

최적 기어비 구현을 통한 치차열의 설계, 제작 및 분석

(Design, manufacture and analysis of gear train with composition of optimum gear ratio)

정 상 목 · 윤 재 윤

—군사과학대학원

ABSTRACT

This paper addresses an analytical approach to the mechanical error analysis of gear train and tolerance design and manufacture of gear train in restricted space considering motor driving torque, driving system inertia, motor acceleration, motor rotor inertia and friction torque. The gear train is designed to have optimum gear ratio in restricted space and each gear is manufactured to have the lowest weight and each gear tooth is heat-treated to have robustness. Based on the small difference between the mechanical error analysis and measurement, gear train design with optimum gear ratio and restricted space and robustness is proposed

key word : gear ratio(기어비), gear angular transmission error(기어의 각도 전달 오차), gear stiffness(기어 강성), gear error measurement(기어 오차 측정),

기 호 설 명

D	: 기어와 체결된 축직경	J_{ix}	: 맞물리는 기어의 부분 강성 계수
D_1	: 기어 1의 피치원의 직경	$(K_{pi} = \frac{k_{si}K_{si}}{(k_{si} + K_{si})})$	
E_i	: i 번째 기어의 영탄성계수	K_{si}	: 맞물린 한쌍의 스퍼기어의 강성
F	: 맞물리는 기어치의 폭	k_{si}	: 기어축의 강성
G_S	: 기어 체결용 축의 전단탄성계수	L	: 기어축의 길이
F_L	: 모터와 연결된 구동 시스템의 회전 마찰 토크	N_i	: 맞물리는 기어의 Ratio
F_M	: 모터의 회전 마찰 토크	N	: 기어비 (= $\frac{N_1}{N_2}$)
J_L	: 모터와 연결된 구동 시스템의 Inertia	T	: 토크
J_M	: 모터의 Rotor Inertia	T_M	: 모터의 토크
K_{TS}	: 기어열의 전체 강성 계수	y_i	: i 번째 기어의 Lewis form factor

- Z_i : i 번째 기어의 elasticity deformation factor
- θ : 기어의 회전 Deflection angle
- $\dot{\theta}_M$: 모터의 각가속도
- $\dot{\theta}_L$: 구동시스템의 각가속도
- δ_p : Pitch Error Tolerance
- Δ_a : angular backlash
- Δ_p : pitch error tolerance in minutes of arc
- E_a : Angular Transmission Error

1. 서론

자동차, 선박, 항공기, 공작기계 등 정밀을 요하거나 고속으로 운동하는 동력 전달 장치의 주요 기계 요소에 속하는 치차는 기계의 성능에 직접적으로 영향을 주는 요소이므로 정밀하게 설계되고, 제작되어야 하며 정밀한 측정 절차를 통하여 조립되어야 기계 시스템의 구동 성능 구현에 미치는 오차량을 최소로 할 수 있다. 이러한 치차의 성능 특성은 설계, 제작, 조립 과정에서 발생하는 여러 가지 오차의 영향으로 인하여, 요구되어지는 성능 목표치를 일관성있게 유지하지 못하고 예상치 못한 성능의 저하를 유발시키기도 한다. 일반적으로 이러한 잡음은 설계, 제작, 조립 과정에서 발생하는 오차에 기인하며, 오차의 허용량인 공차에 따라 전체적인 기계 시스템의 성능이 달라진다.⁽¹⁾ 치차의 설계, 제작, 조립의 공차를 줄이면 성능 특성의 변동이 줄어들어 시스템의 성능이 향상되지만 가공 단가가 상승하게 되고 공차를 크게 하면 가공 비용은 절감되지만 품질이 나빠지게 되므로 공차의 엄격한 설정을 필요로 한다.⁽²⁾

또한 기계 시스템의 소형화, 경량화의 추세에 비추어 볼 때, 제한된 공간내에서 치차가 가장 최적하게 기어비를 가지도록 설계할 필요성이 있으며, 동력 전

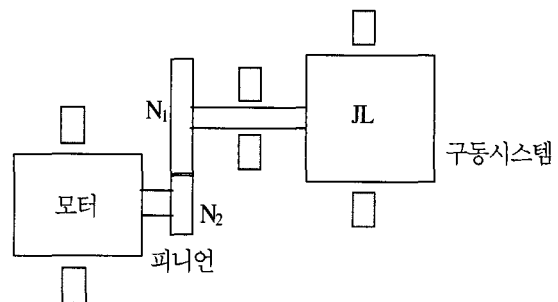
달시 발생하는 백래쉬를 고려한 설계가 이루어져야 하고, 강도적인 측면에서 충분히 강하도록 설계되어야 한다.

지금까지의 치차의 설계 및 제작에는 면압강도와 굽힘강도를 기준으로 수행되었고, 치차의 설계에 관한 연구들 중에는 부분적인 치형 곡선 설계에 관한 것이 대부분이었으며 면압강도, 굽힘강도를 고려한 강건설계와 더불어 최적한 기어비 선정 및 제한된 공간 조건을 고려한 치차의 설계 및 분석에 대한 연구가 미흡한 실정이다.

본 연구에서는 일반적으로 감속기 설계에서 고려해야 하는 설계 사양들을 고려하고, 기계 시스템에 따른 최적 치차비의 선정과 제한된 공간내의 치차 배치를 통해 생성되는 치차열의 각도 위치 오차에 대한 해석을 수행하고, 동시에 기어열의 실제 제작 및 측정된 각도 위치 오차의 결과들을 비교함으로써 본 연구에 의한 치차의 설계, 제작, 조립의 정확성 및 치차의 각도 위치 전달에 대한 해석의 정확성을 검증하고자 한다.

2. 기어열의 최적 기어비 및 사양 선정

기어열은 기계 시스템에서 사용하는 모터의 속도와 구동력을 기어비에 따라 구동시스템이 요구하는 속도와 구동력으로 변환하기 위하여 사용한다. 그러므로 구동 시스템이 요구하는 최적 기어비를 선정하여 일



(그림 1) 모터 및 기어를 이용한 구동 시스템 예제

정 모터 사용시 기계시스템에 최대 각가속도를 줄 수 있도록 해야 한다. 다음은 최적 기어비의 산출을 위한 내용을 기술한 것이다.

그림 1의 모터 및 기어를 이용한 구동 시스템에서 요구되는 모터의 구동력 산출을 위하여 각 토크항들에 기어비를 적용하여 모터측에 대한 토크력으로 구한 식은 다음과 같다.

$$T_M = \left(\frac{J_L}{N^2} + J_M \right) \ddot{\theta}_M + \frac{F_L}{N} + F_M \quad (1)$$

식 (1)을 $\ddot{\theta}_M$ 에 대한 식으로 표현하면

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_M &= \frac{T_M - \frac{F_L}{N} - F_M}{\frac{J_L}{N^2} + J_M} \\ &= \frac{N^2 \left(T_M - \frac{F_L}{N} - F_M \right)}{J_L + N^2 J_M} \end{aligned} \quad (2)$$

이며, 여기서, $\ddot{\theta}_M = N\ddot{\theta}_L$ 이므로, $\ddot{\theta}_L$ 에 대한 식으로 나타내면

$$\ddot{\theta}_L = \frac{N \left(T_M - \frac{F_L}{N} - F_M \right)}{J_L + N^2 J_M} \quad (3)$$

이다. 최적 기어비의 선정을 위해 $\frac{d(\ddot{\theta}_L)}{dN} = 0$ 으로 하여 최적기어비 N_{opt} 를 구하자. 회전마찰 토크력이 시간 및 속도에 따라 변하지 않는다고 가정하고, 모터의 회전 마찰 토크력 또한 작다고 가정하면

$$\ddot{\theta}_L = \frac{N T_M}{J_L + N^2 J_M} \quad (4)$$

$$\frac{d(\ddot{\theta}_L)}{dN} = \frac{J_L - N^2 J_M}{(J_L + N^2 J_M)^2} = 0 \quad (5)$$

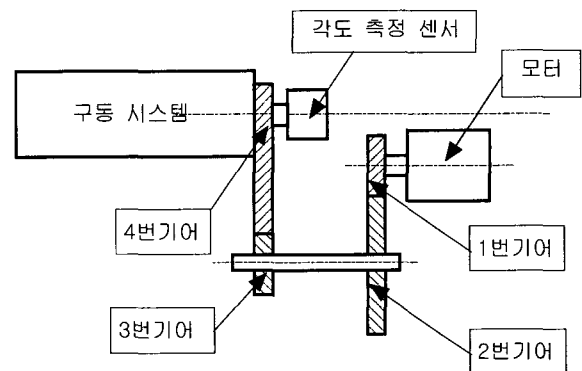
이다. 식 (5)에서 분자가 0을 만족시켜야 하므로 분자를 정리하면 $J_L - N^2 J_M = 0$ 이며,

$$N_{opt} = \sqrt{\frac{J_L}{J_M}} \quad (6)$$

이다. 식 (6)에서 보여주듯이 최적기어비 N_{opt} 는 모터부 Inertia와 모터와 연결된 구동시스템의 Inertia에 관련이 있다. Inertia 측정기에서 구한 구동시스템의 Inertia값은 $J_L = 2.715 \times 10^{-2} \text{ Nms}^2$ 이고, $J_M = 8.6 \times 10^{-6} \text{ Nms}^2$ 이다. 그러므로 최적기어비는 다음과 같다.

$$N_{opt} = \sqrt{\frac{J_L}{J_M}} = 56.19 \quad (7)$$

식 (7)을 토대로 실제 설계된 기어비는 1 : 56.19 이다. 본 기계시스템에서 사용하는 기어를 구동시스템의 소형화, 경량화에 의해 제한되어야 하는 공간(가로 70mm, 세로 70mm, 높이 120mm)내에 효율적으로 배치하기 위하여 몇 개의 기어를 사용하여 기어열을 구성하였다. 그림 2는 최적 기어비를 만족할 수 있도록 제한된 공간 조건내에 기어를 배치한 그림이다. 설계된 각 기어의 사양은 <표 1>에서 보여준다.



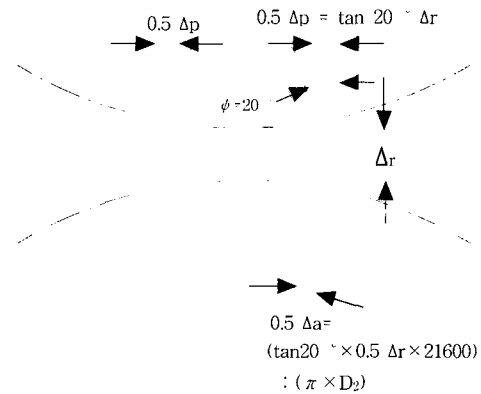
(그림 2) 기어열의 배치

[표 1] 기어 사양

기어	잇 수	P.C.D(mm)	중심거리(mm)	감속비	전체 감속비
기어 1	17	8.5	C1 = 29.5	1단 감속 1 : 5.94	1 : 56.19
기어 2	101	50.5			
기어 3	26	13.0	C2 = 68.0	2단 감속 1 : 9.46	
기어 4	226	113.0			

기어	재질	무게(g)	표면경도	정밀등급	비고
기어 4	STS420	175	Hv=670	KS2급 (AGMA 13)	
기어 3		15			
기어 2		110			
기어 1	STS420	15	Hv ≥ 900	AGMA Q11D	모터 패니언

Tolerance의 합으로 정의될 수 있으며, 기어의 정밀도에 영향을 미치는 중요한 요소이다. 그러므로 Ea양에 대해 미리 계산하여 기계시스템의 오차양이 요구하는 수준이내에 속하는지 살펴본다.



[그림 3] 백래쉬의 기하학적관계

3. 기어열의 각도 위치 오차 해석

설계 및 제작된 기어를 이용하여 구한 Total Angular Position Error는 Ea와 포텐쇼미터 위치정밀도 그리고 기어의 Stiffness의 합에 의해 발생하는 Error양으로 기계시스템의 각도 위치 정밀도에 영향을 미친다. 그러므로 각도 위치 정밀도를 발생시키는 각각의 항목들에 대해 그 오차계산량을 살펴본다.

- Ea : 0.091°
- 각도 측정 센서의 위치정밀도 : 0.0004° 의 백래쉬
- 기어의 강성에 의한 탄성 변형 각도 오차 : 0.0037°

(1) Ea

Ea는 Gear Train의 Backlash와 Cumulative Pitch

기어의 Transmission Error는 Angular Backlash Δ_a 와 Pitch Error Tolerance in minutes of arc Δ_p 의 합이며, 계산과정은 다음과 같다.⁽⁴⁾

$$\Delta_T = \Delta_a + \Delta_p \tag{8}$$

Angular backlash Δ_a 는 다음과 같다.

$$\Delta_a = \frac{2 \times \tan 20^\circ \times \Delta_r \times 21,600}{\pi \times D_2} \tag{9}$$

(D_2 : 피치원 직경
21,600 : Minutes of Arc의 단위환산값)

Maximum Radial Displacement Δ_r 는 아래와 같이 여러 공차에 의해 구현된다.

$$\Delta_r = \text{Minimum Indicator reading for the pinion} + \text{Minimum Indicator reading for the wheel} + \text{Center distance tolerance}$$

- + Half the total radial clearances in pinion shaft bearing
- + Half the total radial clearances in wheel shaft bearing
- + Half the runout of pinion bearings
- + Half the runout of wheel bearings

Pitch Error Tolerance in minutes of arc Δ_p 는 다음과 같다.

$$\Delta_p = \frac{\delta_p \times 21,600}{\pi \times D_2} \quad (10)$$

그러므로, 본 기어열의 Max. Ea는 다음과 같다.

[표 2] Gear Train의 공차

기어 번호	기어 1과 기어 2	기어 3과 기어 4
Minimum indicator reading - pinion	0.0180	0.0200
Minimum indicator reading - wheel	0.0240	0.0270
Centre-distance tolerance (positive value)	0.0042	0.0054
½ Total radial clearance - pinion bearings	0.0000	0.0025
½ Total radial clearance - wheel bearings	0.0025	0.0030
½ Run-out of pinion bearings	0.0000	0.0030
½ Run-out of wheel bearings	0.0025	0.0040

Maximum radial displacement Δ_r 는

$$\Delta_{r1,2} = 0.0512^\circ, \quad \Delta_{r3,4} = 0.0649^\circ$$

이다. Angular backlash Δ_a 는

$$\Delta_{a1,2} = 0.086^\circ, \quad \Delta_{a3,4} = 0.044^\circ$$

이다. 출력축의 기어 4에서 백래쉬 Δ_{a4} 는

$$\begin{aligned} \Delta_{a4} &= \frac{\Delta_{a1,2}}{n_{3,4}} + \Delta_{a3,4} \\ &= 0.053^\circ \end{aligned}$$

이다. Pitch Error Tolerance δ_p 는

[표 3] Pitch Error Tolerance

기어 번호	1 & 2	3 & 4
Cumulative pitch tolerance, δ_p	$\delta_{p1,2}=0.0290$	$\delta_{p3,4}=0.0330$

이다. Pitch Error Tolerance in minutes of arc Δ_p 는

$$\Delta_{p1,2} = 0.066^\circ, \quad \Delta_{p3,4} = 0.031^\circ$$

이다. 출력축 기어 4에서 구현된 Pitch Error Tolerance in minutes of arc Δ_{p4} 는

$$\begin{aligned} \Delta_{p4} &= \frac{\Delta_{p1,2}}{n_{3,4}} + \Delta_{p3,4} \\ &= 0.038^\circ \end{aligned}$$

이다. 출력축(4번기어)에서의 Maximum Ea Δ_{T4} 는

$$\begin{aligned} \Delta_{T4} &= \Delta_{a4} + \Delta_{p4} \\ &= 0.091^\circ \end{aligned}$$

이다.

(2) 각도 측정 센서의 위치정밀도

각도 측정 센서는 기계시스템의 위치를 감지하는 포텐쇼미터 센서를 사용하였으며, 포텐쇼미터를 구동 시스템의 회전 각도 측정을 위해 장착할 경우, 동심도와 진위치도 에러량이 포텐쇼미터의 측정 정밀도에

영향을 미치므로, 포텐쇼미터 조립시 동심도 및 진위 치도 공차량 0.01을 엄밀히 지키도록 설계하였다. 포 텐쇼미터는 그 자체로 0.0004°의 백래쉬를 가지며, ± 45° 회전시 0.2%의 Independent Linearity를 가지는 정 밀한 것을 사용하였다.

(3) 기어의 강성에 의한 탄성 변형 각도 오차

모터의 구동력은 각 기어의 이(tooth)를 통하여 기 계 시스템 구동체에 전달되며 하중은 각 기어가 상호 접촉한 접촉선에 작용하게 된다. 작용 하중은 각 기어 의 강성에 따라 탄성한도내의 변형을 하게 되는데 기 어열은 구성하는 기어수가 많고 작용하중에 비해 기 어의 강성이 작을 경우 정밀한 위치제어를 위해서는 기어열의 누적된 변형에 의한 회전각도 오차를 검토 해야 한다.

Gear Train의 Total Stiffness공식은 다음과 같다.

$$K_{TS} = \frac{1}{\frac{1}{K_{\theta 0}} + \frac{1}{N_1^2 K_{\theta 1}} + \frac{1}{N_2^2 K_{\theta 2}} + \dots + \frac{1}{N_n^2 K_{\theta n}}} \quad (11)$$

위의 전체 Stiffness를 구하는 공식으로부터 맞물린 한쌍의 Spur Gear의 Stiffness K_{si} 식을 유도하면 다음과 같으며⁽⁵⁾,

$$K_{si} = \frac{T}{\theta} = 4D_1^2 F \times \frac{E_1 Z_1 E_2 Z_2}{E_1 Z_1 + E_2 Z_2} \quad (12)$$

(단, $Z_i = \frac{y_i}{0.242 + 7.25y_i}$)

또한 Gear Shaft의 Stiffness 계산공식⁽⁵⁾으로부터

$$k_{si} = \frac{\pi G_s D^4}{2L} \quad (13)$$

유도되어진다. 계산에 필요한 Data는 <표 4>를 참조한다.

[표 4] 기어 물성치 Data

	영탄성계수 (g/cm2)	Face Width	Shaft Dia	Shaft Length	전단탄성계수 (g/cm2)
기어 1	197×107	0.6 cm	-	-	-
기어 2	197×107	0.6 cm	0.8 cm	5.0 cm	878×106
기어 3	197×107	0.6 cm	-	-	-
기어 4	197×107	0.6 cm	-	-	-

Stiffness 계산과정은 다음과 같다.

기어 1과 기어 2의 K_{s0} 값은 다음과 같다.

$$K_{s0} = 1.8 \times 10^8 \text{ g-cm/rad}$$

기어 2의 Shaft의 k_{s1} 값은 다음과 같다.

$$k_{s1} = 0.47 \times 10^8 \text{ g-cm/rad}$$

기어 3과 기어 4의 K_{s1} 값은 다음과 같다.

$$K_{s1} = 3.8 \times 10^8 \text{ g-cm/rad}$$

기어 Ratio 값은 $N_1 = \frac{1}{5.94}$ 이다.

Gear Total Train Stiffness 값 K_s 은 다음과 같다.

$$K_{TS} = 1,176,470 \text{ g-cm/rad}$$

구동기어 Train에 작용하는 점선하중을 구동시스템 의 무게 밑 회전센터까지의 반경을 고려하여 계산한 결과값 4.3 Kg-cm 와 K_{TS} 를 고려하여 힘과 변위의 관 계식으로부터 기어의 탄성 변형 각도를 개략적으로 구해보면 기어 Train에서 발생하는 기어 탄성 변형 각 도는 0.0037 °이다. 이 값은 측정에 의해 구하기에는 미소한 값이므로 여기서는 계산치로서 대체한다.

4. 측정 및 결과 토의

기계 시스템 조립체의 백래쉬 측정의 원리는 포텐쇼미터와 디지털 멀티미터를 이용하여 측정 가능하다. 백래쉬의 측정방법은 먼저 조립된 포텐쇼미터의 최대 회전 각도인 $\pm 45^\circ$ 에 $\pm 10V$ 의 전압을 인가하여 0V를 출력하는 위치를 기계 시스템 조립체의 절대적 Zero 라고 가정한다. 그리고 영점 근처에서의 백래쉬, 반시계 방향 최대 회전각 -45° 에서의 백래쉬, 시계 방향 최대 회전각 45° 에서의 백래쉬를 각각 측정하며 그 방법은 다음과 같다.

영점 근처에서의 백래쉬 측정의 경우는 먼저 기계 시스템 조립체를 영점 근처까지 돌리고 전압을 측정하고, 기계 시스템을 시계 방향 또는 반시계 방향으로 기어가 돌아갈 때까지 돌려서 전압을 측정하고 영점 근처에서의 전압과의 차이를 구한다. 그리고 $\pm 45^\circ$ 근처에서의 백래쉬 측정의 경우도 마찬가지로 먼저 기계 시스템 조립체를 $\pm 45^\circ$ 근처까지 돌리고 전압을 측정하고, 기계 시스템을 시계 방향 또는 반시계 방향으로 기어가 돌아갈 때까지 돌려서 전압을 측정하고 $\pm 45^\circ$ 근처에서의 전압과의 차이를 구한다.

실제 측정한 결과 기어열의 백래쉬는 8mVDC (≈ 0.06 deg)이다. 이 측정 결과는 기어열의 각도 위치 오차 해석값보다 작게 나타나는데, 이것은 실제 해석 시 Maximum Error 양들을 고려하여 발생가능한 기어열의 각도 위치 오차 해석값을 얻었기 때문이다. 이상으로 감속기 설계에서 고려해야 하는 설계 사양들을 고려하고, 기계 시스템에 따른 최적 치차비의 선정과 제한된 공간내의 치차 배치를 통해 생성되는 치차열의 각도 위치 오차에 대한 해석을 수행하고, 동시에 기어열의 실제 제작 및 측정된 각도 위치 오차의 결과들을 비교함으로써 본 연구에 의한 치차의 설계, 제작, 조립의 정확성 및 치차의 각도 위치 전달에 대한 해석의 정확성을 검증하였다.

5. 결 론

본 연구에서는 기어열이 조립될 수 있는 부위가 제한된 공간내에서 최적 기어비 구현을 통해 치차열의 설계를 수행하였으며, 설계된 기어의 백래쉬양을 해석을 통하여 구하였고, 해석에 의해 구한 최대 백래쉬양을 실제로 검증하기 위하여 기어열을 실제 제작하고, 정밀하게 조립하여 기어열의 백래쉬양을 실험을 통해 구해본 결과 해석한 결과와 유사함을 알 수 있었다. 이를 통하여 본 연구에서 수행한 해석의 유효성을 검증할 수 있었고, 또한 이러한 설계 과정과 해석 과정을 근거로 하여 제한된 공간내에서 기계구조물이 기어열을 가질 경우 최적한 기어비의 구성 및 백래쉬의 해석 과정을 기계 구조물에 그대로 적용하여 발생가능한 백래쉬양을 미리 예측하여 설계에 반영해도 무방함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Gear Design, Manufacturing and Inspection Manual, 1990, Society of Automotive Engineers, Inc.
2. 최진호, 1997, "공차로 인한 평면 기구의 기계적 오차 해석", 대한 기계학회 논문집 제 21권, 4호, p. 663~672.
3. George W. Michalec, Precision Gearing : Theory and Practice, 1966
4. C. J. Richards, Mechanical Engineering in Radar and Communications, 1967
5. Humphrey. W. M, Introduction to servomechanism system design, 1973