

고대 그리스의 수리철학과 수학교육관*

관동대학교 수학교육과 김종명

Abstract

This paper analyzes the philosophy of mathematics and outlook on the mathematics education as the Ancient Greece in the history of mathematics. This study tried to find out the direction of outlook on the mathematics education in the future.

0. 머리말

인류의 역사에서 과학은 철학적 물음에서부터 시작하였다. 단순한 수학의 시작은 일상생활의 필요와 경험에 따라 언어와 마찬가지로 실용적인 지식으로 축적되었다. 체계적인 과학은 그리스시대 철학 속에서 잉태하였다. 질서정연한 우주와 자연에 관한 호기심과 신의 뜻을 알기 위한 철학적인 고민을 하고 있을 때 기본적인 가정으로부터 연역적인 전개로 정당성을 입증하여 그럴듯한 해답을 주었다. 이러한 지식적 활동의 축적으로 과학은 태어나게 되었다.

그리스인들은 타민족들과 접촉에서 설득과 대화의 필요성, 즉 논리적 대화가 중요했다. 또한 범신론적 신앙과 자연의 탐구에 관심이 많았다. 그리스인의 자연과 우주관은 객관적인 대상으로 질서와 조화를 지닌 세계(Cosmos)이며 법칙성을 가지고 있었다. 만물의 본질과 근원은 무엇인가? 이 세계가 어떻게 생겨 놓으며 어떻게 성립되었는지? 신화가 아니라 구체적인 언어로 분명히 표현하려고 하였다. 이런 물음과 생각을 합리적으로 표현하는 것이 철학의 시작이다.

고대 그리스의 수학은 그리스의 철학과 함께 있었다. 실생활의 필요성과는 관계없이 「지식을 위한 지식」이 이루어지기 시작하였다. 수학이 학문으로 자리잡기 시작하던 그리스시대 이오니아, 피타고라스, 엘레아, 플라톤 그리고 알렉산드리아 학파 등의 수리철학

* 본 논문은 1999학년도 관동대학교 학술연구비 지원에 의한 결과임.

과 수학교육관을 중심으로 연구할 것이다.

수학과 수학교육의 역사를 통하여 수학에 관한 철학과 세계관을 이해하여 현재 우리의 수학교육의 과제와 문제점을 발견하여 미래의 수학교육의 방향을 모색하고자 한다.

1. 수학은 지식기술의 기본

세계가 이웃이 되는 새 천년 미래의 시대는 공장이나 부동산, 천연자원 등의 장치기술 산업에서 사고력과 창의력 그리고 인간적인 자원인 지식기술산업이 경제를 이끌어 갈 것이다. 정보와 지식기술 그리고 문화산업이 국가경쟁력의 핵심이 되고 있다. 자연을 보호하며 사람을 귀하고 정성스럽게 기르는 교육이 있을 때 국가경쟁력은 확보되는 것이다. 냉철한 수학적 사고와 따뜻한 마음 그리고 부지런하고 정직한 국민들이 많을 때 강한 국가가 될 것이다.

수학은 논리이며 과학의 언어이다. 또한 자연현상의 본질을 탐구하고 보편적 진리를 다루는 학문이다. 전반적인 과학기술의 발달로 인하여 수학에서 응용되지 않는 분야는 더 이상 존재하지 않는다. 예를 들면 수학의 Discrete Structures, Theory of Computing, Control Theory, Network, Optimization, Scientific Simulation 등은 전산학, 기계공학, 산업공학, 생물학 등과 중복되는 부분이 많이 있으리라고 생각하기 때문이다. 학제간 연구, 새로운 연구분야의 탄생은 이미 모든 분야에 걸쳐서 일어나고 있다.

수학은 정보화시대에 과학과 지식기술의 기본으로 정보와 산업기술 개발에 밀접한 관계가 있다. 과학과 정보기술의 개발과 혁신 없이는 국제경쟁의 시대에서 살아 남을 수가 없기 때문에, 창의력의 원천인 수학적 사고력의 중요성이 강조되고 있다.

수학자들이 컴퓨터를 논리적이고 실제적인 구조로 만들었으며, 계속 연구하여 발전시키고 있다. 마이크로소프트사는 순수수학자 100명 이상을 고용하여 지식기술을 개발하고 있다. 금융거래의 핵심인 암호기술, 첨단 금융기법의 금융수학, 또한 반도체 설계, 일기 예측, 양자 계산, 유전자 연구, 항공기 제작 등 첨단 과학기술은 수학적 모델에 의존하고 있다. 수리과학의 뒷받침 없이는 현대 기술개발이 이루어질 수 없게 되어 있다. '모든 것은 지식에서 나온다(아이작 싱어)'는 말처럼 '모든 기술지식은 수학에서 나온다'고 말할 수 있다.

나폴레옹은 '수학은 황금 알을 낳는 거위다'라고 말하고 수학과 과학을 장려하였다. 세종대왕이 최고의 수학 책인 <산학계몽>을 강의 받았기에 한글을 창제하고 과학을 진흥시켰던 원동력이 되었을 것이다.

2. 수학의 역사와 변화

수학의 역사는 단순히 옛날의 수학적 발견의 기록이나 현재의 발전 상황, 그리고 미래를 예측하기 위한 방법으로서의 가치보다는 수학 그 자체의 본질과 특징, 그 시대의 문화적 산물로서 철학적인 배경을 발견하기 위한 도구로서 그 가치가 인정되고 있다. 또한 수학은 문화와 문명의 발전에 중요한 역할을 담당하고 있다.

수학이 시작되고 발전하게 된 동기와 원인은 여러 가지가 있다. 인류가 경험을 통하여 실제 살아가는 데 필요해서 시작하였지만, 많은 호기심을 자극 받으며 의문점들을 발견하며, 자연과 우주를 설명하기 위해서, 신의 뜻을 이해하기 위해서, 진리를 알기 위해서, 가장 정확한 논리체계이므로 자신의 학문과 지혜를 위하여 수학을 배우고 연구한 사람들이 있었다.

동양에서는 수학을 단지 실용적인 계산기술로 생각하였다, 그러나 그리스의 자연철학자들은 '신은 수학적으로 사고한다'고 생각하고 신의 뜻에 따라 선(善)의 이데아로 참과 진리를 추구하였기 때문에 절대진리인 수학의 소양이 매우 중요시되었다. 이후 근대서양에서는 '자연을 수학적으로 설명하고 분석할 수 있다'고 생각하고 수학으로 세상의 모든 문제를 밝혀내어 해결할 수 있다는 수학 지상주의 사고가 있었다. 그러나 20세기에 '수학은 가설'이라는 생각으로 수학을 연구하게 되었다.

수학은 자유로운 상상과 창의력으로 만들어 가는 사고의 체계가 되었다. 따라서 수학은 가장 핵심적인 개념을 찾아내어 만들어 가기 때문에 '수학의 대상은 이제 어디에 있느냐' 하고 묻는다면 그 대답은 쉽지 않다.

수학의 발전으로 양적 팽창과 다양한 연구방법의 변화로 수학의 정의도 변하고 있다. 수학은 수, 형태, 운동, 변화, 공간에 대한 연구라는 정의로부터 수학은 대상의 본질적인 성질과 구조를 파악하는 학문이라는 정의가 나왔다. 즉 수학자가 연구하는 것은 본질적인 성질과 구조를 파악하고 포착하는 「양식(樣式, Pattern)」의 과학이라는 것이다. 따라서 양식의 과학인 수학은 우리가 살고 있는 물리적, 생물학적, 사회학적인 세계와 우리의 정신적인 세계 등 모두를 관찰하여 원리를 찾아내고 새로운 세계를 만들어 가는 학문이다.

3. 그리스의 수리철학

1) 철학의 시작과 이오니아 학파

그리스에서 자연철학이 발생하게 된 배경에는 온화하고 좋은 기후와 전체인구의 시민은 14% 노예는 43%, 상인은 20%로 안락하고 자유로운 생활을 할 수 있었다. 또한 새로운 문자의 사용이 한가지 이유였다. 페니키아 인이 쓰던 간단한 표음문자는 생각과 표현을 간편하게 할 수 있어 많은 사람들이 배울 수 있었고, 자신의 생각을 정확하게 표현하고 전달할 수 있었다. 여러 사람들이 지식을 배우고 알게되어 스스로 지식을 탐구하고 연구하는 사람들이 '지식을 위한 지식'을 토론할 수 있었다.

그리스의 자연과 기후는 질서가 있고 규칙적이었기 때문에 그리스인의 자연관은 객관적

인 대상으로 질서를 지닌 세계이며 법칙성을 가지고 있었다. 또한 범신론적 신앙과 자연을 탐구하고 참된 진리에 관심이 많았다.

그리스 초기의 자연철학자들은 공통적인 의문을 가지고 있었다. 그것은 우주를 이루는 근본 실재가 무엇인가 하는 의문이었다. 우주와 만물의 근원과 원질은 무엇인가? 연구와 사색으로 신화적 설명을 피하고 자연의 변화와 질서에서 해답을 찾으려는 합리적인 태도로 설명을 하려고 하였다.

자연철학자로 수학과 철학의 그리스 초기 학교를 세워 이오니아 학파를 창시한 탈레스(Thales, BC 624-546)는 ‘만물은 물(水)이다’라고 하였다. 자연에서 일어나는 자연현상을 인간의 이성으로 설명할 수 있다는 생각을 가지고 자연의 근본적인 물질은 물이라고 믿었다. 이 세계가 우리들의 눈에는 여러 모습으로 보여도 모두가 물이 변화한 모습이라고 주장했다. 이렇게 주장한 이유는, 물은 생명의 근원이고 물이 얼게 되면 바위처럼 되고 공기처럼 수증기도 되어 여러 가지로 변화될 수 있기 때문이었다.

그의 제자 아낙시만드로스는 이 세계는 계약을 안 받는 ‘아르케(Arche, 원질)’라고 했으며 또 아낙시메네스는 ‘공기’라 했다. 인간의 정신도 공기이고 불은 공기가 더 희박하여져 생기고, 물은 공기가 더 응축해져서 생기고 돌은 극도로 응축되어 태어난다고 믿었다.

탈레스는 터키의 남쪽 해안가 밀레토스의 소금과 올리브 무역상으로 이집트에서 기하학을 바빌로니아에서 천문표를 공부하였다.

그는 연역 기하학을 시작하였다. 그의 정리는, ‘이등변 삼각형(isosceles triangle)의 밑각은 같다, 교차하는 선분에 의해 만들어지는 맞꼭지각(vertical angle)은 같다, 삼각형의 내각의 합은 2직각이다, 한 변과 양끝 각이 같은 두 삼각형은 합동(congruent)이다, 원에서 지름의 원주각은 모두 직각이다’ 등의 정리를 증명한 것으로 알려졌다.

지구는 둥글고 1년은 365.25일 이다. 피라미드의 높이를 지팡이로 잰다. BC585년 5월28일 일식을 예언하여, 신의 노여움이 있다고 경고하여 전쟁이 끝났다.

그리스 문명의 초기에 바빌로니아나 이집트의 실용적이고 계산적인 수학에서 어떻게 학문적이고 연역적인 수학으로 발전하게 되었는지 의문을 가질 수 있다.

그리스에서 수학이 발달한 이유는 지리적으로 해상수송의 발달로 이집트와 바벨론 등의 수학을 배우고, 타민족들과 접촉에서 설득과 대화의 필요성, 즉 논리적 대화가 중요했다.

연역적인 수학은 탈레스로부터 시작되었다. 그는 이집트와 바빌로니아의 서로 다른 수학을 배우고 수학적 지식을 정리하였을 것이다. 또한 그는 자연에서 일어나는 모든 생성변화를 인간의 이성으로 생각하여 설명할 수 있다는 태도로 자연을 바라보았다. 자연현상의 온갖 변화에도 불구하고 그것들을 만들어주는 근본적인 물질을 탐구하였다[8]. 그는 자신의 주장에 대한 논리적이고 합리적인 설명이 매우 중요하였다. 그렇지 않다면 논쟁과 대화에서 제자들의 질문에 대답 할 수 없기 때문이었다.

이오니아 학파의 사람들은 논리적인 방법으로 모든 것을 규명하려 했다. 그들의 대화와 토론에서 경험적이고 직관적인 관찰과 합리적인 사고력이 중요했다. 이론들을 주장하여

논쟁과 토론으로 논리적 증명을 확인하여 철학과 수학적 이론들을 만들어 내었다. 이러한 전통을 이은 철학자들은 신과 우주 그리고 자연을 바라보며 명상과 대화 그리고 토론을 거듭하였을 것이다.

2) 피타고라스 학파

피타고라스(Pythagoras, BC 572-492년)는 에게해(海)의 사모스섬[島]에서 출생하였다. 탈레스로부터 공부했을 것으로 추측된다. 그는 바빌로니아와 이집트 등을 여행하였다. 40세에 남부 이탈리아 크로톤(Crotona)으로 이주하여 피타고라스 학교를 세워 기하학, 천문학, 음악 등을 가르치고 연구하며 20년 동안 제자들을 양성하였다. 이 단체의 귀족주의적 경향과 집단의 영향을 경계하여 민주 폭도들에 의해서 학교는 불타고 학생은 학살되었고, 피타고라스 학파를 해산시켰다. 피타고라스는 메타폰툼(Metapontum)으로 피신하여 그곳에서 생애를 마쳤다. 그러나 그후 약 200년간 피타고라스 학파는 계속 존속되었다.

그의 학교는 일종의 종교집단으로 비밀교단을 결성하고, 당시의 밀의(密儀) 종교의 형식에 따라 절제, 질박(質朴), 심신의 단련을 목표로 하고, 신들과 양친, 친구, 계율에 대하여 절대적 신실(信實)과 자제, 복종을 설교하였다. 그의 종교적 교리는 영혼의 불멸과 윤회(輪廻), 사후의 인과응보, 인간과 동물과의 유사성을 강조하고 육식을 금하였다. 2는 여성을 3은 남성을 상징한다 그래서 5는 결혼을 의미한다고 주장했다. 오각형의 별 모양 뺏지를 달고 집단생활을 하였다.

영원한 진리를 가르치는 수단으로 수학과 음악을 중시하였는데, 음악에 사용되는 음의 높이를 정하는데 있어서 수학적인 비율에 의하여 나누는 것을 고안하여, 일현금(一絃琴)의 현의 길이를 2 : 3의 비율로 분할함에 따라 완전 5도의 음정을 얻었으며, 이 5도를 중복해가는 방법을 '피타고라스 음계'라고 한다. 음정이 수비례(數比例)를 이루는 현상을 발견하고 음악을 수학의 한 분과로 보았다.

피타고라스는 만물을 구성하는 기본 요소는 '수(數)'라고 주장했다. 수는 생각 속에만 존재하는 보이지 않는 추상적인 개념이다. 또한 그들은 '영원한 질서의 신은 수학적으로 사 고한다'고 생각하고 신의 뜻을 찾기 위해서 자연에서 수학적 이론을 열심히 연구하였다. 그들의 수는 자연수를 말하는 것으로 이들 수와 기하학에서의 점과를 대응시켰다. 1은 하나의 점이고 2는 하나의 선이며, 3은 하나의 면이고, 4는 하나의 입체이다. 4라는 수로 만든 피라미트는 돌이나 나무로 만든 피라미드가 아니고 비물질적인 단지 마음의 개념에 불과한 것이다. 자연의 세계는 이 수와 그 비례에 의해 성립되는 법칙으로 질서와 조화가 있는 존재로서 이해하였다. 수에 의미를 부여하여 이성(理性)은 1, 정의는 4, 결혼은 5, 영혼은 6이라는 수와 그 관계로 모든 것을 설명하였다. 정수론으로는 형상수의 연구로 자연수열의 연속항의 임의의 항까지의 합은 삼각형수이고, 마찬가지로 홀수열의 합은 정사각형수임을 기하학적으로 보였다. 또 완전수, 친화수, 인수, 수의 비례와 평균의 연구, 상가평균, 조화평균 등도 분류하였다.

선은 입차의 점으로 이루어졌다. 따라서 길이는 반드시 유리수로 표현된다. 선은 유한점

이 아니고 무한점이다.

모든 증명은 공리(Axiom)로부터 연역되고 이 공리는 일반적으로 이론 체계를 세우는 기초로 인식된 탈레스의 초기 연역방법을 강화하고 보완하였다.

직각삼각형에서 피타고라스의 정리 $a^2 + b^2 = c^2$ 이 성립함을 증명하였다. 이 정리에 의해서 유리수가 아닌 무리수가 발견되었다. 이것은 만물의 근본이 유리수라는 그들의 공리로부터 해결하기 어려운 문제였으므로 수로부터 제외하고 비밀로 하였다.

그들은 산술과 대수를 열심히 연구하였으나 무리수의 발견으로 수학의 연구는 기하학적 방법으로 방향을 돌렸다. 또한 우주는 기하학으로 이루어졌다는 수학적인 자연관을 가지고 있었다.

피타고라스와 그의 제자들은 임의의 삼각형의 내각의 합이 180도 즉 2직각과 같음을 발견하고 이를 증명하였다. '플라톤의 다면체(多面體)'로 불리는 정사면체, 정육면체, 정십이면체를 알고 있었다고 한다. 정오각형의 작도는 한 선분을 중외비(中外比)로 끊는 문제로 환원시켜 이 작도를 발견하였다. 천문학에서는 지구가 구형(球形)임을 확신하고, 또 중심화(中心火)의 주위에 지구와 태양 및 기타 행성이 원 궤도로 회전한다는 일종의 지동설을 제창하였으나, 다른 학자들의 인정을 받지 못하였다. 그러나 그와 그의 학파에서 확립한 수학적, 천문학적 지식은 오리엔트의 과학문명의 바탕이 되었다.

우주의 근원과 원질의 탐구는 계속되어서 피타고라스는 추상적인 양(量)인 수(數)에 의해 세계가 만들어져 있다고 주장하였고, '신은 수학적으로 사고한다'라는 사상으로 영혼을 정화하여 신과 합일한다는 생각을 가지고 영혼의 정화를 위하여 수학을 연구하였다. 수학의 연구는 영원한 진리로 연역적이고 논리적인 증명이 반드시 필요하였다. 이러한 수학적 연구는 논리주의(Logicism) 수리철학으로 수학의 이론은 선형적인 지식인 논리로부터 이끌어 낼 수 있는 진리로 구성된다는 입장을 고수하고 여기에 어긋나는 무리수의 발견은 비밀로 부칠 수밖에 없었다. 무리수의 발견으로 이들의 연구가 산술이나 대수보다는 기하학에 중점을 두었던 이유 중에 하나이다.

3) 엘레아(소피스트) 학파

그리스는 기원전 480년에 살라미스만의 대 해전에서 페르시아 군을 격파하고 에게해에서 페니키아 사람을 추방하고부터 그리스의 상권은 날이 갈수록 융성하게 되었다. 아테네는 큰 세력을 얻었고 학자들이 몰려드는 중심지가 되었다. 피타고라스 학파도 이곳에 모였고, 아낙사고라스도 아테네에 이오니아 철학을 이식했다. 이 아테네의 시민들 중 일상의 일은 노예에게 맡기고 '소피스트'라고 하는 지자(智者)라고 불리어진 직업적인 가정교사로 이루어진 무리가 출현했었다. 이들이 대화술과 변론의 기술을 주로 하게 되었으므로 후에는 켈레가라고 불리어졌다.

철학자 제논(Zenon, BC 495-435)은 파르메니데스의 설을 옹호하여 무한히 많다(多)와 운동의 존재를 인정하면 자기모순에 빠지게 된다는 것을 증명하였다. 무한히 많은 것이 존재한다면 그것은 무한소(無限小)인 동시에 무한대(無限大)이며 유한이면서도 무한이 아

다면 안 된다고 반박하였다. 이러한 제논의 역설(Paradoxe, 逆說)은 운동에 관해서 이분법(二分法)이 있다, 만일 직선을 무한히 쪼갤 수 있다면 운동은 불가능하다. 왜냐하면 한 개의 선분상의 모든 무한한 점들을 유한의 시간 안에 통과할 수 없기 때문에 운동은 시작조차 할 수 없다는 것이다. 아킬레스와 거북이의 문제에서, 아킬레스는 거북이를 앞지르지 못한다. 왜냐하면 그가 우선 앞서 있는 거북이의 출발 지점에 도달하지만 그 때 거북은 제2의 지점으로 전진하였고 그가 또 그 지점에 도달하면 거북은 이미 제3의 지점에 도달해 있기 때문이다. 이런 일이 한없이 되풀이됨으로 아킬레스는 거북을 앞지르지 못한다는 것이다. 만약 시간을 더 이상 쪼갤 수 없는 아주 짧은 순간들로 이루어져 있다면 움직이는 화살은 정지해 있다는 것 등이 있다.

원에 대한 기하학은 피타고라스 학파에서 제외된 것이었는데 이 때 그 시초가 열렸다. 소피스트들의 연구에서는 유명한 삼대각도 문제가 그 초점이 되었는데 어느 것이나 모두 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용해서 작도하는 문제였다.

엘레아 학파의 제논은 아킬레스와 거북이의 이야기와 화살에 관한 역설을 통하여 그의 경쟁 학설로부터 얼마나 쉽게 우스운 결론을 이끌어낼 수 있는가를 보여줌으로써 파르메니데스 보다는 자신의 철학적 체계를 방어하려 했던 것 같다[14]. 이러한 소피스트의 역설은 직관주의(Intuitionism) 수리철학으로 그 동안 논리적으로 구성한 많은 수학적 이론들의 기초가 흔들려서 다시 한번 그들이 이루어 놓은 업적들을 뒤돌아 봐야만 했다.

엘레아 학파는 수를 사물과 분리시켜서 비존재로서 학문에서 제외 시키려 했다. 그들의 방법은 가설의 설정과 귀류법에 의한 증명방법으로 그리스의 초기수학의 논리로부터 이어 받은 것이다[2]. 그들은 “어떤 것이 존재한다고 주장하려면 만들 수 있는 구체적인 방법이 있어야 하며, 비서술적 정의는 원소가 존재한다는 가정을 하고 있기 때문에 어떤 대상도 구성해 낼 수 없다”는 것이다[7]. 그들의 공격은 시각적이고 직관적이었다. 피타고라스의 선은 무한 점으로 되어 있다는 것과 영이 아닌 것을 무한히 많이 합하면 무한히 커질 것이라는 생각으로 무한의 개념에서 모순이 발생함을 보여주었다.

제논의 공격은 피타고라스 학파를 겨누었다. 피타고라스 학파는 수 1과 점을 명확히 구별짓지 안 했으며, 산술과 기하학의 관계를 명확히 정립시키지 안 했다. 이 결과 그들은 기하학적인 입체와 감성적인 물체를 구별하였다[19].

피타고라스 학파는 절대진리인 수학으로 완벽한 논리와 구성으로 신(神)의 뜻을 밝히려 하였던 것이다. 그러나 그들은 위기에 직면하게 되었다. 그럴듯한 논리로 증명하였다는 엘레아 학파의 반박을 받고 난감하였을 것이다. 그들은 공격과 비난에 방어를 하여 위기를 극복하여야 했다. 해결방법은 확고한 기초를 이루는 공준과 공리, 그리고 정의를 설정하여 완전한 이론으로 수학을 완벽하게 구성하는 것이었다.

엠페도클레스는 ‘사랑과 미움’이 자연의 속에 존재하여 그 힘이 4원소를 흩어지고 모아 주는 작용을 한다고 주장했다.

데모크리토스는 만물의 근원은 보이지는 않지만 살아 움직이는 원자(Atom)라 하고, 자연의 모든 현상을 원자의 운동으로 설명하였다.

4) 플라톤 학파

플라톤(Platon, BC 426-347년)은 소크라테스(BC 471-399년)의 제자로 데오드로스로부터 기하학을 배웠다. 그는 아카데미(Academy, BC 389년)를 창설하여 이 학교의 정문에 '기하학을 모르는 자는 들어가서는 안 된다'는 문구를 내걸었다고 한다. 기하학 수론 등 수학은 학문의 기본임을 강조하고 수학을 사랑했고 피타고라스 학파와 교류하였다. 이집트나 바빌로니아의 생활 수학이 아닌 이데아의 세계의 고상한 수학을 추구하여 수학이란 기계의 힘을 사용하지 않고 사유(思惟)에 의해서 즉 자와 컴퍼스만을 사용하여 문제를 해결을 해야만 의의가 있다고 생각했다.

우주는 신의 유일한 창조물이며 가장 완전하고 아름답게 만들었다. 우주의 물질은 신이 기하학적인 정다면체로 대응되는 4원소로 구성하였으며, 정십이면체는 우주의 상징으로 하여 우주를 창조하였다고 설명하였다. 우주의 구성은 구형과 원운동으로 설명하였다. 구형은 어느 방향에서 보아도 모양이 같기 때문에 완전하고 가장 아름다운 모양이다. 원운동은 영원히 반복할 수 있기 때문에 완전한 우주도 원운동을 해야한다고 생각했다.

우리가 옳다고 생각하는 눈, 귀 등 감각기관을 통해서 얻은 인식이란 불명확하다고 생각하고 비유로서 동굴 속에 갇힌 사람의 예를 들었다.

철학에서는 고상한 신(神)의 정신인 이데아(Idea, 관념)설로 서양철학의 전통이 되었다. 이데아는 존재의 바탕이면서 질서의 원천과 목적이 되며, 최고 인식의 내용이며 현실계를 초월한 성스러운 직관을 동반한다. 우리의 삶의 목적은 이데아의 세계 즉 이상적인 세계로 승화시키는데 있다. 최고의 이데아는 선(善)의 이데아라 했는데 선은 참과 진리를 포함하고 있어서, 항상 진리인 수학의 소양이 매우 중요시되었다. 완전한 원과 직선은 이데아의 세계에서만 이루어진다.

진리란 참됨이고 바르게 함이다. 참됨이란 실재로 존재하는 '리얼리티(Reality,實在)'를 의미하고 또 옳음, 좋음 즉 바르고 선하다는 것을 가르친다. 진리란 인식론적, 존재론적, 가치론적 세 가지 측면에서 옳고 좋아야한다. 참됨이란 객관적인 인식, 진정한 존재, 올바른 가치를 동시에 만족해야한다. 진리가 무엇인가 어떤 기준과 표준이 있다면 거짓과 틀린 것 잘못된 것 진리가 아닌 것을 확실히 구분할 수 있을 것이다. 진리란, 본질적인 것, 영원한 것, 자기 동일적인 것, 순수한 것을 뜻한다. 자연 세계에는 둥근 원은 완벽한 것은 없지만 수학의 기하학의 세계에는 완벽한 원이 존재한다고 본다. 플라톤은 이상적(理想的)인 이데아의 세계를 최고의 이상으로 생각하여 이것에 대해 평생 동안 연구했던 것이다. 변하지 않는 진리를 규명하여 진리의 기준으로 하여 올바른 문화가 풍요롭게 발전하고 이상적인 국가를 세울 수 있기 때문 이었다. 철학인 형이상학이 깊이 연구되었던 이유중의 하나이다.

플라톤이 말하는 인간의 이상은 단순하고 명료하다. 이성이 자신의 본분을 다하고 있는 머리의 '지혜'와 기질이 이성의 지시를 받는 가슴의 '용기', 그리고 지혜와 용기에 의해 욕망이 조절되는 손발의 '절제', 지혜와 용기와 절제가 조화를 이룬 온몸의 '정의로운 마음인

것이다. 이와 같은 인간의 이상이 국가의 이상으로 실현된 상태가 바로 철인 왕의 정치이다. 머리의 지혜와 상응하는 통치계급, 가슴의 용기에 상응하는 군인계급, 손발의 절제에 상응하는 민중계급, 그리고 이들 모두가 자신의 직분에 충실히 살아가는 사회에서 플라톤은 정의가 실현된 국가를 본 것이다.

이런 올바른 질서가 실현되기 위해서는 국가의 구성원 모두가 무지와 억견(臆見)들을 넘어 참된 인식에 도달해야 한다. 이 때문에 플라톤은 세상 사람들이 쉽게 있다고 생각하는 현상의 껍데기를 초월한 존재의 본질로서 '이데아(Idea)'를 상정하게 되었다. 이처럼 인식과 억견과 무지에 대한 정의, 선에 대한 정의, 인식의 근거 등 가장 인간답게 살 수 있는 이상적인 공동생활을 꿈꾸었던 플라톤은 현실의 좌절로부터 시간과 장소와 상황을 초월하는 근본적인 원리들을 도출해 냈던 것이다.

플라톤은 정신세계에서는 순수함을 찾을 수 있는 반면에, 신체의 불순함에서 해방되어야 한다며 정신세계를 강조했다. 이런 생각은 서양의 정신의 근본을 이루고 있다. 당시 수학자들은 '모든 진리는 증명되어야만 그 명제의 확실성을 보장받는다'는 생각 때문에 정확한 증명이 필요하였다. 또한 신은 수학적으로 사고한다는 철학을 가지고 이미 존재하고 있는 플라톤의 이상적인 진리를 찾기 위해서는 절대진리인 수학적인 소양이 필요하였다. 그리스 수학은 오리엔트의 경험적이고 귀납적인 실용수학과는 달리 연역적이며 이론적인 수학이었다. 플라톤 학파의 사람들은 '수학의 명제는 변할 수 없는 진리이다'라는 확고부동한 수학적 관점을 가지고 있었다. 수학은 외적이고 정적이며 한계가 있으며 수학의 이론은 고정된 불변의 진리로 생각한다. 수학의 본질은 논리성이며 논리의 체계성을 중요시했다. 따라서 이미 존재하고 있는 진리인 수학적 이론은 논리적으로 전개되며 보다 완전한 이론 체계를 위해서는 형식체계를 구성하여 형식 속에서 영원한 진리가 존재한다는 논리주의, 형식주의 수학은 완전한 절대적 지식 체계로써 이데아(Idea)의 세계를 표현하는 것이었다. 이러한 생각을 가지고 수학을 바라보는 수리철학을 플라톤주의(Platonism)[1]라고 한다. 이들의 진리는 배후에 숨겨져 있으며, 수는 그 배후의 본질이다. 질서의 자연에서 보이지 않는 수학적 원리를 하나씩 발견해 나갔다.

아리스토텔레스(Aristoteles, BC 348-322년)의 부친은 마케도니아의 왕의 시의(侍醫)였다. 17세에 플라톤의 아카데미에 입학 20년간 생활한 그는 학원의 두뇌이고 부지런한 독서가 이였다. 왕자 필립2세(알렉산더)의 가정교사를 지냈으며, 백과사전 등 약 50권의 책을 집필. 논리학과 수학을 동일시했다.

자연과학뿐만 아니라 논리학, 정치학 등도 연구하였다. 경험이 가장 중요하다고 생각하였다. 인간은 사회적 동물이다. 모든 학문의 아버지로 소요학파의 모체가 되는 튀케이온 학교를 세웠다.

생물학에서 목적론적 생물학으로 18세기 린네의 분류까지 이 학설을 계속 받아들여졌다. 동물을 520종으로 분류, 고래를 포유동물로 분류하였다. 이것은 2000년 후에 인정되었다. 그는 또 진화론을 주장하였다, 이것은 2100년 후 서기1859년 다윈이 학설로 제창하였다.

천문학에서는 지구중심의 50개의 동심원으로 55개의 천구가 겹겹이 싸여 지구 둘레를 돈다. 4개의 원소설을 설정하고 위계(位階)사상으로 설명하였다. 4원소 중 가장 완전한 원소는 불이고 하늘을 이루고 있는 가장 완전한 원소인 제5의 원소 아이테르(Aither)는 월하계(月下界)에 있으며, 지상의 불은 가장 고상하고 이상적인 세계를 염원하기 때문에 하늘로 높이 올라가는 것이다. 따라서 불, 공기, 물, 흙의 원소는 가벼운 순서대로 가벼울수록 더 고귀한 물질이 된다. 또한 생물의 세계에서는 식물은 동물에게 동물은 인간에게 인간은 신에게 복종해야만 한다는 복종관계로 설명하고 있다. 운동의 원리에는 사랑과 미움으로 설명하고 있다. 예를 들면 사과는 땅을 사랑하기 때문에 땅으로 떨어진다. 자연운동으로 지상에서는 직선운동이고 천상에서는 원운동이다. 포물 운동은 강제운동이다. 이러한 학설은 17세기까지 수정할 수 없을 정도로 과학발전의 장애가 되었다.

그는 우리가 보고 알고 있는 경험의 세계에 대하여 연구했으며, 합리적 사고력을 강조하고 논리학을 확립하였다. 그는 또한 과학을 주제와 방법에 따라 몇 개의 분야로 분리하고 생물학, 천문학 정치학 등 관찰과 논리적 사고를 강조하였다. 아리스토텔레스의 과학은 경험적인 논리주의(Logicism)이었다.

5) 알렉산드리아 학파

유클리드(Euclid, BC 330경-275년경)는 플라톤의 아카데미아에서 공부하고 알렉산드리아에서 활동하였다. 기하학 원론(原論, Elements, Stoiicheia)을 저술하였다. 이 책의 내용은 대체로 플라톤 학파의 테아이테토스나 에우독소스 및 그 이외의 학자들이 얻은 결과에 자기 자신이 얻은 결과들을 병합하여 집대성한 것이고 이것을 플라톤 학파의 교리에 따라서 공리, 공준, 정의, 정리의 순서로 배열하고 정리에는 엄밀한 증명을 붙인 것이다. 이 책은 전13권으로 1-4권은 다각형, 평행선, 피타고라스 정리, 5권은 유클리드의 비례이론, 6권은 평면기하학 응용, 7-9권은 완전수, 10권은 테아이테토스의 복잡한 무리수, 11-13권은 피타고라스와 플라톤의 입체기하학 등이 있다. 그 외의 저술로는 자료, 구면기하학의 현상, 도형의 분할에 관하여, 광학, 음악의 원리 등이 있다.

엘레아 학파의 직관주의자들에 대한 공격을 방어하고 피하기 위해서는 완벽한 공리와 이론체계의 수학이 필요하였다. 공리적 방법을 통하여 수와 수학의 세계를 논리적으로 존재함을 보여주려는 것이다. 수학의 구성과 이론에서 완전한 수학의 구성을 위해서 끊임없는 토론과 대화로 진리를 발견하기 위하여 연구하였다. 공리와 정의를 바탕으로 엄밀한 논증을 거쳐 연역적으로 체계화된 완전한 수학을 구성하려는 노력은 형식주의(Formalism) 수리철학이다. 유클리드는 그 때까지의 수학적 결과를 집대성하여 기하학 원론을 발표하였다.

기하학을 배우던 포톨레마이오스 1세는 “이 기하학을 배우는 데에는 지름길이 없느냐?”는 질문에 유클리드는 “전하! 기하학에 이르는 왕도는 없습니다.” 라고 대답했다. 어떤 학생이 기하학을 배우면 어떤 이익을 얻을 수 있느냐고 물었을 때, 그는 “그 학생에게 몇 푼 갖다 주어라, 배우는 것에서 이득을 찾겠다니!”라고 말했다고 한다.

유클리드의 업적은 연역적인 기하학을 체계화하여 논리적이고 합리적인 구성에 있다. 그 이전의 기하학의 결과들을 집대성하여 계통적으로 상당히 엄밀한 이론체계를 구성하였다. 기하학의 이론들을 질서 있게 수정하고 재조직했다. 기하학의 연구를 단순화하고 재정리했다. 정리와 증명을 논리적 순서로 기록했다. 증명 방법을 새롭게 하거나 수정하였다. 유클리드 기하학의 연역적 증명 정신은 서양 과학의 바탕과 기초가 되었다.

아르키메데스(BC 287-212)는 이탈리아 남쪽 시실리아섬의 시라쿠사에서 천문학자의 아들로 태어났다. 알렉산드리아에서 공부하였고, 플라톤 이후 육체노동을 멀리하였다. 그는 수학에서 무한급수 등을 연구하고, 적분학의 전신인 '구적법'을 연구하여 원둘레는 $2\pi r$, 원 넓이와 구의 표면적 포물선 영역의 넓이와 부피를 구하는 것과, 공과 그 외접하는 원기둥과의 관계를 밝힘으로써 '원기둥의 부피는 그것에 내접하는 공의 부피의 1.5배이다'라는 것을 알아냈다. 그는 이 밖에도 외접과 내접과의 96각형에서 계산한 '아르키메데스의 원주율' $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ 등이 있다. 오늘날에 원주율의 값을 3.14로 계산한 것은 바로 이 계산법에 의한 것이다. 지렛대의 기계학, 물리학, 부력의 원리, 유체 정역학 등의 연구와 접 도르래, 물푸기, 돌 던지는 기계, 반사경 등 실용적인 장치 40여 가지를 발명하였다.

설자리가 있고 충분히 긴 지렛대만 있다면 지구도 들겠다는 일화와, 히에론 2세의 순금 왕관의 검사로 은이 섞여있음을 발견하였고, 목욕탕에서 부력의 원리를 깨닫고 유레카(Eureka)를 외쳤다는 등 유명한 이야기가 많다.

포에니전쟁에서 로마병사에 의해 최후를 맞았다. 그의 소원대로 원기둥에 구와 원뿔이 내접한 그림의 비석을 세워 주었다.

아폴로니우스(BC 262경-200년경)는 수학자로 소아시아의 페르게 태생으로, 알렉산드리아에서 공부하였다. <원추 곡선론> 8권을 썼는데, 거기에는 400개의 명제가 실려 있는데 그 때까지의 연구와 그의 철저한 연구결과에 의하여 구성되어 있다.

그 외에 수학자로는 에라토스테네스의 천문학, 히파르코스의 삼각표, 메넬라우스의 구면학, 프톨레마이오스의 알마게스트, 응용수학의 헤론, 대수학의 대가 디오판토스 그리고 파푸스 등이 있다.

플라톤주의적 순수학문으로만 연구되었던 수학은 헬레니즘시대의 아르키메데스와 헤론 등 많은 수학자들은 실용적인 성과를 이루었다. 그들의 업적은 물리학의 역학적 이론을 수학적 관점에서 연구하여 자연의 법칙을 수학적으로 이해하려 했고 또 그것을 실제생활에 활용하여 많은 실용적인 장치들을 발명하였다. 아르키메데스의 최후처럼 그의 과학 정신인 이론과 응용의 창의적 정신은 계승되지 못하고 서양은 긴 터널의 중세를 맞이하게 되었다.

4. 그리스의 수학교육관

다른 나라 사람들과 교역과 접촉이 활발했던 그리스 사람들은 합리적인 설득력이 필요했다. 따라서 합리적이고 논리적인 사고가 중요하게 되었다. 또한 여러 신(神)들을 섬기는 문화가 있어서 그들의 세계관에는 자연, 인간, 신은 같은 질서 속에서 관계가 이루어진다. 자연철학자 탈레스는 이 세계와 만물의 원질(原質, Arche)은 무엇인가? 라는 의문을 가지고 자연과학에 대한 철학적 질문을 하였다. 피타고라스(BC 582-497)는 '신은 수학적으로 사고한다'라 하고 세계와 우주의 원리와 질서는 도형과 수(數)의 조화 법칙에 의해서 밝힐 수 있다고 보았다. 그는 원질의 문제에서 눈에 보이지 않는 '수(數)'로 설정하고, 자연과 우주의 세계가 어떤 원리와 법칙으로 운동하고 작용하며 영원히 변하지 않는 원리가 존재한다고 생각하여 수학적 이론들을 탐구하였다. 그의 정신은 논리적이고 합리적인 고상한 정신적 가치를 추구해서 자연을 관념적이고 정신적인 원리에 따라 설명하려고 하였다.

이오니아 학파와 피타고라스의 학파의 수학교육관은 구성주의(Constructivism)로 학생들이 스스로 생각하여 자신의 잠재력을 확대하고 신장하며, 수학적 이론을 구성하여 자신의 이론을 발표하여 이론에 대한 대화와 토론으로 정당성을 점검하도록 교육하였다. 그들은 수학적 이론을 우주와 자연 속에 숨어 있으므로 발견하는 것이었다. 구성주의는 수학의 이론을 다른 사람으로부터 전수 받는 것이 아니고 각 개인이 생각하고 행동하므로 깨달아가는 교육이다. 수학의 이론은 학생들 스스로 발견하고 창안하여 증명하고 적용하여 지식을 구성할 수 있다는 교육관이다. 이러한 교육관은 소크라테스와 플라톤에 영향을 주었다.

구성주의의 한가지 교육방법으로 플라톤의 발견학습이 있다. 이 방법에서는 교사는 산파의 역할과 같다. 학생들에게 지식을 수동적으로 주입시키는 일이 아니고 학생이 능동적이고 활동적으로 스스로 생각하여 진리를 깨달을 수 있도록 도와주어야 한다. 소에게 물을 먹이기 위해서 소를 물가로 가도록 할 수는 있어도 먹게는 할 수 없다. 따라서 학습자가 생각하게 하기 위해서는 학습에 흥미를 느끼게 하여 학생이 가지고 있는 잠재력을 확대하고 신장하도록 도와주어야 한다. 학생의 자발적인 행동과 독자적인 활동으로 학습의 발전적 변화도 발견학습에 포함된다. 문제를 풀 때 처음 떠오르는 수학적 아이디어와 풀이법의 발견은 학생 스스로 감격을 느낄 수 있어야한다. 이런 수업을 위해서 교사는 학습의 내용과 질문 등 철저한 준비가 필요하다.

플라톤의 이데아(Idea) 이론에서 이데아는 존재의 바탕이면서 질서의 원천과 목적이 되며, 최고 인식의 내용이며 현실계를 초월한 성스러운 직관을 동반하면서, 우리의 삶을 이데아의 세계 즉 이상적인 세계로 승화시키는데 있다. 최고의 이데아는 선(善)의 이데아라 했는데 선은 참과 진리를 포함하고 있어서, 논리적이고 진리인 수학의 소양이 매우 중요시되었다[7].

플라톤의 아카데미아에서 수학을 교육한다는 것은 수학적 진리를 통해서 궁극의 목적인 이데아의 세계를 가장 잘 이해할 수 있는 통로의 수단이었다. 수학을 배우는 과정에서 가장 수학을 잘하는 학생들을 뽑아 변증법을 가르치고 연구하도록 하여 국가를 수호하고 통치하는 지도자로 세우는 것이다.

'수학의 명제는 변할 수 없는 진리이다'라는 확고한 믿음을 가지고 진리는 존재하며 발

견해야 한다는 수학교육관은 절대적 학문주의(Academicism)이다. '신은 수학적으로 사고한다'라는 확고부동한 플라톤주의 수리철학을 가지고 지도하는 수학교육관이다. 수학은 객관적이고 정적이며 한계가 있으며 수학의 이론은 고정된 불변의 진리로 생각한다. 수학을 지도하는 방법적인 면에 관심을 가지고 지식을 전수하는 전통적인 수학교육관으로 실제주의와 같으나, 수학의 본질은 논리성이며 논리를 체계적으로 전개할 때 가장 좋은 학습방법으로 본다. 수학의 본질은 의미보다는 형식 속에 존재한다는 형식주의, 논리주의, 수학은 절대적 지식 체계로써 이데아(Idea)의 세계를 이상적으로 생각하는 플라토니즘(Platonism)등은 모두 절대적 학문주의 수학교육관에 포함된다. 이러한 관점에서 수학은 절대적이고 객관적이므로, 완전한 절대 진리로 간주된다.

절대적 학문주의의 대표적인 교과서는 유클리드의 기하학 원론이 있다. 수학은 타 교과와 관계가 있고 실제생활에 직접 활용할 수 있다는 유용성과 인간 삶의 광범위한 분야에서 활용할 수 있다는 언급이 없어서 학생들은 수학의 매력이나 호기심이 없는 딱딱하고 지루한 교과로 생각하게 된다.

아리스토텔레스는 경험적 학문주의로 논리적 수학교육을 하였다. 관찰과 논리적 사고를 강조하였다. 경험적이고 합리적인 논리주의의 과학과 경험적 학문주의는 중세 서양과학의 바탕과 기초가 되었다.

헬레니즘시대의 아르키메데스와 헤론 등 많은 수학자들은 절대적 학문주의에 의해서 교육을 받았으리라 짐작이 되지만 그들은 순수수학만이 아니고 실용적인 업적과 성과를 이루었다. 그들의 수학교육은 실제주의 경향이 있어서 수학적인 관점에서 자연의 법칙을 연구하여 수학적으로 이해하였다. 수학적 이론을 활용하여 실제 학습활동과 행동으로 많은 실용적인 장치들을 발명하였다.

학생들이 실제생활에서 경험할 수 있고 필요한 수학적 상황을 만들어 수학의 학습재료로 활용하여 학생들이 현실적인 느낌과 관심을 가질 수 있도록 하여 수학학습의 목표가 확실한 가운데 형식화와 추상적인 수학의 이론을 이끌 수 있는 실제주의 교육관의 경향이 있음을 볼 수 있다.

그러나 아테네 학교의 폐쇄와 사회환경의 급변한 이유도 있겠지만 그들의 저술들은 난해하다는 이유로 많은 사람들이 그들의 책을 읽을 수 없었다. 특히 엄밀한 논리를 생명으로 한 그리스의 복잡하고 추상적인 수학은 일반인에게는 거의 쓸모가 없었다. 그후 긴 중세를 지나 그리스의 수학이 햇빛을 보았을 때 유럽은 변하였고 공리적 논증수학은 서양의 근대과학의 가장 핵심적인 기초가 되었다.

5. 맺는 말

그리스의 수리철학과 수학교육관의 변화는 근대 수리철학의 변화와 유사한 점이 많다. 그들은 질서정연하고 확실한 논리적 구조의 수학의 이론을 발견하여 수학적으로 증명하고

구성하여 튼튼하고 체계적인 구조물을 만들었다고 보았다. 그러나 그러한 구성의 이론체계에서 취약성이 직관주의자들에 의해서 밝혀지고 공격을 받게 되었다. 다시 새로운 기초적 토대를 만들어 구성해야만 했다. 그 결과 논리적이고 형식적인 구조로 만들어진 유클리드의 원론이 탄생했다.

수학교육관의 변화도 그리스 초기의 구성주의 교육과 발견학습으로 활발한 수학적 업적을 이루었다. 수학적 이론이 누적되자 교과서가 나와서 절대적 학문주의 수학교육관이 발생하였다. 헬레니즘시대에는 학문주의는 실용적 실체주의의 경향이 있었다. 그러나 수학교육은 중세의 시대적 변화에 따라 침체의 길을 걷게되었다.

새 천년 지식기술산업과 문화의 사회에서는 지식의 축적이 중요한 것이 아니라, 지식과 정보 등을 판단하고 관리하여 창조하는 창의력이 중요하다. 폭넓게 경험하고 깊이 있게 사고하고 합리적인 판단과 행동하는 적극적이고 창의적인 인간을 길러내는 일은 국가경쟁력 차원에서도 매우 중요하다.

수학은 인간정신의 문화적 산물이며 현대과학의 발달과 인간 삶의 모든 곳에 활용되고 인간성의 도야에 필요한 문화적 자산이다. 따라서 수학은 누구나 배울 수 있는 보편성과 수월성의 교과이며, 꼭 배워야하는 인류의 자산이다. 수학교육을 통해서 각 개인이 건강한 꿈을 키우고 자신감과 자존심을 키워주는 교육이 되어야하고, 학생들의 다양한 소질과 특기 등 개성과 적성에 맞는 교육을 지향해야할 것이다.

플라톤의 발견학습에서는, 수학을 배울 때 수학적 지식은 전수 받는 것이 아니고 자신의 활동으로 탐구하여 새로운 지식을 스스로 구성하여 배우게됨으로 논리성과 창의성을 배울 수 있다.

교사는 학생들에게 학습자료의 제공자와 안내자로서 수학시간에 깊은 사고력을 불러일으킬 수 있는 분위기와 수학에 대한 호기심과 매력을 느끼도록 만들어야할 것이다. 약간의 긴장 속에서 즐거움과 희열을 가질 수 있는 과목이 되게 해야 한다.

학생 스스로 배우려는 의욕과 자신감을 가지고 능동적인 탐구와 자신의 학습방법을 가지고 수학적 활동을 통하여 스스로 발견할 수 있도록 도와주어야 한다. 학생중심의 수학교육은 학생의 입장에서 수학의 내용을 선택하고 수업을 실행하고 평가하여야 한다.

그리스 수학교육의 역사에 나타난 다양한 수리철학과 수학교육관의 장점을 취하고 단점을 보완하는 수학교육관으로 수학 학습에서 알아 가는 기쁨을 주며 학생 중심적인 교육과 인간적인 접촉으로 역동적이고 활동적인 수학교실이 되도록 해야한다.

참고 문헌

1. 강문봉, Lakatos의 수리철학의 교육적 연구, 서울대학교 대학원 박사논문, 1993.
2. 김용국, “그리스에 있어서 연역적 수학의 성립과 Elea학파,” *J. Historia Mathematica* Vol. 4, No. 1(1987), 25-34.

3. 김용운, “수학사학과 수학교육,” *J. Historia Mathematica* Vol. 3, No. 1(1986), 21-33.
4. 김응태, 박한식, 우정호, 수학교육학개론, 서울대학교 출판부, 1984.
5. 김종명, “수학사에서 수학의 패러다임 형성과 수학교육관,” *J. Historia Mathematica* Vol. 10, No. 2(1997), 53-63.
6. 남승인, “수학교육과 교사의 수학관,” *Proceedings of Math. Education* Vol. 3, The 18th National Meeting of Math. Education(1995), 185-193.
7. 박문환, 수학교육의 철학적 기초에 대하여, 서울대학교 대학원 석사논문, 1989.
8. 박성래, 과학사서설, 한국외국어대학교 출판부, 1993.
9. 유연주, 임재훈, “급진적·사회적 구성주의와 포스트 모더니즘,” *대한수학교육학회 논문집* Vol. VII, No. 2(1997), 359-380.
10. 임정대, 수학기초론의 이해, 청문각, 1995.
11. 임재훈, “플라톤주의, 듀이주의, 구성주의 수학교육철학,” *Math Festival Proceeding* 제1집(1999), 212-231.
12. 임재훈, 홍진곤, “빠아제와 플라톤의 수학적 인식론 비교 연구,” *대한수학교육학회 논문집* Vol. VII, No. 2(1997), 315-326.
13. 정영옥, “수리철학의 변화와 수학교육에의 시사점,” *대한수학교육학회 논문집* Vol. VII, No. 1(1997), 295-316.
14. 고사까(방준필, 변영우 역), 철학사 여행, 사민가, 1990.
15. A. Aaboe(김안현, 이광현 역), 초기수학의 에피소드, 경문사, 1998.
16. Devlin(허민 역), 수학: 새로운 황금시대, 경문사, 1995.
17. Devlin(허민, 오혜영 역), 수학: 양식의 과학, 경문사, 1996.
18. Eves(이우영, 신항균 역), 수학사, 경문사, 1995.
19. F.M. Cornford, *Plato and Parmenides*, London, 1939.