

# 이상(Two-phase) 유체의 변형거동에 대한 실험적 연구

## Experimental Study on Bubble Deformation of Two-Phase Fluids

김 시 조\*    황 덕 철\*\*    임 영 빈\*\*  
S. J. Kim, D. C. Whang, Y. B. Yim

### 요 약

본 논문에서는 얇은 직사각형 단면 형상을 가지는 세 가지 서로 다른 유동로 안에서 움직이는 공기버블의 변형 거동에 대한 실험을 수행하였다. 압력 차이로 유체는 유동되며, 유동장을 따라서 변형하는 버블의 정상상태 모양을 관찰하였다. 벽면효과를 알아보기 위해 세 종류의 얇은 사각단면을 사용하였으며, 두 가지 종류의 작동 유체, 버블의 초기 크기, 작동 유체의 유량 등을 변화시켰을 때 이에 대한 공기 버블의 변형을 체계적으로 관찰하고 이들의 관계를 고찰하였다. 실험데이터를 정량화하여 캐필러리 수에 대한 버블의 무차원 속도비와의 관계를 상세하게 고찰하였다. 글리세린의 경우는 항상 버블 선단부의 곡률이 후단의 곡률보다 더 작게 나타났으며 실리콘 오일의 경우와 반대 경향이 관찰되었다. 두 경우 모두 캐필러리 수에 대한 속도비와 세장비 값은 1 보다 큰 값을 가졌다. 실리콘 오일의 경우는 주어진 Ca 수에 대하여 속도비가 글리세린의 경우보다 더 크게 나왔으며 버블 크기에 따른 속도비 분산도가 더 조밀하게 나타났다. 사각 단면 폭이 감소할수록 벽면 효과는 증대되었으며 같은 폭에 대해서는 버블 변형이 축소관의 경우가 가장 크게 나타났다.

### 1. 서 론

이상유동에 관한 연구는 원자력 분야, 공기 조화 분야, 구조공정 분야, 혈관 유동분야, 폴리머 혼합 분야 등, 공학적 응용분야가 매우 폭 넓기 때문에 이에 관한 연구는 매우 중요하며 최근 많은 연구가 이루어지고 있다. 특히 플라스틱 가공 분야에서는 제품의 품질을 향상시키기 위하여 PE나 PS등 서로 다른 폴리머 재료를 혼합하여 압출이나 사출공정을 통해 더 우수

한 제품을 개발하기 위해 노력하고 있다. 이러한 이상플라스틱 가공에는 유체와 유체, 유체와 기체, 유체와 고체등의 서로 다른 상이 가공 공정중에 동시에 존재하기 때문에 이상 유동중에 일어나는 물리적 현상을 현상을 규명하기 위해 실험적 수치적 연구가 필수적이다.

한 개의 액적(liquid droplet) 또는 버블(gas bubble)의 거동을 연구하는 것은 이상유동에서 가장 기본적인 것으로 알려져 있다<sup>(1-4)</sup>. 본 연구에서는 복잡한 이상유동 현상을 이해하기 위한 기초 연구로서 비교적 점도가 높은 글리세린과 실리콘 오일 등의 작동 유체 안에

\* 안동대학교 기계공학과

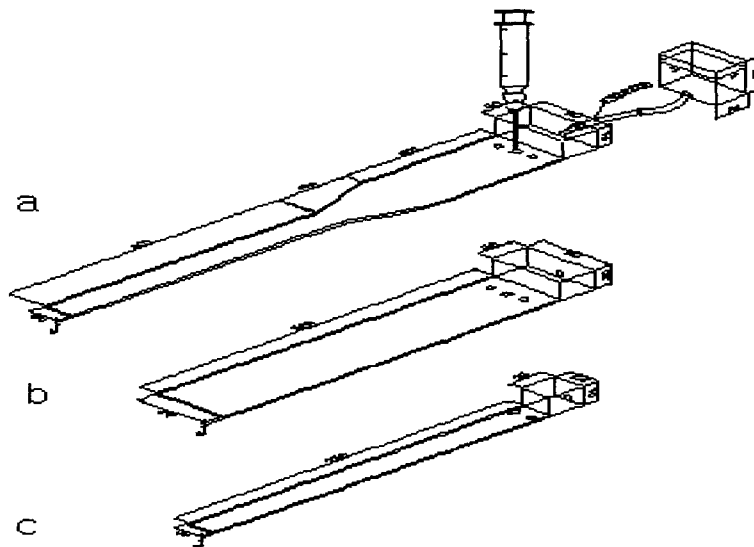
\*\* 안동대학교 기계공학과 대학원

존재하는 공기 버블의 변형거동에 대한 것이다. 본 연구의 목적은 압출 공정에서 재료가 다이로부터 빠져 나올 때, 그 재료안에 포함되어 있는 버블의 변형 특성을 실험적으로 규명하는데 있다. 따라서 실험장치로 유한한 폭을 가진 얇은 사각 단면을 가지는 세가지 서로 다른 유동로를 선택하였다. 유한한 폭을 가진 유동로에 대한 실험적 연구는 이제까지 보고되지 않고 있다. 그러나 원통관에서의 이상유동 연구 결과는 많이 보고되어 왔으며 그중 Udell등<sup>(1)</sup>이 수치해석적으로, Han등<sup>(2,3)</sup>이 실험적으로 연구 결과를 발표하였다. 비뉴턴-비뉴턴 이상유체 유동에 관한 수치해석법 개발에 대해 최근 본 연구자에 의해 수행되었다<sup>(4)</sup>. 사각 유동관에서의 이상유동연구는 주로 폭이 무한한 Hele-Shaw 유동에 관한 것으로 Homsy와 Park등<sup>(5,7)</sup>에 의해 이루어져 왔다. Homsy등은 버블의 정상상태 모양을 실험적으로 제시하였다<sup>(5)</sup>. Park등은 여러 가지 경우에 대한 버블의 정상상태 모양을 제시하였으며, Homsy등의 결과에 대한 계면 활성제 영향을 제시하였다<sup>(6,7)</sup>.

이상유동의 변형특성에서 대표적인 무차원 수는 세가지이다. 먼저, 연속상의 평균속도  $V$ 에 대한 액적 또는 버블의 속도  $U$ 의 비, 관의 직경에 대한 버블의 직경의 비, 표면장력에 대한 점성력의 크기를 나타내는 케펠러리 수가 있다. 본 연구에서는 기존에 보고되지 않은 유한한 사각 단면 폭을 가진 유동관에서의 버블의 변형 거동을 이러한 무차원 수의 중요 인자에 대하여 실험적으로 규명하고자 한다.

## 2. 실험 장치 및 방법

Fig. 1은 실험 장치를 도식적으로 표현한 것이다. Fig. 1 (a)는 축소관을 나타내며 축소부 상단에서는 폭 0.05m, 길이 0.2m, 하단에서는 폭 0.02m, 길이 0.4m이다. Fig. 1 (b)는 폭 0.05m, Fig. 1 (c)는 폭 0.02m 인 직관을 나타내며 두 경우 모두 길이는 0.5m이다. 세 경우 모두 사각관의 두께는 0.002m이다. 본 연구에서 사용한 세가지 서로 다른 유동로는 모두 얇은 직사각형



(Fig. 1) Schematic layout of the experimental apparatus

단면 형상을 하고 있으며 이러한 형상은 플라스틱 가공공정에 이용되는 압출기 다이 부분에 해당됨을 지지할 필요가 있다.

공기 버블의 주입은 주사기를 사용하였으며, Fig. 1 (a)에 도식적으로 나타내었다. 압력 구동 유동장을 형성하기 위하여 유체를 담은 용기는 유동관보다 일정 높이 위에 위치시켰다. 이러한 압력 유동장내에서 공기버블은 변형하기 시작하는데, 이때 유량을 동시 측정하여 기록한다. 유동중인 버블은 비디오 카메라를 이용하여 촬영하였으며, 본 논문에서 제시한 버블의 변형사진은 모두 정상상태에서의 모양이다. 작동 유체는 글리세린과 실리콘 오일을 사용하였다. 공기 버블은 초기 상태에서 비정상 변형을 계속하다가 일정 시간이 지나면 더 이상 변형되지 않는 정상상태를 모양을 가지게 되며, 이때 작동유체의 유량과 버블의 종말속도를 측정하여 캐피러리수에 대한 버블의 무차원화 된 속도와의 관계를 구하였다.

### 3. 실험 결과 및 고찰

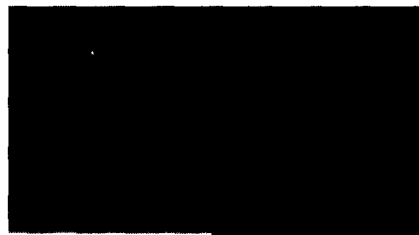
본 장에서는 세가지 종류의 유동관, 두가지 종류의 작동 유체, 버블의 초기 크기, 작동 유체의 유량 등을 변화시켰을 때 이에 대한 공기 버블의 변형을 체계적으로 관찰하고 이들을 비교 고찰 하고자 한다.

#### 3.1 글리세린-공기 버블

여러종류의 시험 조건을 변화 시켰을 때 이에 대한 공기 버블의 정상상태 모양을 실험적으로 가시화하여 그 결과를 정리하여 Fig. 2~7에 나타내었다. Fig. 2 와. 3은 폭 0.02m 직관을, Fig. 4와 5는 축소관을, Fig. 6과 7은 폭 0.05m 직관을 사용한 경우이다. 각각의 그림에서는 버블 크기를 변화시켰을때의 변형 모양을 나타내며, Fig. 2~5는 버블 크기가 0.1cc에서 0.5cc까



(Fig. 2) Steady shape of air bubbles immersed in glycerine for several bubble sizes at channel width=0.02m, flow-rate=  $1.4705 \times 10^{-7} m^3/s$



(Fig. 3) Steady shape of air bubbles immersed in glycerine for several bubble sizes at channel width=0.02m, flow-rate=  $3.367 \times 10^{-7} m^3/s$



(Fig. 4) Steady shape of air bubbles immersed in glycerine for several bubble sizes at a constriction channel, flow-rate=  $1.6025 \times 10^{-7} m^3/s$

지 0.1cc 증가시켰을 때의 결과이며 Fig. 6과 7에서는 0.1cc에서 0.5cc까지 0.2cc 증가 시켰을때의 결과이다. 관으로부터 유체 용기 높이는 Fig. 2, 4, 6에서 0.5m, Fig. 3, 5, 7에서 1.0m이다. 이에 대한 작동유체의 유량은 Fig.2에서 7까지의 경우에 대하여 각각 1.471,



(Fig. 5) Steady shape of air bubbles immersed in glycerine for several bubble sizes at a constriction channel, flow-rate= $3.077 \times 10^{-7} m^3/s$



(Fig. 6) Steady shape of air bubbles immersed in glycerine for several bubble sizes at channel width=0.05m, flow-rate= $2.036 \times 10^{-7} m^3/s$



(Fig. 7) Steady shape of air bubbles immersed in glycerine for several bubble sizes at channel width=0.05, flow-rate= $3.436 \times 10^{-7} m^3/s$

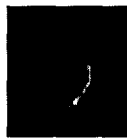
3.367, 1.603, 3.077, 2.036, 3.436이며 단위는  $10^{-7} m^3/s$ 이다. 공기 버블은 좌측에서 우측으로 움직이며 따라서 오른쪽이 버블의 선단부, 왼쪽이 후단부를 나타낸다. 여기서 유량의 증가는 유동관의 평균속도를 증가시키고 이에 대한 캐필러리수도 증가됨을 주목할 필요가 있으며 이 부분은 뒷부분에서 자세히 고찰하였다.

유동장의 평균 속도가 버블의 변형에 미치는 영향은 Fig. 2~7에서 알 수 있듯이 평균속도가 증가할수록 버블의 변형이 증가하고 있다. 또한 축소부(Fig. 4, 5)에서의 버블은 이에 해당하는 직관(Fig. 2, 3)의 경우보다 더 많이 변형되어 있음을 알 수 있는데 이는 축소부 영역에서 전단 유동의 발달로 인하여 직관 경우보다 더 많은 전단력을 받게 되어 일어난 현상으로 예측된다. Fig. 2~5에 나타난 버블은 유동 방향으로 길게 늘어나면서 변형한 것을 알 수 있다. 이것은 0.02m 폭에 의한 벽면의 구속으로 인하여 발생하였으며 상대적으로 폭이 넓은 Fig. 6과 Fig. 7의 경우(폭 0.05m)보다 길이 방향으로 더 많이 변형되었음을 알 수 있다. 사각관이 아닌 원통관 유동에 대한 수치해석과 실험결과는 이미 많이 발표되었으나 유한한 사각 단면 폭에 대한 버블 변형 가시화 결과는 본 연구에서 처음으로 제시되었으며 본 실험 결과는 수치적 연구에 중요한 기초 자료로 사용될 수 있다.

전체적인 버블 변형 특성은 버블 선단부에서 완만한 곡면을, 후단부에서 뾰족한 보조개 모양을 하고 있음을 알 수 있다. 이러한 버블의 정상 상태 모양은 기존 논문에 보고된 모양과 일치하며 계면활성제 영향에 의해 발생한 것으로 알려져 있다<sup>(6,7)</sup>. 또한 액적 또는 버블과 연속상의 경계면에서 계면활성제는 버블의 변형에 중요한 영향을 미친다. 계면활성제 효과는 버블 또는 액적과 연속상의 경계면에서 계면장력이 일정하지 않게 하며 액적 또는 버블과 연속상의 경계면을 따라서 계면장력의 구배를 형성하게 된다. 즉, 경계면을 따라서 계면활성제의 농도 구배를 형성함으로써 계면장력 일정하지 않게 된다.

유동장의 속도에 대한 액적 또는 버블의 속도의 비가 1보다 클 때, 계면활성제 농도는 액적 또는 버블의 뒤쪽이 크게되고 표면장력은 작게된다. 그리고, 곡을 반경은 작게된다. 이러한 속도비가 1보다 작을 때, 계면활성제 농도는 액적 또는 버블의 앞쪽이 크게된다<sup>(8)</sup>.

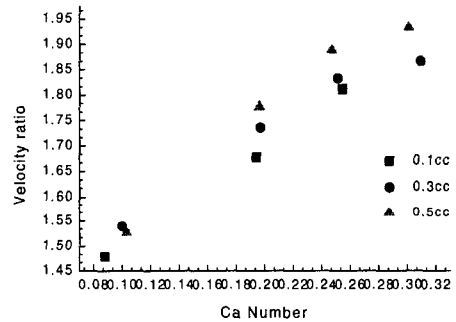
따라서 본 실험에서도 버블의 후단부에서 곡률값이 상대적으로 높게 나오는데, 이러한 이유는 버블과 주위 유체의 계면에서 계면 활성제의 영향으로 계면을 따라서 계면장력이 곡률의 함수로 일정한 값을 가지지 않기 때문에 발생하며 이러한 현상은 작동유체의 고유 물성치에 의존하는 것으로 보고되고 있다. 즉 글리세린은 계면활성제의 영향을 많이 받는 물질이며 다음절에 언급할 실리콘 오일은 계면활성제의 영향을 받지 않는 것으로 알려져 있다. 기존에 제시된 사각유동관에서의 버블 변형에 대한 연구는 모두 폭이 매우 넓은 유동장, 즉 Hele-Shaw 유동에 초점을 맞추었다. 따라서 Fig. 2~7은 유한한 폭에 대한 결과이며 세장비가 모두 1보다 커짐을 알 수 있다. 그러나 선단부와 후단부의 버블 모양은 Hele-Shaw 유동의 경우와 정성적으로 일치함을 알 수 있다. 또한 유동관 폭이 상대적으로 큰(Fig. 6, 7) 사각직관의 버블은 세장비가 거의 1에 가깝게 나타났다. Fig. 8은 버블의 크기 0.1cc, 사각관 폭, 0.05m, 용기 높이 0.4m에서 실험하였다. 이 경우 유동 방향에 수직 방향으로 늘어난, 즉 세장비가 1보다 적은 버블의 정상상태 모양을 얻을 수 있었다. Hele-Shaw 유동의 경우로서, 즉 폭이 무한히 크다는 가정이 만족할 때, Fig. 8과 같은 버블의 형상은 실험적으로 쉽게 얻을 수 있고 이에 대하여 Park등에 의해 실험적으로 보고되었으나<sup>7)</sup> 본 시험에서는 최소 버블 크기에서 최소 유량을 가하여 세장비가 1보다 적은 버블을 얻을 수 있었다.



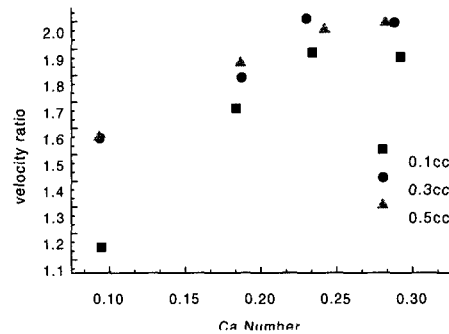
(Fig. 8) Steady shape of a air bubble immersed in glycerine at channel width=0.05m, reservoir height=0.4m

Fig. 9~11은 캐필러리 수에 대한 속도비의 값을 제시한 것이다. 캐필러리 수는 계면 장력에 대한 점성력의 크기를 나타내는 수, 즉  $Ca = \frac{\mu V}{\gamma}$  이며 여기서  $\mu$ 는 작동유체의 점도,  $V$ 는 유동장의 평균 속도,  $\gamma$ 는 표면장력이다. 속도비(U/V)는 유동장의 평균 속도(V)에 대한 버블의 정상상태 속도(V)의 비를 나타내는 값이다. 여기에 사용된 글리세린의  $\gamma$ 는 14.9 poise,  $\mu$ 는 63.4nN/m이다.

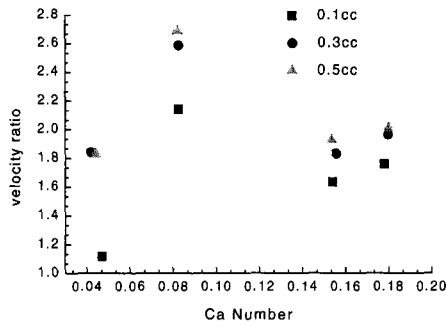
Fig. 9는 Fig. 2, 3에 대한 결과이고, Fig. 10은 Fig. 4, 5에 대한 결과이다. Fig. 11은 Fig. 6, 7에 대한 결과이다. 모든 캐필러리 수에 대하여 속도비는 1보다 큰



(Fig. 9) Effect of Capillary number on the dimensionless bubble speed in glycerine at channel width=0.02m



(Fig. 10) Effect of Capillary number on bubble speed in glycerine with constriction channel



(Fig. 11) Effect of Capillary number on the dimensionless bubble speed in glycerine at channel width=0.05m

값을 가지며 폭 0.05m 직관의 경우를 제외하고는 Ca 수가 증가할수록 속도비의 값은 증가한다. 모든 경우 속도비는 1 보다 큼을 알 수 있으며, 이 경우 앞에서 고찰하였듯이 버블의 세장비는 모두 1 보다 크다. 축소관과 폭 0.02 직관의 경우를 비교하여 보면, Ca 수가 0.1 근처에서 속도비가 1.55로서 서로 비슷한 값을 가지나 0.3 근처에서는 직관의 경우가 더 낮은 속도비를 가진다. 이것은 축소부 영역에서 유동장 변화가 심하여 버블이 더 많이 변형된 현상과 관계가 있으리라 예측된다. 전체적으로 Ca 수에 따른 속도비 변화가 축소관에서 더 현저하게 일어나고 있음을 알 수 있다. 두 경우 모두 버블 크기의 증가에 따라 속도비가 증가하였다. 폭 0.05m 직관의 경우에는 Ca 수에 대한 속도비의 변화와 버블 크기에 대한 속도비의 변화가 세 경우중에서 가장 현저하며 또한 Ca 수 증가에 따라 속도비가 증가하다가 0.15 근처에서 감소하고 그 후 다시 증가하였다. 이로부터 관 폭의 증가가 버블 변형특성에 가장 큰 영향을 주는 인자임을 알 수 있다.

### 3.2 실리콘 오일-공기 버블

본 절에서는 실리콘 오일과 공기 버블의 실험 결과

를 고찰한다. 실리콘 오일과 공기 버블은 계면 활성제의 영향을 무시할 수 있는 경우이다<sup>(6)</sup>. 본 실험에서는 실리콘 오일의 점도는 10 poise로 글리세린의 경우와 비슷한 점도를 선택하였다. 그외 실험 조건은 글리세린의 경우와 동일하다.

버블의 크기는 좌측에서 우측으로 0.1cc에서 0.5cc까지 0.1cc 증가에 대한 버블의 변형 모양을 Fig. 12에 나타내었다. 폭 0.05m 직관에 대한 버블의 정상 상태 버블 모양(Fig. 12 (a))은 폭이 상대적으로 넓기 때문에 유동의 진행 방향으로 많이 변형하지 않는 것을 볼 수 있다. 폭 0.02m 직관(Fig. 12 (b))과 축소관(Fig. 12 (c))에 대한 정상 상태 버블의 변형 정도는 버블의 크기가 증가할수록 폭 0.05m 직관에 비해 현저하게 크며 이러한 차이는 사각관 벽면의 구속으로 발생함을 알 수 있고 버블의 세장비는 1보다 큼을 알 수 있다. 이 모든 결과를 앞에서 고찰한 글리세린과 공기 버블의 경우와 비교하면 정성적으로 일치하는 변형거동을 나타내고 있다.



(a) at channel width=0.05m, flow-rate=  $1.157 \times 10^{-7} m^3/s$

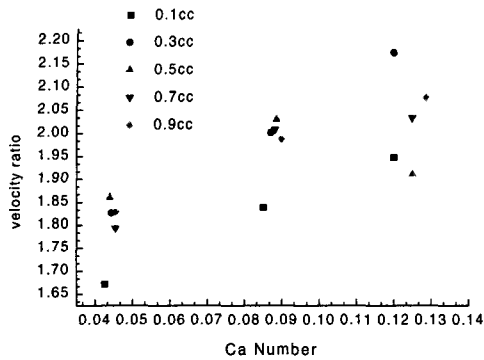


(b) at channel width=0.02m, flow-rate=  $1.6129 \times 10^{-7} m^3/s$

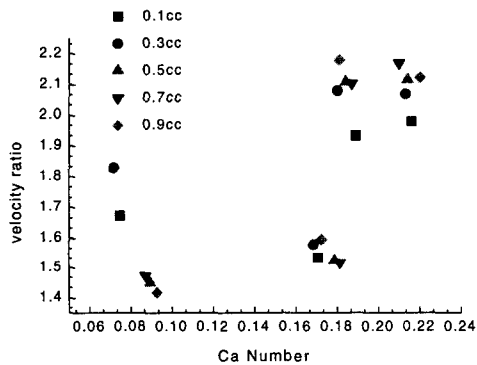


(c) at constriction channel, flow-rate =  $1.655 \times 10^{-3} m^3/s$

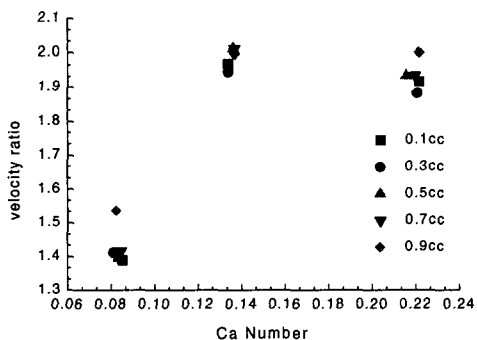
(Fig. 12) Steady shape of air bubbles immersed in silicone oil for various bubble sizes



(Fig. 13) Effect of Capillary number on the dimensionless bubble speed in silicone oil at channel width=0.05m.



(Fig. 14) Effect of Capillary number on the dimensionless bubble speed in silicone oil at channel width=0.02m



(Fig. 15) Effect of Capillary number on the bubble speed in silicone oil at a constriction channel

그러나 계면 활성제 영향을 거의 무시할 수 있는 실리콘 오일과 공기버블의 경우, 유동 방향의 앞쪽에서 곡률이 높은 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 즉 글리세린의 경우에 관찰되었던 후단부 보조개 형상이 나타나지 않고 있다. 이러한 결과는 글리세린과 공기 버블의 경우와 큰 대조를 이루는 현상이다.

Fig. 13~15는 Ca 수에 대한 속도비의 관계를 나타낸 것으로 각각 Fig. 12의 경우에 대한 결과를 제시한 것이다. Ca 수가 증가할수록 속도비는 증가하는 경향을 보이며 모든 경우 속도비의 값이 1 보다 크다. Park 등은 Hele-Shaw 유동에서 버블 변형은 유동 방향에 가로지르는 방향으로 변형하고, 실험과 이론식의 결과로서 캐필러리 수에 대한 속도비의 관계를 제시하였다<sup>7)</sup>. 본 실험에서의 버블 변형은 유동 방향으로 늘어나면서 변형하고 캐필러리 수에 대한 속도비의 값은 1 보다 큰 값을 가진다. 캐필러리 수에 대한 속도비의 관계는 정성적으로 일치한다. 즉 Ca 수가 증가하면 속도비가 증가하는 경향은 일치하나 정량적으로는 속도비가 이론치보다 더 크게 나왔다. 이것은 이론식이 Hele-Shaw 유동이라는 가정이 있고 본 실험에서는 유한한 폭을 사용한 차이 때문에 나타난 결과라 판단된다. 앞절에서 다른 글리세린의 경우와 비교하면, 실리콘 오일의 경우가 주어진 Ca 수에 대하여 속도비가 더 크게 나왔으며 버블 크기에 따른 속도비 분산도가 더 조밀하게 나왔다. 이러한 현상은 글리세린의 경우, 계면활성제의 영향이 하나 더 추가되기 때문에 일어난 것으로 판단된다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 얇은 직사각형 단면 형상을 가지는 세가지 서로 다른 유동로 안에서 글리세린과 실리콘 오일에 대한 공기버블의 변형 거동에 대한 실험을 수행하였다.

글리세린-공기 버블의 경우, 계면 활성제의 영향으로 인하여 버블의 정상 상태 모양은 후단부가 선단부에 비해 더 높은 곡률을 가지며 짧은 꼬리를 형성하였다. 이러한 버블의 정상 상태 모양은 Homsy등과 Park 등에 의하여 보고된 형상과 정성적으로 일치하였다. 축소관 경우가 버블의 세장비가 가장 크게 나타났으며 이것은 축소 영역에서의 전단률 변화가 다른 유동관에 비해 크기 때문에 나타난 현상으로 판단된다. Hele-Shaw 유동의 경우에 쉽게 얻어지는 세장비가 1보다 적은 버블은 제한된 실험 조건에서 밖에 얻을 수 없었으며 이는 유한한 사각관 폭의 영향 때문임을 알 수 있었다. 모든 Ca 수에 대하여 세장비와 속도비가 1보다 크게 나왔다. 버블 변형에 가장 큰 인자는 사각관 폭의 길이임을 알 수 있었다.

실리콘 오일과 공기 버블의 경우, 계면 활성제의 영향은 거의 무시할 수 있음을 확인하였다. 따라서 글리세린의 경우와 달리 버블 선단부의 곡률이 후단부의 곡률보다 크게 나타났다. 본 실험에서도 글리세린의 경우와 유사하게 버블 변형은 유동 방향으로 늘어나면서 변형하고 캐필러리 수에 대한 속도비의 값은 1보다 큰 값을 가진다. Ca 수가 증가하면 속도비가 증가하는 경향은 본 실험의 글리세린의 경우와 Park의 이론해석과 일치하나 정량적으로는 속도비가 Park의 이론치보다 더 크게 나왔다. 이것은 이론식이 Hele-Shaw 유동이라는 가정이 필요하여 유동관 폭이 무한대이며 본 실험에서는 유한한 폭이 사용된 차이로 인하여 나타난 결과라 판단된다.

글리세린의 경우와 비교하면, 실리콘 오일의 경우가 주어진 Ca 수에 대하여 속도비가 더 크게 나왔으며 버블 크기에 따른 속도비 분산도가 더 조밀하게 나왔다. 이러한 현상은 글리세린의 경우, 계면활성제의 영향이 하나 더 추가되기 때문에 일어난 것으로 판단된다.

## 후 기

본 연구는 안동대학교 기성희 연구비의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. M. J. MARTINEZ and K. S. UDELL, "Axisymmetric creeping motion of drops through circular tubes", *J. Fluid Mech*, Vol. 210, 1990, pp. 565-591.
2. C. D. HAN and KAZUMORIFUNATSU, "An experimental study of droplet deformation and breakup in pressure-driven flows through converging and uniform channels", *Journal of Rheology*, 22(2), 1978, pp. 113-133.
3. H. B. CHIN and C. D. HAN, "Studies on droplet deformation and breakup. I. Droplet deformation in extensional flow", *Journal of Rheology*, 1979, 23(5), 557-590.
4. S. J. Kim, C. D. Han, "Numerical studies on droplet deformation", *KSME, Proceedings of the Kyungbuk, Autumn Annual Meeting '98*, 1998, pp. 39-45.
5. A. R. Kopf-Sill and G. M. Homsy, "Bubble motion in a Hele-Shaw cell", *Phys. Fluids* Vol 31. No. 1, 1988, pp. 18-26.
6. C. W. Park, S. R. K. Maruvada, and D. Y. Yoon, "The influence of surfactant on the bubble motion in Hele-Shaw cells", *Phys. Fluids* 6(10), 1994, pp. 3267-3275.
7. S. R. K. Maruvada and C. W. Park, "Retarded motion of bubbles in Hele-Shaw cells", *Phys. Fluids* 8(12), 1996, pp. 3229-3233.
8. L. G. Leal, "Laminar flow and convective transport process", pp. 213-221.