpha^{21} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(45)$$

식(45)에서 A 계산회로는 각 디지트를 각각 순에 가하면 좋기 때문에 그림 5처럼 구성할 수 있다. A 계산회로 이외는 3치 BCH(26,14) 부호와 같다.

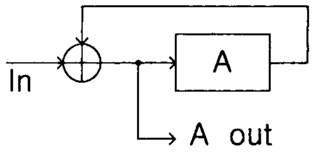

그림 5. A 계산회로

3.2 신드롬 복잡회로

신드롬 복잡회로는 4-3-1의 신드롬 계산회로에서 구한 신드롬 값 등을 26회에 1회한하여 3치 레지스터에 저장한다.

3.3 오류 패턴 검출회로

(2-1) 오류 없는 검출

식(23)이 성립할 때 오류가 없음을 알 수가 있다.

(2-2) 단일 오류 검출

$$A=e_i \quad \cdots\cdots(46)$$

식(24) 및 (46)에서 식(47)을 얻을 수 있다. 식(47)이 성립할 때 단일오류이며 오류 크기는 A이다. 식(27)에 식(47)을 대입하면 식(48)이 얻어지고 식(48)에서 오류 위치수를 구한다.

$$A\neq,\ AB^2+2C=0 \quad \cdots\cdots(47)$$

$$x+2AB=0 \quad \cdots\cdots(47)$$

(2-3) 같은 레벨 2중 오류 검출

$$A=e_i+e_j=2e\neq0 \quad \cdots\cdots(49)$$

식(28) 및 식(49)에서 식(50)이 얻어진다. 식(50)이 성립할 때 동일 레벨 2중 오류이고 오류의 크기는 $2A$이다. 식(31)에 식(49)를 대입하면 식(51)이 얻어지고 오류 위치수를 구한다.

$$(B^2+AC)^2+C^2+AD=0 \quad \cdots\cdots(50)$$

$$x^2+ABx+2AC+2B^2=0 \quad \cdots\cdots(51)$$

(2-4) 다른 레벨 2중 오류 검출

$$A=e_i+e_j=0 \quad \cdots\cdots(52)$$

식(32) 및 식(52)에서 식(53)을 얻는다. 식(53)이 성립할 때 다른 레벨 2중 오류이고 식(34) 및 식(35)에서 오류 크기 및 오류 위치수를 구한다.

$$C(B^4 + C^2) + B^2D = 0 \quad \cdots\cdots (53)$$

(2-5) 같은 레벨 3중 오류 검출

(2-1)~(2-4) 이외인 때 3중 오류이다.

$$A = e_i + e_j + e_k = 3e = 0 \quad \cdots\cdots (54)$$

식(37)이 성립할 때 $e=1$이고 식(38)이 성립할 때 $e=2$이다. 식(39) 및 식(40)에서 오류 위치수를 구한다.

(2-6) 다른 레벨 3중 오류 검출

(2-1)~(2-4)이외인 때 3중 오류이다. (2-1)~(2-6)의 조건은 무오류, 단일오류, 2중오류, 3중오류의 우선순위를 갖는다.

$$A = e_i + e_j + 2e_k = e \neq 0 \quad \cdots\cdots (55)$$

식(43) 및 식(44)에 식(55)를 대입하면 다음식이 얻어진다. 식(56)이 성립할 때 $e_k = 2A$, 식(57)이 성립할 때 $e_i = e_j = A$ 이다. 식(56) 및 식(57)에서 오류 위치수를 구한다.

$$[(B^2 + AC)^2 + C^2 + AD)x + A[B(B^4 C^2) + E] = 0 \quad \cdots\cdots (56)$$

$$[(B^2 + AC)^2 + C^2 + AD](x + \text{뮤})^2 + A[B(B^4 + C^2) + E]x + ADB^2 + 2BE + CD + 2AC^3 = 0 \quad \cdots\cdots (57)$$

V. 검 토

여기서 3중 오류 정정 3치 BCH 부호중 3치 BCH(26,14) 부호[지금부터 (26,14)부호로 약칭함]과 3치 BCH(26,13) 부호의 부호회로 및 복호회로에 대해서 간단한 비교 검토를 한다. 우선, 부호회로에서 식(8) 및 식(13) 혹은 그림 1 및 그림 2에서 (26,13)부호 쪽이 (26,14)부호 보다 3치 레지스터 및 가산기가 각각 1개 많다는 것을 알수 있다. 복호회로의 신드롬 계산회로에서 식(17) 및 식(45)에서 알 수 있듯이 (26,13)부호의 오류 패턴 검출회로에서 A계산회로가 여분에 필요하다. 그러나, 오류 패턴 검출회로에서 A로 부터 오류 크기를 즉시 구하기 때문에 (26,13)부호 쪽이 (26,14)부호보다 간단히 되는 경우가 많다. 구체적으로는 $A \neq 0$인 때이며 (26,13)부호에는 단일오류 검출에 있어서 식(26)을 생략할 수 있다. 같은 레벨 2중오류 검출에 있어서는 식(42)를 생략할 수 있다. 또 $A=0$인 때에도 다른 레벨 2중오류 검출에 있어서 식(33)이 식(53)처럼 간단히 된다. 단 각 검출식은 가능한 간단한 식을 이용하지만 가장 간단한 것이 아닐지도 모르기 때문에 필히 검토할 필요가 있다.

실현회로에서 (26,13)부호의 복호회로는 (26,14)부호의 복호회로의 약 반정도의 하드량으로 줄일 수 있다. 이상으로부터 정보점수가 1개 적게 되면 하드량이 적지않은 (26,13)부호쪽이 실용적이라고 생각된다. 더구나 오류 패턴 검출회로의 ROM화를 행하면 정보점수가 많은 (26,14)부호쪽이 또한 실용적으로 된다.

VI. 결 론

본 논문에서는 직렬신호를 취급한 3치 BCH 신호중 램덤 3중 오류정정 가능한 부호의 예로써 (26,14)부호 및 (26,13)부호를 가지고, 이들의 부호 및 복호회로의 구성에 대해서 연구하였다. 이들의 어느 쪽도 양호한 실험 결과를 얻었을 수 있어 충분히 실용 가능회로를 구성하였다. 실현회로에 대해서 하드적인량으로 말하면 (26,13)부호의 쪽이 (26,14)부호보다도 회로가 간단하였음을 알 수 있었다. 또 이들의 BCH 부호는 당연히 4치 이상의 다치이 확장 가능하였다. 현재 병렬신호를 취급한 3치 BCH 부호의 부호 및 복호회로, 그리고 보다 더 부호의 효율 (k/n)을 높이는 3치 Reed-solomon 부호 및 ROM화에 의한 오류 패턴 검출회로의 간단화에 대해서 연구중에 있다.

참고문헌

1) W.W. Peterson and E.J.Weldon, "Error correction codes", 2nd Edition, The M.I.T Press, Cambridge,

Mass., 1972.

2) 樋口, 小林, "3値 しきい デートに 基づくディジタルタの 構成", 信學論(D), J62-D, 2, pp.49-52 (昭54-62)
3) 村中, 今西, "3値 ハミング 符號の 符號 及び 復號回路", 情報理論と その 應用硏究會, 第7回 シンポジ うム, pp.126-131(昭59-11)
4) 村中, 今西, "SD 表現に よる 3値 加減集算回路", 多値論理 硏究 ノート, No.7, pp.7.1-7.10, (昭62-01)
5) K.Lei and Z.G.Vranesic, "On the Synthesis of 4-Valued current mode CMOS circuit", in proc.of 21st Int.Symp on Multiple-valued logic, pp. 147-155, 1991.
6) G.W.Dueck, "Direct cover MVL minimization with cost-tables," in proc. 22nd Int. Symp. on Multiple-valued logic, pp.58-65, 1992.

송 홍 복(Hong-Bok Song)
1983년 2월 광운대학교 전자통신 공학과 졸업(공학사)
1985년 2월 인하대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
1985년 3월~1990년 2월 동의공업전문대학교 전자통신과(조교수)
1989년~1990년 일본 九州공대 정보공학부 전자정보공학부 객원 연구원
1990년 8월 동아대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)
1994년~1995년 일본 宮崎대학교 공학부 전자공학과(POST-DOC)
1991년 3월~현재 동의대학교 전자공학과 부교수
주관심분야: 다치 논리 이론 및 다치 논리 시스템 설계, VLSI 설계, 마이크로 프로세스 응용 등임.

이 흥 기(Heung-Ki Lee)
1972년 2월 광운대학교 전자통신공학과 졸업(공학사)
1980년 2월 건국대학교 행정대학원 행정학과 졸업(행정학석사)
1995년 2월 동의대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
1998년 8월 한국해양대학교 대학원 전자통신공학과 졸업(공학박사)
1977년~현재 부산정보대학 정보통신계열 교수
* 주관심분야 : 대역확산통신, 해상이동통신