

엔트로피 모드에 의한 비선형 불안정 파동

Nonlinearly Unstable Waves Dominated by Entropy Mode

윤 응 섭*

Yoon Woong-Sup

요 약

자동차, 항공기 혹은 로켓엔진 유동장의 불안정 파동은 음향모드와 와류모드 및 엔트로피 모드에 의해 복합적으로 발생한다. 본 연구에서는 이들 모드를 모두 포함하는 불안정 해석이론을 바탕으로 고체 추진 로켓엔진 연소실의 내부유동을 대상으로 불안정 파동 증폭요인에 의한 영향을 고찰하였다. 연구 결과 불안정 에너지 증폭계수의 증가에 따라 에너지 증폭을 관련변수들이 증가하며 에너지 증폭을 관련변수들은 층류보다 난류에서 더 크게 나타났다. 또한 고온의 측면-연소 로켓의 불안정 파동은 엔트로피 모드에 의해 지배되며 와류모드에 다소간 영향을 받고 음향모드에는 거의 영향을 받지 않았다.

ABSTRACT

This paper is concerned with instability of flow fields which are dominated by the entropy mode with the presence of usual acoustic and vortical modes. These combined modes lead to nonlinear unstable waves which may occur in automobile, aircraft, or rocket engines. In this study instability in a side-burning rocket is investigated. It is shown that the energy growth rate parameters increase with an increase of the energy growth factor. The energy growth rate parameters for turbulent flows are larger than those for laminar flows. It is further shown that unstable wave motions for the high-temperature side-burning rocket are dictated mostly by the entropy mode, somewhat by the vortical mode, and least by the acoustic mode.

주요기술용어 : Instability(불안정), Entropy Mode(엔트로피 모드), Vortical Mode(와류모드), Acoustic Mode(음향모드), Energy Growth Factor(에너지 증폭 계수), Energy Growth Parameter(에너지 증폭 매개변수)

1. 서 론

유동장의 압력, 속도, 엔트로피 변화는 파동형태의 섭동을 유발한다. 압축성 고온 기체의 초음속 유동에서는 엔트로피에 의한 파동이 지배적이나 비압축성 유체의 아음속 유동에서는 난류나 와류

에 의한 파동이 지배적이다. 음향파동은 선형 파동과 비선형 파동 모두 유동속도에 상관없이 압력변화를 수반한다.

Cantrell과 Hart⁽¹⁾는 질량, 운동량, 에너지 등의 전달 효과를 고려하여 음향공 내부에서의 음파와 유동의 상관관계를 고찰하였고 Michalke^(2,4)는 비압축성 유동 자유경계층의 안정성을 연구하였다. Flandro⁽³⁾는 에너

* 연세대학교 대학원 기계공학과 교수

지 평형이론을 도입하여 압축성 비점성 유동의 비선형 파동 불안정을 해석하였다.

그러나 이 연구들은 파동불안정 연구에서 반드시 고려해야 할 중요 물리현상들을 제한적으로만 다루고 있다. Cantrell과 Hart⁽¹⁾는 음파에 대한 고체연료 연소 반응의 연구에서 비선형성 및 다른 모드의 불안정을 배제하였다. 본 논문의 이론 전개과정에서 비선형 효과를 무시하면 선형이론과 동일한 결론을 얻는다. Michalke^(2,4)는 비압축성 유동의 와류모드에 대하여 연구하였다. 연구 결과 섭동된 전단층의 거동은 실험결과와 유사하였으나 레이놀즈수가 클 때만 적용되며 압축성 유동에는 제한적인 단점이 있었다. Flandro⁽⁵⁾는 비선형 파동에 대한 발전된 이론을 발표하였으나 여전히 완전한 유동장 모사, 점성효과, 난류 및 엔트로피 변화 등은 배제하였다.

본 연구는 음향모드, 와류모드, 엔트로피 모드가 모두 포함된 파동불안정 방정식에 기초하였다. 자동차, 항공기, 로켓의 엔진에서 온도와 밀도는 음향파와 와류에 비해 크게 변하므로 에너지 방정식에 엔트로피 구배항을 포함시켜 엔트로피 모드에 의한 변화를 고찰하였다. 이를 위해 보존형 에너지 방정식을 기반으로 대류항의 미분을 통해 에너지 변화율을 최종적으로 엔트로피 구배항으로 표현한다. 모든 변수는 각각의 평균량과 섭동량의 합으로 분리하며 엔트로피 관계식은 근사한 무한급수로 대체하여 시스템의 비선형 물리현상을 고려한 에너지 방정식을 유도하고 이를 적분한다. 이때 면적분 항은 유체의 섭동과 엔트로피 변화를 포함하며 경계면에 작용하는 비선형 압력강도를 나타낸다. 마지막으로 시간에 종속적인 내부 적분항 및 독립적인 경계면 적분항에 시간평균을 취한다. 이를 통해 편미분 에너지 방정식으로부터 에너지 증폭계수에 대한 비선형 상미분 방정식을 유도한다.

본 연구는 Cantrell과 Hart⁽¹⁾, Flandro⁽⁵⁾의 연구에

바탕한 Chung과 Yoon⁽⁶⁾의 이론을 발전시킨 것이다. 2절에서 3절까지 기본적인 수식과 이론을 정리하고 4절의 적용예를 통해 그 물리적 타당성을 입증하였다.

2. 비선형 파동에너지 지배방정식

일반적으로 선형 파동방정식은 연속방정식과 운동량 방정식을 통해 구하지만 비선형 파동방정식은 에너지 방정식으로부터 유도한다. 운동량 방정식과 에너지 방정식에 각각 점성효과와 소산효과를 포함시키면 유동-연소장에 대한 Navier-Stokes 방정식 시스템은 식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서의 보존형 유동변수 및 비점성, 점성 flux vector들은 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} U &= [\rho \quad \rho v_j \quad \rho E] \\ F_i &= [\rho v_i \quad \rho v_i v_j + P \delta_{ij} \quad \rho E v_i + P v_i] \\ G_i &= [0 \quad -\tau_{ij} \quad -\tau_{ij} v_j + q_i] \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서 τ_{ij} 와 q_i 는 점성응력 텐서와 열유속을 나타낸다.

$$\tau_{ij} = \mu (v_{i,j} + v_{j,i} - (2/3) v_{k,k} \delta_{ij}) \quad (2a)$$

$$q_i = -\lambda T_{,i} \quad (2b)$$

식 (2a)와 (2b)에서 comma는 일반 직교 공간 좌표계 x_i 에 대한 편미분을 의미하며 반복첨자는 첨자범위 내에서의 합산이다. 난류에 의한 불안정 파동에너지 변화를 고려하기 위해 식 (1)과 함께 $k-\epsilon$ 2-방정식

모델을 사용한다.

엔트로피 섭동을 묘사하기 위하여 압력구배를 식 (3)과 같이 엔트로피 구배로 표현한다.

$$P_{,i} = a^2 \rho_{,i} + (\rho a^2 / C_p) S_{,i} \quad (3)$$

여기서 a 는 음속, S 는 엔트로피이다. 정체상태 에너지 E 의 정의로부터 E 에 대한 공간미분은 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} E_{,i} &= \left(C_p T - \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_j v_j \right)_{,i} \\ &= \frac{C_p}{R \rho} P_{,i} - \frac{C_p}{R} \frac{P}{\rho^2} \rho_{,i} + v_j v_{j,i} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 R 은 기체상수이며 식 (3)과 (4)로부터

$$\rho E_{,i} = (P/\rho) \rho_{,i} + (P/R) S_{,i} + \rho v_j v_{j,i} \quad (5)$$

식 (5)를 에너지 방정식에 대입하면

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + (\rho E v_i - \sigma_{ij} v_j + q_i)_{,i} = 0 \quad (6)$$

식 (6)의 $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$ 이며 식 (5)를 식 (6)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + E (\rho v_i)_{,i} + v_i \left[\left(\frac{P}{\rho} \right) \rho_{,i} \right. \\ \left. + \left(\frac{P}{R} \right) S_{,i} + \rho v_j v_{j,i} \right] - (\sigma_{ij} v_j)_{,i} + q_{i,i} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

비선형 파동이 엔트로피 변화를 수반할 때 식 (7)의 $v_i \frac{P}{R} S_{,i}$ 에 의해 엔트로피 구배가 지배적인 성격을 갖는다. 식 (7)의 가장 일반적인 형태는 공간적분 및 시간평균을 통해 구한다.

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) d\Omega \right\rangle - \left\langle \int_{\Omega} [E_{,i} \rho v_i \right. \\ \left. + \rho \left(v_i \frac{P}{\rho} \right)_{,i} + \left(v_i \frac{P}{R} \right)_{,i} S + (\rho v_i v_j)_{,i} v_j] d\Omega \right\rangle \\ + \left\langle \int_{\Gamma} [E \rho v_i n_i + v_i \left(\frac{P}{\rho} \rho n_i + \frac{P}{R} S n_i + \right. \right. \\ \left. \left. \rho v_j v_j n_i \right) - \sigma_{ij} v_j n_i - \lambda T_{,i} n_i] d\Gamma \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 Ω 와 Γ 는 시스템 내부와 경계면이며 $\langle \cdot \rangle$ 는 시간평균이다. n_i 는 경계면에 대한 수직벡터의 i 번째 성분이다. 물리적으로 시간 미분항과 공간 미분항은 각각 시간과 공간에 대한 파동증폭을 의미한다.

이상기체의 열역학 관계식으로부터 엔트로피 차를 식 (9)로 표현한다.

$$S - S_0 = R \ln \left[\left(1 + \frac{P}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho} \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \right] \quad (9)$$

식 (9)의 우변을 무한급수로 전개하면

$$S = R [S_{(1)} + S_{(2)} + S_{(3)} + \dots] + S_0 \quad (10)$$

식 (10)에서 우변 각 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{(1)} &= \frac{1}{\gamma-1} \frac{P}{P} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho'}{\rho} \\ S_{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{P}{P} \right)^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \right] \\ S_{(3)} &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{P}{P} \right)^3 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^3 \right] \\ S_{(4)} &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{P}{P} \right)^4 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

이제 모든 변수를 평균량과 섭동량의 합으로 분리한다.

$$P = \bar{P} + \epsilon P' \quad v_i = \bar{v}_i + \epsilon v_i' \quad (11)$$

식 (11)에서 기호 $\bar{\quad}$ 와 $'$ 은 각 변수의 평균량과 섭동량을 의미한다. ϵ 은 에너지 증폭계수로서 시간의 함수이며 공간에는 독립적이다.

식 (10)과 (11)을 식(8)에 대입하여 정리하면 식 (12)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon^2 E_1 + \epsilon^3 E_2 + \epsilon^4 E_3) \\ - \epsilon^2 I_1 - \epsilon^3 I_2 - \epsilon^4 I_3 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$E_1 = \left\langle \int_{\Omega} a^{(1)} d\Omega \right\rangle \quad (13a)$$

$$E_2 = \left\langle \int_{\Omega} a^{(2)} d\Omega \right\rangle \quad (13b)$$

$$E_3 = \left\langle \int_{\Omega} a^{(3)} d\Omega \right\rangle \quad (13c)$$

$$I_1 = \left\langle \int_{\Omega} b^{(1)} d\Omega \right\rangle - \left\langle \int_{\Gamma} c_i^{(1)} n_i d\Gamma \right\rangle \quad (14a)$$

$$I_2 = \left\langle \int_{\Omega} b^{(2)} d\Omega \right\rangle - \left\langle \int_{\Gamma} c_i^{(2)} n_i d\Gamma \right\rangle \quad (14b)$$

$$I_3 = \left\langle \int_{\Omega} b^{(3)} d\Omega \right\rangle - \left\langle \int_{\Gamma} c_i^{(3)} n_i d\Gamma \right\rangle \quad (14c)$$

이때 $a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}$ 는 변수들의 평균량과 섭동량의 조합으로 표현된다. 식 (12)에서 ϵ 의 0차항은 소거되고 시간평균에 의해 1차항이 소거된다. 또한 시간평균을 취했으므로 E_i 는 시간에 독립적이다. 따라서 ϵ 만 이 시간에 종속적이므로 식 (12)로부터 식 (15)가 성립한다.

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\epsilon^2 I_1 + \epsilon^3 I_2 + \epsilon^4 I_3}{2\epsilon E_1 + 3\epsilon^2 E_2 + 4\epsilon^3 E_3} \quad (15)$$

이를 ϵ 에 대한 3차까지의 급수로 표현하면,

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} = (\epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + \epsilon^3 I_3) \frac{1}{2E_1} \\ \left[1 - \epsilon \frac{3E_2}{2E_1} + \epsilon^2 \left(\frac{9E_2}{4E_1} - \frac{2E_3}{E_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

이 때 고차항과 1보다 작은 항은 무시한다. 식 (16)으로부터 궁극적인 비선형 상미분 형태의 안정성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\epsilon}{dt} - \alpha_1 \epsilon - \alpha_2 \epsilon^2 - \alpha_3 \epsilon^3 = 0 \quad (17)$$

식 (17)에서 α_i 는 다음과 같다.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2E_1} I_1$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2E_1} \left(I_2 - \frac{3E_2}{2E_1} I_1 \right)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2E_1} \left\{ I_3 - \frac{3E_2}{2E_1} I_2 + \left[\frac{9}{4} \left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2 - \frac{2E_3}{E_1} \right] I_1 \right\}$$

수식에 대한 접근법이나 전개과정이 달라 에너지 증폭을 매개 변수식은 참고문헌 5의 것과 다른 형태이나 식 (17)은 Flandro⁽⁵⁾의 식과 동일하다. 비선형성을 무시하고 등엔트로피를 가정하면 식 (17)은 Cantrell과 Hart⁽¹⁾의 식과 같다⁽⁶⁾.

ϵ 과 α_i 는 에너지 증폭계수와 에너지 증폭을 매개 변수이다. ϵ 은 시간에 종속적이다. 식 (17)을 풀어 시스템의 안정성을 결정한다. ϵ 은 공간에 독립적인 반면 α_i 는 종속적이며 각각 식 (13), (14)를 통해 구한다.

식 (17)에서 ϵ 과 α_i 는 모두 시간과 공간에 종속적이다. 선형 해석의 경우 식 (17)은 식 (18)의 형태가 된다.

$$\frac{d\epsilon}{dt} - \alpha_1\epsilon = 0 \quad (18)$$

이는 식 (17)의 특별한 경우로 $\epsilon = e^{\alpha_1 t}$ 이 식 (18)의 해이므로 초기조건 $\epsilon(0) = 1$ 에 대해 다음과 같이 식 (18a)-(18c)가 성립한다.

$$\alpha_1 = -\infty \text{이면 } \epsilon = 0 : \text{안정} \quad (18a)$$

$$\alpha_1 = 0 \text{ 혹은 } t=0 \text{ 인 경우 } \epsilon = 1 : \text{중립안정} \quad (18b)$$

$$\alpha_1 = \infty \text{ 이면 } \epsilon = \infty : \text{불안정} \quad (18c)$$

이 기준은 선형 해석에 한정적으로 사용된다.

선형 안정성 기준은 엔트로피 변화를 수반하는 비선형 파동에는 적용하지 못한다. 이 경우 ϵ 에 대한 초기조건은 알 수 없고 ϵ 의 절대 크기는 안정성의 기준이 되지 못한다. 대신 ϵ 의 시간변화율을 통해 불안정성을 판별한다. 비선형 해석의 안정성 기준은 다음과 같다.

$$d\epsilon/dt < 0 : \text{안정} \quad (19a)$$

$$d\epsilon/dt = 0 : \text{중립안정} \quad (19b)$$

$$d\epsilon/dt > 0 : \text{불안정} \quad (19c)$$

α_i 에 포함된 변수들은 Navier-Stokes 방정식의 수치 해로부터 구한다. 이때 에너지 증폭계수 ϵ 은 $\epsilon = 1$ 이 기준이며 임의의 변수 f 에 대해서 다음 상태에 해당한다.

$$f = \bar{f} + f \quad (20)$$

이것은 ϵ 을 통해 모든 변수를 설정했던 식 (11)과 대비된다. 변수에 대한 수치해 f 와 평균량 \bar{f} 의 차가 섭동량 f 이다. 이후 섭동의 변화 경향 판단을 위해 식 (11)을 사용한다. 따라서 초기에 $f = f - \bar{f}$, $\epsilon = 1$ 로 설정하여 α_i 를 계산하고 식 (17)을 푼다. ϵ 에 대한 초기조건은 안정성 기준 (19a)-(19b)에 대하여 독립적이다.

3. 유동장 계산결과 및 안정성 판정

앞에서 각 모드의 불안정 파동은 비선형 상미분 방정식을 만족함을 보였다. 이제 모든 변수의 평균량과 섭동량을 통해 에너지 증폭을 매개변수 α_i 를 구한다. 참고문헌 8의 수치기법을 통해 식 (1)을 푸는데 시간에 따라 경계에서 초기조건으로 압력을 식 (21)과 같이 변화시킨다.

$$P = \bar{P}(1 + d \sin \omega t) \quad (21)$$

\bar{P} 는 평균압력, d 는 평균압력에 대한 섭동량, ω 는 기본 구동주파수이다. 섭동량은 식 (20)에서 다음과 같이 구한다.

$$P' = P - \bar{P} \quad (22)$$

밀도, 온도, 속도의 섭동량 계산을 위해 다른 변수에 대해 유사한 계산을 수행한다. 일단 모든 변수의 섭동량을 구하면 식 (17)의 α_i 계산을 위해 시스템 내부와 경계면에 대한 적분을 수행한다. 4차의 Runge-Kutta법 등을 사용하여 비선형 상미분 방정식의 시간에 따른 해를 구한다. 이때 식 (17)은 비선형이며 ϵ 에

대한 초기조건을 모르므로 ϵ 을 매우 작은 값부터 계산한다. 계산간격 Δt 마다 해를 구하면 ϵ 은 증가 혹은 감소하며 ϵ 의 초기조건에 관계없이 한계거동을 보이거나 발산한다.

Chung과 Yoon⁽⁶⁾ 등 이전의 연구에서와 달리 비선형 해석에는 선형 안정성 기준의 적용이 불가능하다. 따라서 식 (1)의 수치해로부터 구한 에너지 증폭을 매개변수 α_i 의 조합을 통해 Flandro⁽⁵⁾가 언급한 한계사이클과 무한 발산의 주된 2가지 현상을 구분한다.

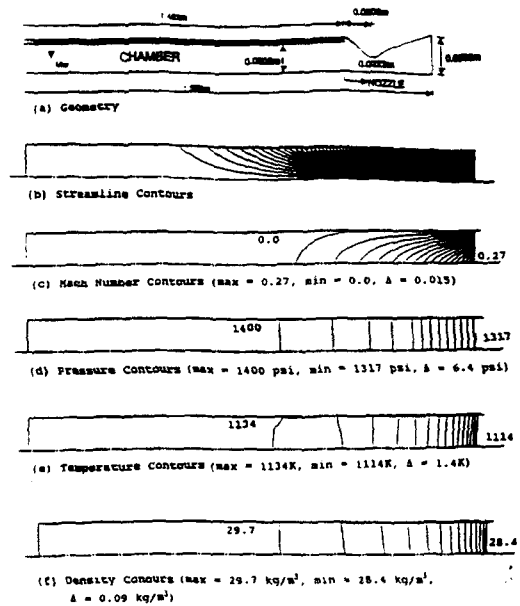
4. 적용에

그림 1은 해석 대상 측면-연소 로켓엔진이다. 해석의 편의를 위해 화학반응은 배제하였으며 압력과 속도의 섭동만을 초기조건과 경계조건으로 설정하였다.

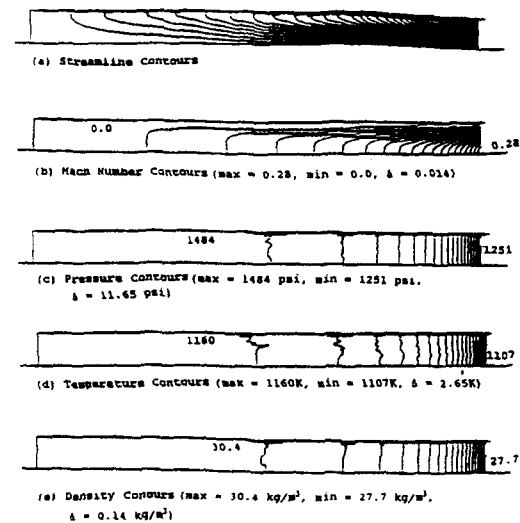
그림 1(a)는 전형적인 축대칭 측면-연소 로켓이다. 적용예의 초기조건과 경계조건은 다음과 같다. $M=0.0018$, $P=1400\text{psi}$, $\gamma=1.4$, $T=1095\text{K}$, $\rho=29.6742\text{ kg/m}^3$ 이며 연소면에서 접선방향 및 축방향 속도는 0이다.

시간에 따른 식 (1)의 수치해는 Taylor-Galerkin 방법 (8)과 낮은 마하수에 대한 압력보정을 통해 구하며 섭동이 없는 경우, 4%, 6%, 8% 섭동을 가한 경우를 계산한다. 적분간격 $\Delta t=0.0005(\text{sec})$ 이며 정상상태에 도달할 때까지 계산을 수행한다. 임의의 변수 f 의 섭동량은 식 (20)을 통해 구한다.

그림 1(b)-(f)는 각각 섭동이 없는 경우 정상상태 Navier-Stokes 방정식의 수치해 중 유선, 마하수, 압력, 온도, 밀도를 나타낸다. 이것은 저속·고온의 전형적인 측면-연소 로켓 유동장이며 하류로 갈수록 난류와 결부된 고속유동 및 충격파가 나타난다.

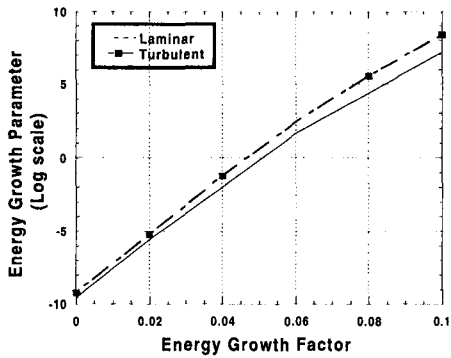


(그림 1) 측면-연소 로켓 모터에서의 정상 상태 유동장 (섭동이 없는 경우)

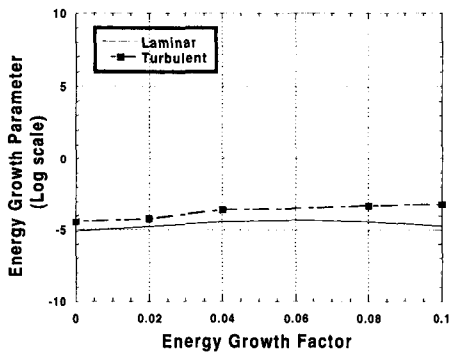


(그림 2) 측면-연소 로켓 모터에서의 정상 상태 유동장 (6% 섭동을 가한 경우)

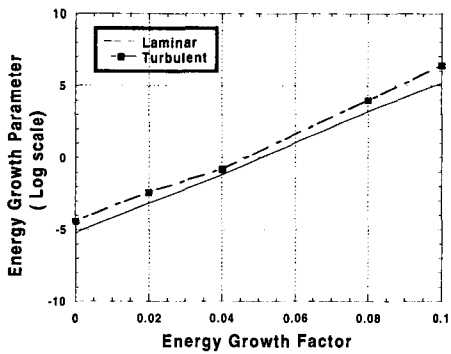
그림 2는 그림 1과 동일한 시스템에 6% 섭동을 가한 경우이다. 연소면에 가한 섭동에 의해 압력, 온도,



(a) α_1



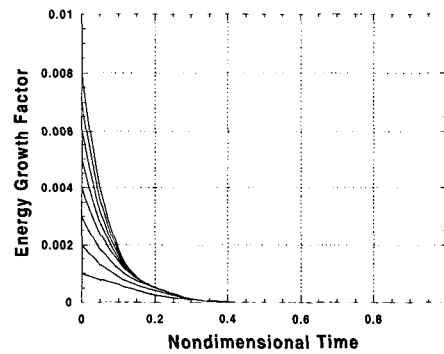
(b) α_2



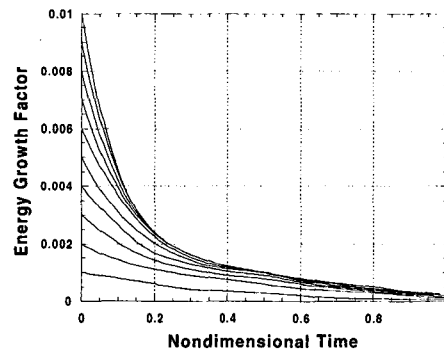
(c) α_3

[그림 3] 섭동량의 크기에 따른 층류와 난류의 에너지 증폭 매개변수 ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)의 비교

밀도의 공간변화가 나타난다. 각 변수의 평균량과 섭동량을 구하고 식 (13)과 (14)를 통해 $a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}$ 를 거쳐 에너지 증폭을 매개변수 α_i 를 구한다. 4% 섭동을 가한 경우 에너지 증폭계수와 에너지 증폭을 매개변수의 관계는 그림 3과 같다. 일반적으로 일정한 ε 에 대해 층류보다 난류일 때 α_i 가 크다. 그림 4(a)는 층류에 4% 섭동을 가한 경우로 무차원 시간에 대한 에너지 증폭계수의 변화이다. 이때 무차원 시간은 식 (17)의 계산시간을 기준으로 하며 $t=0$ 과 $t=1$ 은 각각 시작과 끝에 해당한다. 다양한 초기값에



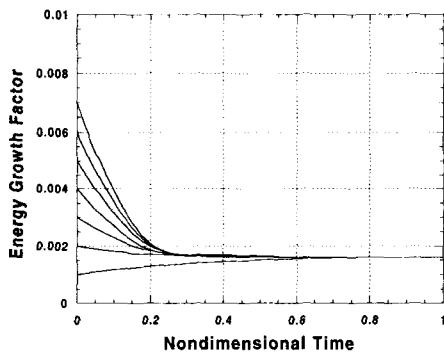
(a) 층류의 경우



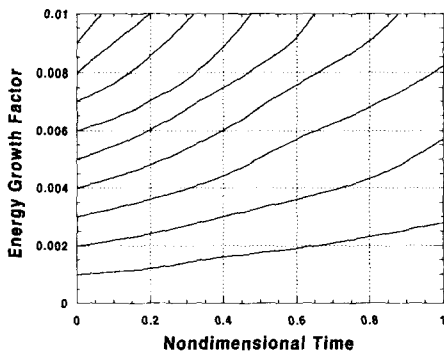
(b) 난류의 경우

[그림 4] 시간에 따른 에너지 증폭율 변화 (4% 섭동을 가한 경우)

대해 시간에 따라 에너지 증폭계수가 0으로 수렴한다. 그러나 난류의 경우 에너지 증폭계수 $\epsilon = 0.0004$ 부근에서 안정한 한계거동을 보이며 그림 4(b)와 같다. 주목할 것은 층류에 6% 섭동을 가하고 ϵ 을 0.001에서 0.006까지 변화시킨 경우이다. 그림 5(a)처럼 ϵ 의 초기값에 관계없이 시간이 지남에 따라 ϵ 이 0.006일 때의 값으로 수렴한다. 반대로 그림 5(b)처럼 난류일 때는 ϵ 의 초기값에 상관없이 시간에 따라 ϵ 이 발산한다. 난류에 8% 섭동을 가한 경우에는 ϵ 이 급격히 증가한다. 비록 ϵ 의 초기값은 임의적이거나 작은 섭동에서 안정한 한계거동이 지배적이고 큰 섭동에서 ϵ 이 발산하는 경향을 보인다.



(a) 층류의 경우

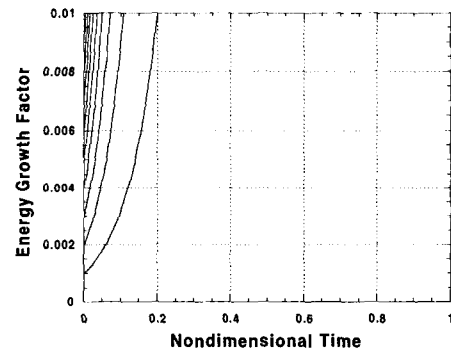


(b) 난류의 경우

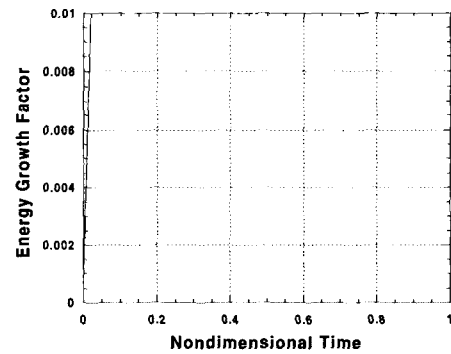
(그림 5) 시간에 따른 에너지 증폭율 변화 (6% 섭동을 가한 경우)

다양한 섭동을 가하고 층류와 난류에 대해 ϵ 과 그 시간변화율을 그림 7에 나타내었다. 이제 난류가 안정한 층류상태에 불안정을 유발하며 섭동량이 클수록 시스템이 불안정해진다는 그림 3-6의 결과를 재확인할 수 있다.

비선형성의 영향을 고찰하기 위해 ϵ 대 $d\epsilon/dt$ 를 그림 8에 나타내었다. 모든 엔트로피 변화는 α_2, α_3 와 관련되는데 선형 해석에서는 이 값이 모두 0이다. 엔트로피 변화는 에너지 소산과 비선형 파동에 포함되므로 식 (17)의 해는 불안정 거동을 과대평가한다. 이는 그림 8을 통해 입증된다. 섭동량이 커질수록, 층류가 난류로 바뀔수록 선형 해석과 비선형 해석의 차이는 줄어든다. 비선형해석은 섭동량이 작을 때 더욱 중요하다.

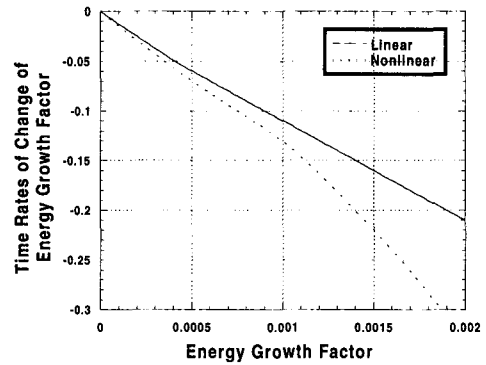
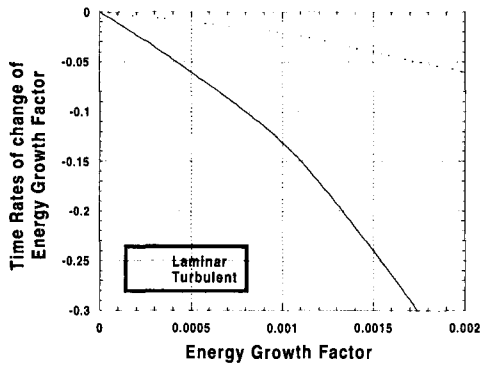


(a) 층류의 경우

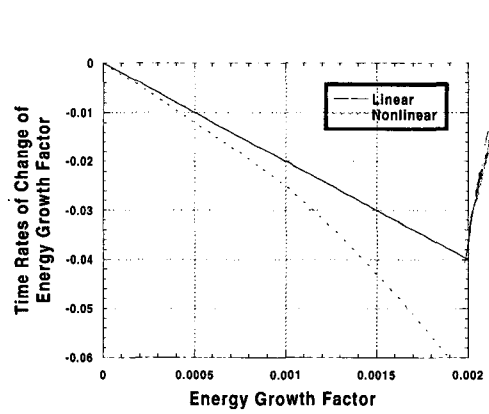
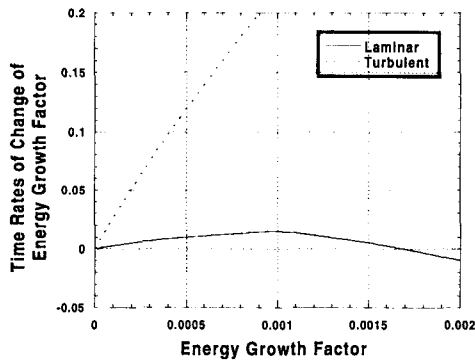


(b) 난류의 경우

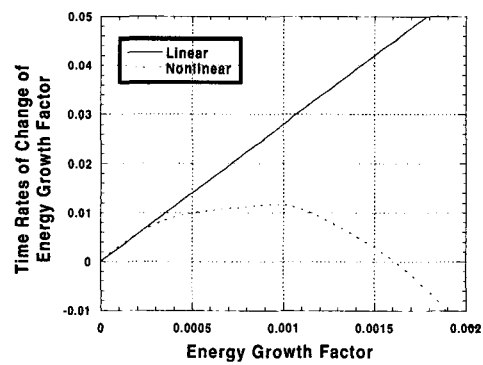
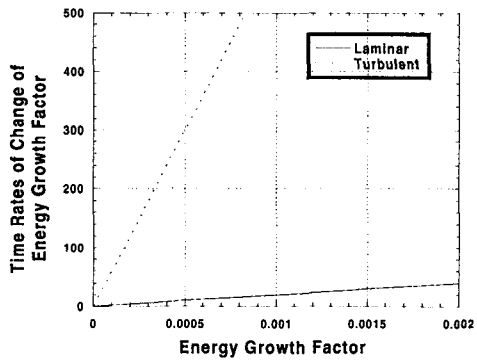
(그림 6) 시간에 따른 에너지 증폭율 변화 (8% 섭동을 가한 경우)



(a) 층류의 경우 (4% 섭동을 가한 경우)

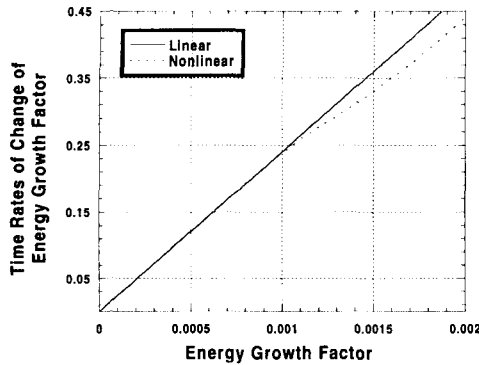


(b) 난류의 경우 (4% 섭동을 가한 경우)



(c) 층류의 경우 (6% 섭동을 가한 경우)

(그림 7) 에너지 증폭 계수에 따른 층류와 난류의 에너지 증폭률 비교 (순서대로 4%, 6%, 8% 섭동을 가한 경우)



(d) 난류의 경우 (6% 섭동을 가한 경우)

(그림 8) 에너지 증폭 계수에 따른 선형 해석과 비선형 해석의 에너지 증폭율 변화 비교

전체적으로 음향모드, 와류모드, 엔트로피 모드의 영향을 그림 7-8에서 볼 수 있다. 입구부와 같이 마하수가 작은 경우에는 압력의 불연속이 없다. 또한 압력섭동은 선형이고 조화적이며 엔트로피 변화도 없다. 노즐목이나 노즐과 같이 마하수가 큰 경우 충격파, 비가역성, 고온조건, 낮은 밀도 때문에 음향모드가 엔트로피 모드로 바뀐다. 재순환 혹은 와류 발생영역에서 파동이 나타난다. 식 (7)과 (17)을 통한 파동 불안정성 해석은 각종 모드가 혼재된 파동을 다룬다. 특히 본 연구대상인 측면-연소 로켓엔진에서 이것이 잘 나타난다. 그러나 결국 고속인 하류에서는 엔트로피 모드가 지배적이다. 이는 그림 8과 같이 선형이며 등엔트로피일 때의 해석결과를 등엔트로피가 아닐 때의 비선형 해석결과와 비교함으로써 입증된다. 난류와 층류를 비교한 그림 7에 보인 와류모드의 경향을 통해 난류나 와류모드는 보다 큰 에너지 증폭율로 반영됨을 알 수 있다. 음향모드의 영향은 그림 7-8 중 층류이고 선형파동인 경우에 두드러지게 나타난다.

5. 결 론

엔트로피 모드에 지배되는 비선형 불안정 파동 해석과 관련된 일련의 수식화 과정과 수치해석 이론을 살펴보았다. 수식화 과정은 2단계로 이루어진다. 1단계는 Navier-Stokes 방정식의 시간에 따른 천이해를 구하는 것이고 2단계는 절사한 무한급수를 통해 엔트로피의 향으로 에너지 방정식을 표현하는 것이다. 이를 통해 에너지 증폭계수에 대한 3차 상미분 방정식을 얻는다.

적용예를 통해 에너지 증폭을 매개변수가 에너지 증폭 계수의 증가에 따라 커짐을 알 수 있다. 층류보다 난류에서 에너지 증폭을 매개 변수가 크다. 섭동이 작은 경우 에너지 증폭 계수는 시간에 따라 점차 수렴하여 일정한 한계거동을 보이거나 섭동이 큰 경우에는 에너지 증폭계수가 발산한다. 불안정 경향은 층류보다 난류에서 더 크다. 안정성에 대한 비선형 해석에서는 엔트로피 모드의 진동에 의한 에너지 소산을 고려한다. 선형해석에서는 이러한 경향을 무시하므로 불안정성이 과대 평가된다. 적용예의 경우 불안정한 파동은 주로 엔트로피 모드에 의해 나타나며 와류모드에 다소 영향을 받고 음향모드에는 거의 영향을 받지 않는다.

참 고 문 헌

1. R.H.Cantrell and R.W.Hart, "Interaction Between Sound and Flow in Acoustic Cavities: Mass, Momentum and Energy Considerations", J. Acoust. Soc. Am. 36, 1964, pp. 697-706.
2. A.Michalke, "On the Inviscid Instability of the Hyperbolic Tangent Velocity Profiles", J. Fluid Mech. 9,

- 1964, pp. 543-556.
3. A.Michalke, "Vortex Formation in a Free Boundary Layer According to Stability Theory", J. Fluid Mech. 22., 1965, pp. 371-383.
 4. A.Michalke, "On Spatially Growing Disturbances in an Inviscid Shear Layer", J. Fluid Mech. 25, 1966, pp. 521-554.
 5. G.A.Flandro, "Energy Balance Analysis of Nonlinear Combustion Instability", AIAA J. Propulsion 1 (3), 1985, pp. 210-221.
 6. T.J.Chung and W.S.Yoon, "Wave Instability in Combustion", Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 90, 1991, pp. 583-608.
 7. D.B.Spalding, "Concentration Fluctuations on a Round Turbulent FreeJet", Chem. Eng. Sci. 26, 1971, pp. 95-106.
 8. T.J.Chung and W.S.Yoon, "Shock Waves Interaction with Turbulent Reacting Flows", AIAA Paper 92-3426, 28th Joint Propulsion Conference, Nashville, TN, 1992