

역문제를 이용한 음향장내의 소음해석

박 성 완*

The Analysis of Noise using of Inverse Problem in Acoustic Field

Sung-Oan Park*

Abstract

This paper is concerned with a analysis of noise by inverse problem available for analyzing the two and three-dimensional acoustic field problems. The noise of analysis considered in this study can be reduced to an optimum problem to find the optimal set of parameters defining the vibrating state of noise source surfaces.

The optimal set of parameters are searched by the standard optimization procedure minimizing the square sum of the residuals between the measured and computed quantities of sound pressure at some points in the acoustic field.

Computation is carried out for typical examples in which the noise sources are located on the infinite plane. It is demonstrated that the noise of analysis can be effectively made by using the sensitive reference data.

Keywords : Acoustic Problem(음향문제) , Noise Source(소음원) , Inverse Problem(역문제) , Boundary Element Method(경계요소법), Infinite Plane(무한평면) , Helmholtz Equation(헬름홀쯔방정식)

1. 서론

최근의 현대사회에서 음향문제에 관한 관심이 높아지면서 소음의 저감이나 소음원의 검출 등에 관한 여러가지 연구가 활발하게 행하여지고 있다. 소음저감을 위한 대책에서 고려해야할 대상은 음장에 관한 것으로서 보통 종래

의 음압분포만이 아닌 벡터량인 음향강도(sound intensity)를 사용한 음장의 가시화 등의 연구도 진행되고 있지만 측정오차나 주위의 음원으로부터 방출되는 소음의 영향등 문제점도 많다. 실제의 문제에 있어서 음장을 정확하게 파악하는 것은 곤란하나 경계요소법이나 유한요소법 등을 사용한 수치해석적으로 음장해석과 소음원의 동정이

* 시립 인천전문대학 기계설계과

나 소음의 능동제어 시뮬레이션(simulation)에 관한 연구도 진행되고 있다.⁽¹⁻³⁾

음향문제의 지배방정식은 Helmholtz 방정식으로 표시되기 때문에 특이함수(singular function)는 보다 복잡해져서 적분을 해석적으로 실시하는 것이 불가능하게 된다. 이 때문에 수치적분이 적용되는 경우가 많기 때문에, 항상 특이성(singularity)의 처리 문제가 된다. 이와같은 경우에 한개의 요소를 더욱더 작은 요소로 분할하는 방법⁽⁴⁾을 택하거나 또는 절점을 요소로부터 미소거리 만큼 이동시키는⁽⁶⁾ 것에 의해 각각 특이성을 피하고 있다. 그러나 이들 모두 수학적 근거는 결여되어 있으며 더욱이 수치적분에 의지하는 것은 계산시간의 증대를 초래한다는 결점을 가지고 있다. 따라서 특이함수를 급수전개에 의해서 근사적으로 표현하여 적분을 해석하는 방법이 제안되기도 하였지만⁽⁵⁾ 이함수는 삼각형요소에서만 적분가능한 것이다. 이러한 사정으로 수치해석법에 의한 음향해석은 오래전부터 연구가 되었으나 실용적인 응용에는 적은 편이다.⁽⁷⁻⁹⁾

본 연구에서는 음장해석을 하기 위하여 필요한 소음원에 관한 정보를 얻는 것을 목적으로 한다. 음장내부의 몇개의 점에 음압 또는 음향강도의 측정값이 주어지면 음장이 Helmholtz 방정식으로 지배되므로 소음원의 추정은 음향역문제로 취급된다. 더욱이 소음원의 위치와 형상이 주어지면 진동(oscillation)상태를 나타내는 미지변수의 최적값을 구하는 최적화문제로 귀착되므로 이 가정을 기초로 음압의 측정 데이터를 보조정보로 하여 경계요소법과 최적화 방법^(10,11)에 의한 소음원의 역문제를 연구하고자 한다.

2. 관련이론해석

2.1 음향문제의 경계요소법

매질이 미소진폭으로 정상진동한다고 가정하면 음장은 Helmholtz 방정식에 의하여 지배된다. 이때 경계적분방정식은 다음 식으로 주어진다.

$$C(y)p(y) + \int_S q^*(x, y)p(x) dS(x) = -j\omega\rho \int_S p^*(x, y)v(x) dS(x) \quad (1)$$

여기서 $j = \sqrt{-1}$, ω 와 ρ 는 각 진동수 및 매질의 밀도이다. $C(y)$ 는 점 y 에서 경계의 기하학적 형상

에 의해 정해지는 정수 $C(y) = \frac{1}{2}$ 이다. 또한 $p(x)$ 는 음압, $v(x)$ 는 입자속도, $p^*(x, y)$ 와 $q^*(x, y)$ 는 Helmholtz 방정식의 기본해(fundamental solution)이며 3차원 문제에 대해서 다음 식으로 주어진다.

$$p^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (2)$$

$$q^*(x, y) = \frac{\partial p^*(x, y)}{\partial n} \quad (3)$$

여기서 $\frac{\partial(\quad)}{\partial n}$ 은 경계의 외향 법선방향의 여현으로, r 은 2점 즉, x 와 y 사이의 거리를 나타낸다. 음장 내부의 점 x 에서 음압은 경계상의 음압 및 입자속도가 구해진다면 그값을 사용하여 다음과 같은 식으로 나타낸다. 즉

$$p(y) = - \int_S q^*(x, y)p(x) dS(x) - j\omega\rho \int_S p^*(x, y)v(x) dS(x) \quad (4)$$

방정식(1), (4)의 적분방정식을 각각 경계요소법에 의해서 이산화하여 매트릭스(matrix) 표시하면 다음과 같이 된다.

$$[H]\{p\}_s = [G]\{v\}_s \quad (5)$$

$$\{p\}_v = -[A]\{p\}_s + [B]\{v\}_s \quad (6)$$

여기서 매트릭스 $[H]$, $[G]$, $[A]$, $[B]$ 는 기본해를 사용하여 계산된 이미 알려진 계수매트릭스이다. 또한 첨자 s 는 경계상의 절점에 관한 값, 첨자 v 는 음장내부의 점에 관한 값을 표시한 것이다. 식(5)와 (6)의 대수방정식에 경계조건을 고려해서 풀이한다면 경계상의 모든 미지 절점량과 음장내부의 점에서 음압을 구하는 것이 가능하다.

2.2 역문제에 의한 음향해석

본 연구에서는 소음원의 위치와 형상은 이미 알려져 있다고 가정했을때 소음원의 진동상태만이 미지인 음향역문제에 관하여 고려한 것이다. 즉 이 역문제는 소음원의 진동상태로 표시하는 미지변수를 하나의 파라미터로 취하여 최적화문제로 귀착시킨다. 경계요소해석 프로그램⁽¹²⁾을 3차원 음향문제 해석용으로 개선하고 최적화 방법을 사용

하여 아래의 방법에 의한 소음원의 역해석을 행한다. 먼저 음장내의 한점에 대한 음압의 측정값이 보조정보로 주어진다면 이것을 기본 데이터로 한다. 그래서 가정한 진동상태에 대한 경계요소해석에서 얻어진 음압과 기본 데이터와의 잔차평방근을 목적함수로 취하여 최적화 방법에 의한 파라미터 z 의 최적값을 구한다. 이때 목적함수의 무차원량 R 을 다음식으로 정의한다.

$$R = \log_{10} \left[\frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{(p_{rn} - p_{ron})^2}{p_{ron}^2} + \frac{(p_{in} - p_{ion})^2}{p_{ion}^2} \right\} \right] \quad (7)$$

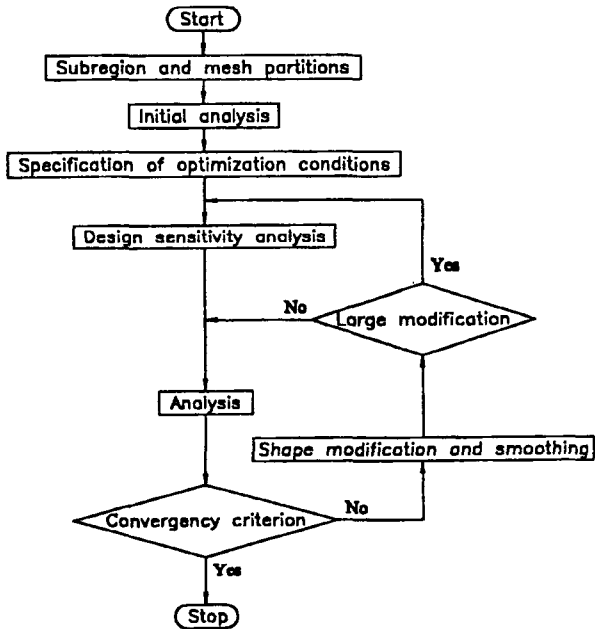


Fig.1 Main flow of solution procedure

여기서 N 은 측정점수, p_r 과 p_i 는 각각 음압의 실수부와 허수부이며 첨자 o 는 기본 데이터로 표시한 것이다. 반복계산에 있어서 수렴판정은 다음에 표시하는 식(8)의 범위에서 어느 쪽이든지 만족될 때 수렴한 것으로 한다.

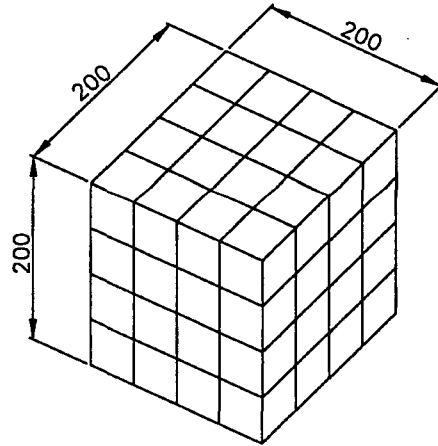
$$|R^k - R^{k-1}| < \epsilon, \sum_{j=1}^M |Z_j^k - Z_j^{k-1}| < \eta \quad (8)$$

여기서 k 는 반복횟수, M 은 파라미터의 총수이며 ϵ 과 η 는 수렴판정 값이다. 본 연구에서 최적화 방법인 최속강하법⁽¹¹⁾ (steepest descent method)을 사용했다.

Fig. 1은 이론에 기초하여 개발된 분석 방법의 흐름도를 표시한 것이다.

2.3 해석정도의 검증

엄밀해가 존재하는 문제에 경계요소법 음장해석을 적용하여 정도의 검증을 행하며 입방체 내부공간의 공명주파수를 구하여 엄밀해와 비교하였다. Fig. 2는 경계요소법 해석을 위한 요소분할을 나타낸 것이다. 한변이 200mm인 벽면을 16요소로하고 전체 96요소로 분할하였다. 기체의 음속 c 및 밀도 ρ 는 다음과 같은 값을 적용했다.



(unit : mm)

Fig.2 Mesh pattern of cavity

$$c = 340 \text{ m/s} \quad (9)$$

$$\rho = 1.2 \text{ Kg/m}^3$$

공명주파수는 식(5)에 있어서 매트릭스 $[H]$ 의 행렬식이 0으로 간주되는 주파수로서 정의된다. 그래서 매트릭스 $[H]$ 에서 행렬식의 값을 주파수로 변화시켜서 cavity의 공명주파수를 계산하였다. Fig. 3에 계산값과 엄밀해를 비교하여 표시한 것이다. 그림의 횡축은 계산값

을, 종축은 엄밀해를 나타낸 것으로써 즉 엄밀해는 다음 식에 의하여 주어진다.

$$f = \frac{c}{2a} \sqrt{m^2 + n^2 + k^2} \quad (10)$$

여기서 a 는 cavity의 한변의 길이이며, (m, n, k) 는 모드(mode)의 차수이다. 2 kHz 까지 그림의 대각선 상에 해가 존재하고 있으며 경계요소법에 있어서 해의 정도는 지극히 양호한 것을 나타내고 있다.

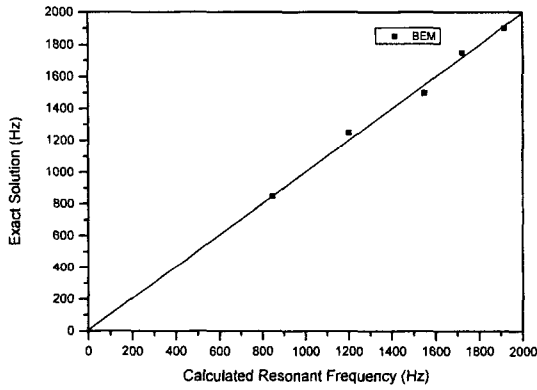


Fig.3 Resonant frequency of cavity

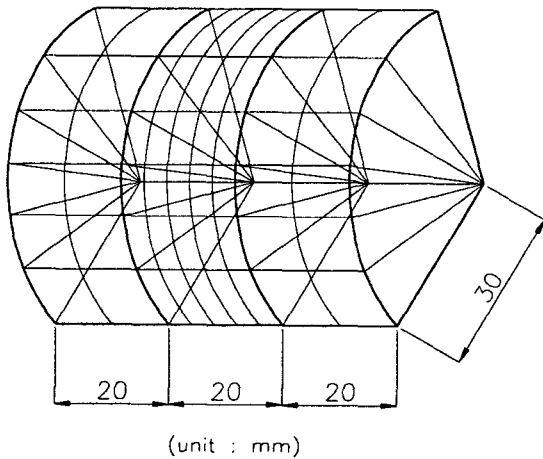


Fig.4 Mesh pattern of piston cylinder

또한 해석의 범용성을 살펴보면은 Fig. 4와 같이 반

경 30 mm 인 실린더를 길이방향 3개의 단면으로 각각 20 mm 씩 나누고 피스톤 표면에서 단위수직속도로 작용하는 다영역 피스톤문제를 대칭성으로 고려해서 피스톤 실린더의 $\frac{1}{4}$ 영역을 66요소로 분할하여 해석 하였다. 표면에는 0인 수직속도의 초기 경계조건으로하고, 대칭성을 이용하여 실린더 길이에 따라 2개의 면을 사용했다. 기체의 음속 c 및 밀도 ρ 는 식 (9)와 같은 조건하에서 기준압력은 2×10^{-5} 으로하여 피스톤 표면에서의 음압의 크기를 계산하였다. 계산한 결과를 Fig. 5와 Fig. 6에 표시하였다. Fig. 5와 Fig. 6에서 경계요소법과 해석하는 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있었다.

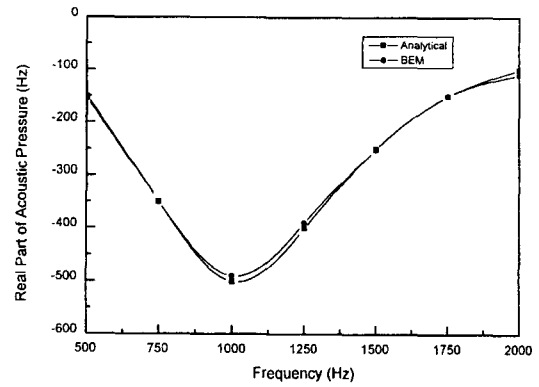


Fig.5 Real part of acoustic pressure at the surface of the piston for varying frequencies

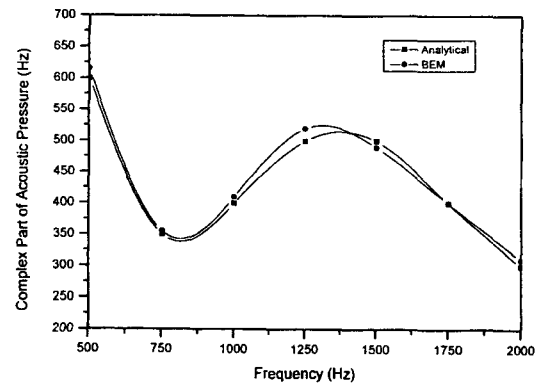


Fig.6 Imaginary part of acoustic pressure at the surface of the piston for varying frequencies

3. 수치계산 및 고찰

음향장내의 역문제를 이용한 소음해석은 무한평면상에 2개의 소음원이 설치되어 있는 경우에 각각의 음원의 미지 진동상태를 구한다.

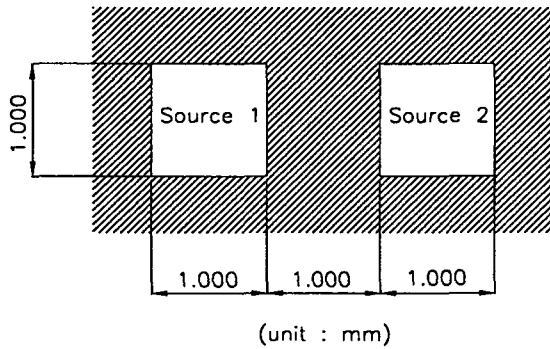


Fig.7 Locations and shapes of noise source models

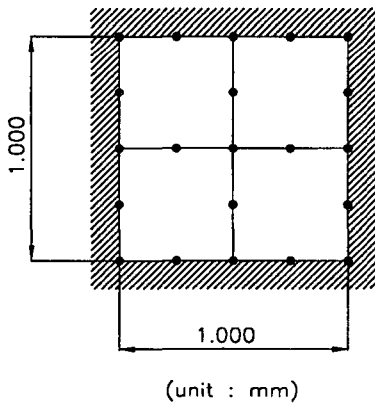


Fig.8 Boundary element discretization for square noise source model

2개의 음원은 동일한 크기인 정방형의 음원으로 취하여 Fig. 7에 표시한 것처럼 간격은 무한평면에 설치되어 있는 것으로 가정한다. 최적화 문제에서 설계변수인 미지함수를 근사함수의 자유도의 총수로 취하여 오차가 비교적 큰 요소에는 자유도를 추가하며, 오차가 비교적 작은 요소는 자유도를 제거하여 목적함수의 최소값을 조사한다. 자유도를 변화시키는 방법은 해석 프로그램을 변경하지

않아도 되는 h 법에 기초하여 요소의 내삽함수의 차수를 일정하게 하여, 절점수만을 변화시켜서 자유도를 변화시키는 방법을 적용하였다. 초기 요소분할에서 자유도를 증가시키는 요소분할변경을 행할 경우 계산정도의 개선에 기여하지 않은 자유도를 발생할 가능성이 있다. 그래서 자유도 총수가 초기요소분할을 초월하지 않는 제약조건을 부여한다. 설계감도의 계산은 요소를 2등분하여 절점을 추가하는 것에 따라서 목적함수의 감소량으로 하였다. 정방형 음원에 4변형 2차 등매개변수요소를 사용한 경계요소분할도를 Fig. 8에 표시한다. 음원의 진동상태는 각 음원상의 임의의 점에 있어서 평면에 수직인 방향의 입자속도 v_s 가 다음과 같은 식으로 주어진다고 가정한다면

$$v_s(x_1, x_2) = A_m \cos\left(\frac{x_1}{L_1} \pi\right) \cos\left(\frac{x_2}{L_2} \pi\right) \quad (11)$$

이며, 여기서 x_1 과 x_2 는 각각의 음원의 중심을 원점으로 취한 음원상에서의 직각좌표이며, L_1 과 L_2 는 음원의 변의 길이를 나타내고 있다. 또한 계수 A_m 은 음원에 대한 입자속도의 크기를 결정하는 복소수이며, 각 음원에 대한 A_m 의 실수부와 허수부에 대한 각각의 값을 미지 파라미터로 하여 최적화 계산을 한다. 이때 기본 데이터에는 식(11)의 계수 A_m 에 대한 어떤값을 가정해서 경계요소해석에 의해 얻어진 음압값을 측정값으로 사용한다. 미지 파라미터의 초기값은 전부 0으로 가정했다. 음압

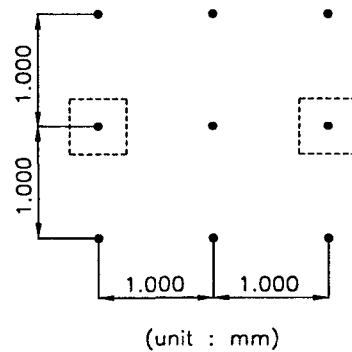


Fig.9 Arrangement of measuring points

의 측정점은 무한평면으로 부터 10,000 mm 떨어진 평면상에 Fig. 9와 같이 배치하였다. 지금 계산은 음원과

함께 300 Hz의 순음을 방출하고 있는 것으로 가정해서 음속이나 공기밀도등의 값은 식(9)와 같은조건하에서 수렴판정치 $\epsilon = \eta = 10^{-6}$ 으로 하였다. 2개의 음원에서 입자속도의 크기가 동등하고 그 위상차 θ 가 0° , 90° , 180° 로 가정하여 계산을 하였다. 반복계산에 의해서 얻어진 잔차의 수렴결과를 Fig.10에 표시한다. $\theta = 90^\circ$

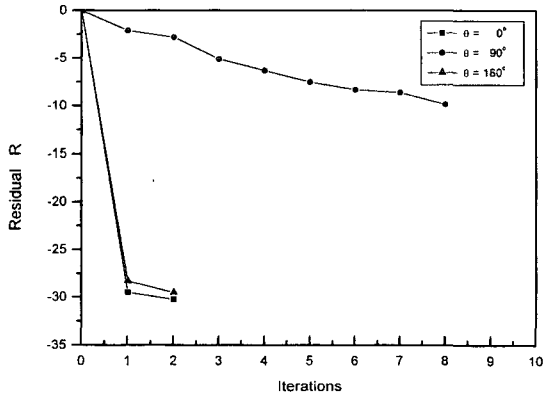


Fig.10 Convergence with respect to non-dimensional residual

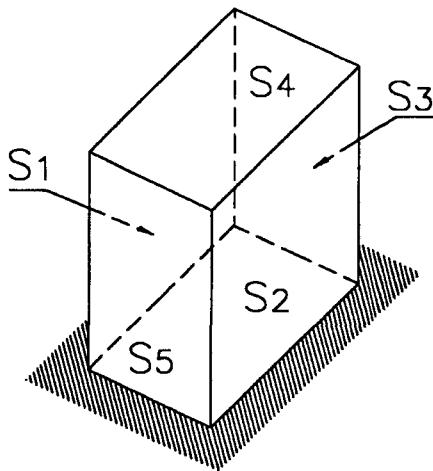


Fig.11 Paralleloiped noise source model

일때는 8회의 반복횟수를 필요로 하며, $\theta = 0^\circ$, 180° 와 비교하여 반복횟수가 많게 되어 있지만 모두 최적인 파라미터가 얻어졌다. 또한 Fig.11에 표시하는 것같이 무

한평면상 직방체의 소음원이 설치되어 있는 경우를 대상으로 수치계산을 하였다. Fig.12는 소음원에 대한 경계요소분할도를 표시한 것이다. 소음원의 진동상태는 S_1 에서 S_5 까지 표면이 각각 식(11)에서 표시되는 입자속도 v_s 로 진동하고 있는 것으로 가정하였다. 다만 아래에 표시하는 계산에 있어서 각 진동면의 입자속도의 크기는 S_1, S_2 의 정방향 면은 어떤 동일한 크기로, 그리고 S_3, S_4, S_5 의 장방향 면은 그 $\frac{1}{2}$ 의 입자속도의 크기로 진동하고 있는 것으로 가정하였다. 음압의 측정점은 Fig.13에 표시한 것 같이 각 진동면의 중심에서 100 mm 만큼 떨어진 점에 1점씩 합계 5점을 배치하는 것으로 하였다. 소음원에서 340 Hz의 순음이 방출되고 있는 것으로 가정하여 음속이나 공기밀도 등의 값은 식(9)와 동일한 값을 사용하여 계산을 하였다. 여기서 표기를 간단히 하기 위하여 각 진동면 사이의 위상차 θ 를 다음과 같은 식으로 표시하였다.

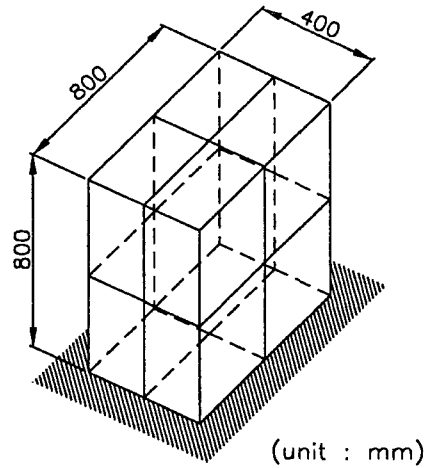
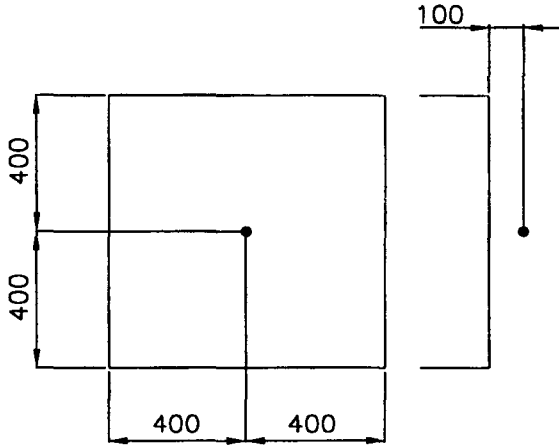


Fig.12 Boundary element discretization of paralleloiped noise source

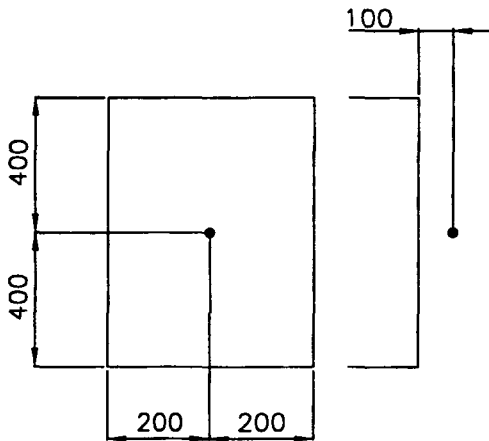
$$\theta = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{15}) \quad (12)$$

다만 θ 의 각 성분은 모두 S_1 으로 입자속도의 위상기준을 취하고, 다른 면에서 입자속도의 위상지연이 이루어 졌다면 θ_{13} 은 S_1, S_3 사이에서 입자속도의 위상지연을 나타내게 된다. 먼저 모든 진동면이 동위상 즉 $\theta = (0^\circ,$

$0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ$)으로 진동하고 있다고 가정하여 계산을 하였다. 반복계산에 의하여 얻어진 잔차의 수렴결과를



(unit : mm)
(a) For square surface



(unit : mm)
(b) For rectangular surface

Fig.13 Arrangement of measuring points

Fig.14에 표시하였다. Fig.14로부터 알수있는 것 같이 파라미터의 최적값을 구하는데는 15회의 반복계산을 필요로 하지만 미지 파라미터수가 증가하기 때문에 Fig.10의 결과와 비교하면 잔차의 수렴상황이 양호하지 않는 것을

알 수 있다. 이와같은 문제에 대한 대책으로 보다 효율 좋은 파라미터의 최적값을 구하기 위하여 본 연구에서는 최적화 계산에 따른 감도에 착안해서 계산하는 방법을 고찰하였다. 여기서 감도는 어떤 파라미터의 변화에 대한 보조정보의 변화 비율로 정의되는 값이다. 따라서 정도에 영향을 미치는 약한감도는 무시한다. 약한감도를 무시하는 것에 관하여 이론적 뒷받침은 충분하지 않지만 현재 경험에 의존하고 있다. 처음 어느정도 까지 약한감도를 무시하여 파라미터의 최적화를 실시하고 그렇게 하여도 파라미터의 최적값에 접근하지 않으면 강한감도를 무시하여 파라미터의 최적값을 구한다. 감도의 크기인 보조정보는 파라미터에 대한 것 보다 유효한 정보를 포함하고 있지만 그와같은 보조정보만을 사용하여 계산하는 것은 효율좋은 파라미터의 최적값이 얻어진다고 생각된다. 본 해석에 있어서 측정점의 음압값의 실수부와 허수부에 대한 변화의 비율이 각각 감도로 되기 때문에 복수의 측정점에서 감도가 구해진후 각 파라미터에 대하여 실수부와 허수부에 관한 감도의 평방합이 최대가 되는 측정점을 1점씩 선별해서 그점에 관한 보조정보만을 사용하여 최적화 계산을 하였다. 이방법을 이용해서 $\theta = (0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ 으로 가정하여 계산을 행한 잔차의 수렴결과를 Fig.15에 표시했다.

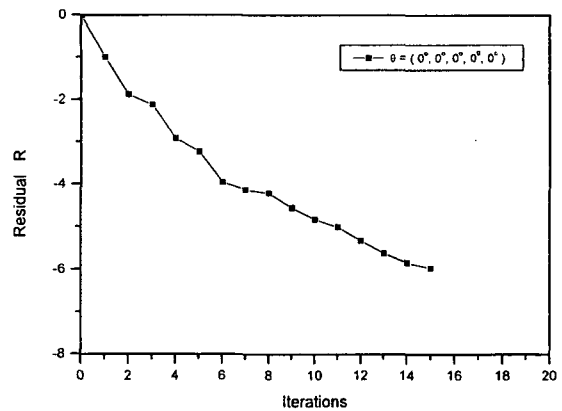


Fig.14 Convergence with respect to non-dimensional residual obtained by using all components of reference data

Fig.14의 결과와 비교한다면 잔차의 수렴은 반복횟수 $\frac{1}{2}$ 에서 파라미터의 최적값을 구할수 있다. 그러므로 감

도의 값을 고려한 유효한 보조정보만을 선택해서 계산할 경우 효율 좋은 파라미터의 최적값이 얻어지는 것을 확인할 수 있다. 대표적으로 소음원이 $\theta = (0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$, $\theta = (0^\circ, 180^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$, $\theta = (0^\circ, 180^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ)$ 의 위상차이로 진동하고 있는 3종류의 경우를 대상으로 각각에 대하여 상기의 방법에 기초한 감도를 고려하여 계산을 하였다.

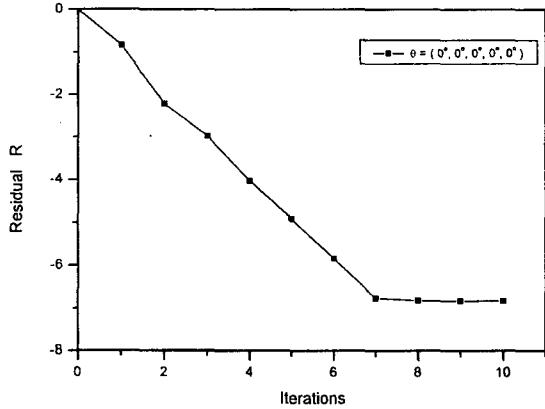


Fig.15 Convergence with respect to non-dimensional residual obtained by using selected components of reference data

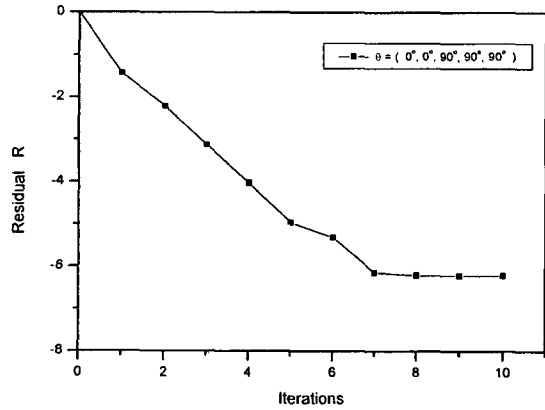


Fig.16 Convergence with respect to non-dimensional residual obtained by using all selected components of reference data

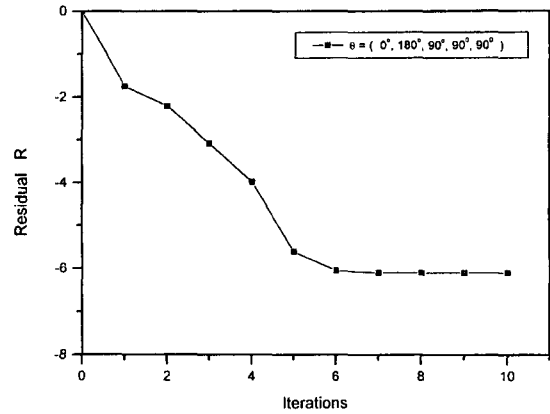


Fig.17 Convergence with respect to non-dimensional residual obtained by using selected components of reference data

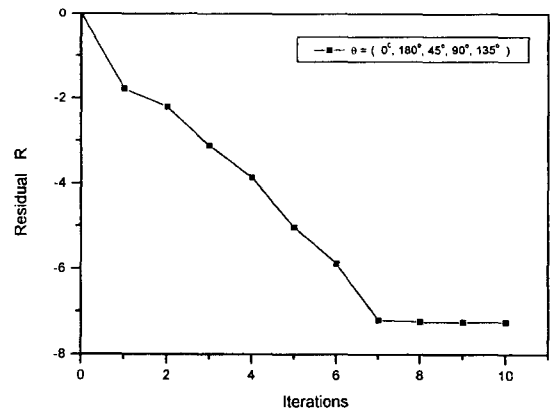


Fig.18 Convergence with respect to non-dimensional residual obtained by using selected components of reference data

따라서 잔차의 수렴결과를 Fig.16, Fig.17, Fig.18에 나타내었고 소음원의 진동모드를 Fig.19, Fig.20, Fig.21에 표시하였다. Fig.16, Fig.17, Fig.18에서 어느 경우든 Fig.15의 결과처럼 적은 반복횟수로 최적의 파라미터를 구할 수 있다. 또한 Fig.19, Fig.20, Fig.21으로부터 S_3 , S_5 면의 위상변화에 따른 소음원의 진동모드가 조밀하게 되는 것을 알 수 있으며 음향방출 효과가 큰 것을

알 수 있다. 따라서 음향방출 효과를 낮게하기 위하여 진동모드 파장을 소음원의 파장보다 짧게하면 된다. 즉 구조의 강성을 작게하면 좋은 것을 알 수 있다.

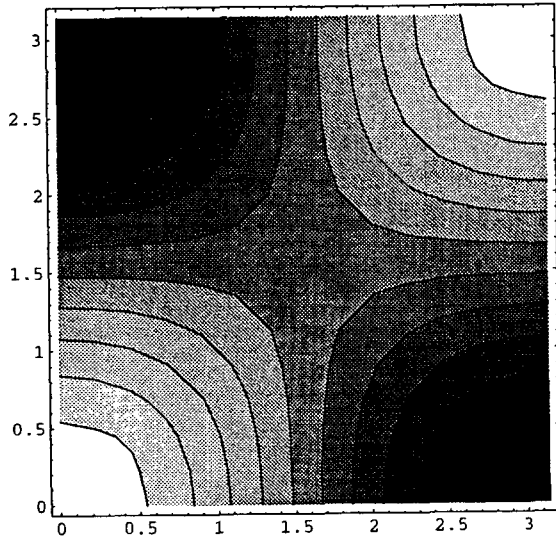


Fig.19 Mode shape of noise source[$\theta=(0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$]

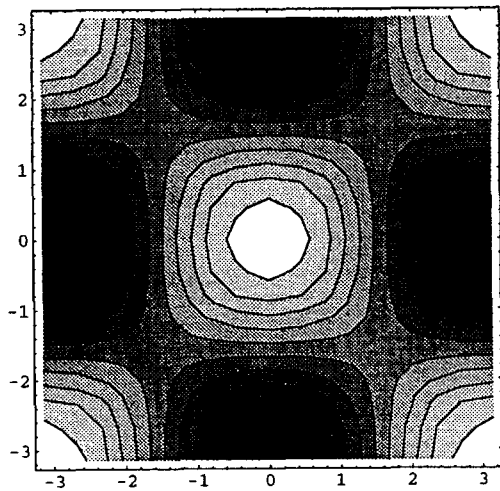


Fig.20 Mode shape of noise source[$\theta=(0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$]

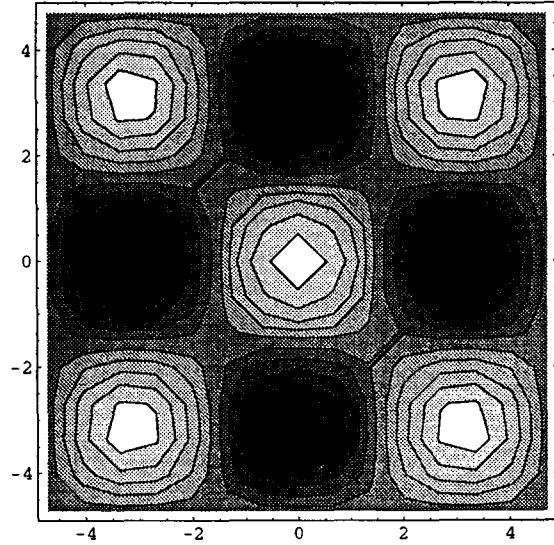


Fig.21 Mode shape of noise source[$\theta=(0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$]

4. 결론

본 연구는 음장내의 몇개의 점에서 얻어진 음압의 측정값을 보조정보로 경계요소법과 최적화 방법에 의하여 소음원의 미지 진동상태를 추정하는 방법에 관하여 고려하였다. 본 방법의 유용성을 확인하기 위하여 몇가지의 대상에 수치계산을 행한 결과 파라미터에 대한 보조정보의 감도를 고려해서, 유효한 정보를 포함한 보조정보만을 선택하여 효율 좋은 최적값이 구하여지는 것을 표시하였다. 보조정보의 주어지는 방법은 결과에 크게 영향을 미치는 것으로 고려되며 그 취급에는 충분한 주의가 필요하다고 생각된다. 본 연구에서 개발한 시스템(system)은 더욱더 복잡한 소음원에서 적용 가능하며 보다 실제적인 소음원의 역해석도 가능하다. 본 시스템에 의한 근음장(近音場)의 계측 데이터를 사용하여 소음원의 해석을 하고 이것을 기초로 경계요소해석을 행하면 원음장(遠音場)의 정확한 예측이 가능하게 된다.

참고 문헌

1. Chen, L. H., and Schweikert, D. G., "Sound

- Radiation from an Arbitrary Body". The Journal of the Acoustical Society of America, 35, 1963, pp. 1626-1631.
2. Shenck H. A., "Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems", The Journal of the Acoustical Society of America, 44-1, 1968, pp. 41-45.
3. Bell, W. A., Meyer, W. L., and Zinn, B. T., "Prediction the Acoustic of Arbitrarily Shaped Bodies Using an Integral Approach", AIAA Journal, 15-6, 1977, pp. 813-817.
4. Meyer, W. L., Bell, W. A., Zinn, B. T., and Stallybrass, M. P., "Boundary Integral Solutions of Three Dimensional Acoustic Radiation Problems", Journal of Sound and Vibration, 59-2, 1978, pp. 245-251.
5. Koopmann, G. H., and Benner, H., "Method for Computing the Sound Power of Machines based on the Helmholtz Integral", The Journal of the Acoustical Society of America, 71-1, 1982, pp. 78-82.
6. Nigm, M. M., and Sadek, M. M., "Dynamic and Acoustic Analysis of Hammer Frames", ASME 84-WA/NCA-16, 1984, pp. 10-15.
7. 西村正治, 新井隆範, "ダクト出口放射音のアクティブコントロール", 日本音響學會誌, 45-9, 1989, pp. 672-680.
8. 古村義彰, 平松力, 新谷真功, "音源探査の基礎的研究", 日本機械學會論文集, 56C-528, 1990, pp.1420-1424.
9. 中川紀壽, 青本誠, "音の可視化に関する研究", 日本機械學會「振動と運動の制御シンポジウム」講演論文集, No. 900-42, 1990, pp. 215-218.
10. Fox, R. L., "Optimization Methods for Engineering Design", Addison-Wesley Publishing Co. 1971, pp. 38-116.
11. Jasbir S. Arora, "Introduction to Optimum Design", McGraw-Hill Book Co., 1989.
12. 박성완, "경계요소법에 의한 유한폭 판재내의 원형 함유물과 균열의 상호간섭에 대한연구", 대한기계학회 논문집, 제 18권, 제 6호, 1994, pp.1474-1482.