

초기 모델의 경계조건에 따른 체결강성 보정특성 연구

신 영 석*

양 해 석*

황 철 규*

이 열 화*

Shin, Young-Sug, Yang, Hae-Seogk, Hwang, Cheol-Gyu, Lee, Yeol-Wha

ABSTRACT

The stiffness of joint parts in the finite element beam model are corrected by the direct comparison between the modal test and analysis model. The corrected stiffness are reviewed according to the boundary conditions of modal testing. For the improved modal test/analysis correction, more modes measured than acceleration sensors are used to make a minimal order system model. In addition, the initial F.E. model is reduced to the degrees of freedom of a minimal order system model, keeping the dynamics of the initial model. Finally, for the parametric correction of the reduced model, the submatrices are used to model the initially assumed stiffness.

1. 서 론

유도무기나 항공기의 비행 중 구조 동적안정성 특성 해석 및 유도조종 설계 등을 위해, 기체구조물의 진동 동특성이 정확하게 규명된 수학적 구조 모델이 필요하게 된다. 일반적으로 유도무기 동체에 대한 고유진동 해석은 주로 유한요소 해석기법을 이용하여 보 요소로 모델링하는데, 복잡하게 연결된 동체 체결부에서의 체결강성을 정확하게 구현하지 못한다. 본 연구에서는 대상 진동계의 정확한 고유진동 해석을 위해, 모달시험의 경계조건에 따라 구한 고유진동 특성을 이용하여 초기 유한요소모델의 체결부 강성을 보정하고, 체결부 강성 규명 시 경계조건의 영향을 분석하고자 한다.

모달해석/시험 모델간의 보정을 위해 사용되는 모델은 원래의 초기 유한요소모델을 이용하는 방법과 축약모델을 이용하는 방법 두 가지로 크게 분류할 수 있다. 여기서 축약모델은 유한요소모델의 자유도를

모달시험의 자유도로 축약시킨 모델을 말하며, TAM (Test Analysis Model) 모델이라고 하기도 한다. 축약되지 않은 원래의 유한요소모델을 이용하는 경우, 실험에서 측정된 모드의 자유도수가 해석모델의 자유도수와 같다고 가정하거나^(1,2), 보간법 등을 이용하여 측정된 모드의 자유도를 해석모델의 자유도로 증가시켜야 한다⁽³⁾. 축약모델을 사용하는 경우 초기에 가정한 강성특성이 축약모델 전체에 반영되는 점이 있으나, 대상 시스템의 자유도가 줄기 때문에 계산상의 효율을 꾀할 수 있고, 단순화된 수학적 해석모델을 구할 수가 있다. 축약모델이 갖고 있는 장점 때문에, 최근까지도 축약모델을 구성하여 강성을 개선하는 기법이 부단히 연구되고 있다⁽⁴⁾.

유한요소모델의 자유도는 모달시험의 측정 자유도수 보다 훨씬 많기 때문에, 축약모델을 만들기 위해서는 해석모델의 자유도를 축약시켜야 한다. 축약모델을 만드는 대표적인 방법으로 Guyan 축약법⁽⁵⁾이 있는데, Guyan 방법으로 축약된 모델은 모달시험에서 얻은 동특성뿐만이 아니라 원래의 해석모델의 동특성도 완벽하게 구현하지 못한다. Guyan 축약법을 이용하여

* 국방과학연구소

Kabe 모델⁽¹⁾의 초기모델의 개선에 적용할 경우, 선정된 측정 자유도 수와 위치에 따라 초기모델의 개선 정확도는 매우 큰 영향을 받게된다^(6,7). Guyan 축약법의 단점을 보완하기 위해 IRS 방법^[8], SEREP 방법⁽⁹⁾ 등이 발표되었다. 이러한 방법들은 모달시험에서 측정된 모드는 측정센서의 수보다 작다는 전제 하에, 모달 시험에서 측정된 자유도로만 해석모델을 축약하고 있다. 그런데, 최근에 Alvin과 Park⁽¹⁰⁾은 모달시험에서 고속도 센서 수보다 많이 추출한 모드를 이용하여 역진동방정식(Inverse Vibration Problem)을 풀어 모달시험 결과를 모두 재현할 수 있는 최소차수 시스템 행렬을 제안하였다. 최소차수 시스템행렬은 측정된 자유도 외에 Craig-Bampton의 모드 합성법⁽¹¹⁾에서 사용된 것과 같은 일반화된 자유도를 포함하고 있다. Alvin과 Park이 제안한 최소차수 시스템 행렬은 모달시험 결과로 실험대상 진동계를 표현하는 방법만을 제안했을 뿐, 초기 유한요소 해석 모델과 연계하여 초기모델을 개선하는 방법을 제시하진 않았다.

따라서, 본 연구에서는 모달센서 보다 많이 측정된 모드를 이용하여 구성된 최소차수 시스템 행렬의 잇점을 활용하기 위해, 초기 해석모델을 최소차수 시스템 행렬의 자유도로 정밀 축약시킬 수 있는 방법을 제시하고, 축약된 모델을 이용하여 모달해석/시험 모델간의 보정을 통해 초기 유한요소모델을 개선하고자 한다. 본 연구 방법을 이용하여, 보 모델에 대해 모달 시험의 경계조건에 따라 보정된 초기 유한요소모델의 체결부 강성특성을 파악하고자 한다.

2. 지배방정식 및 수치해법

2.1 Craig-Bampton 행렬 구성

유한요소기법으로 모델링한 n-자유도 선형시스템에 대한 진동방정식은 다음과 같다.

$$[M_n]\{\ddot{q}_n\} + [K_n]\{q_n\} = \{0\} \quad (1)$$

m은 측정된 위치의 자유도이고, i를 나머지 자유도라 하면($n = m + i$), 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{mi} \\ M_{im} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_m(t) \\ \ddot{q}_i(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mi} \\ K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_m(t) \\ q_i(t) \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2)$$

식 (2)에 대해 Craig-Bampton 모드 합성법⁽¹¹⁾을 이용하여 n-자유도 진동방정식을 측정된 자유도와 일반화된 자유도(ξ)로 재구성한다. 이 경우 M_{ii}, K_{ii} 행렬에 대해 질량으로 정규화된 모달행렬 $[T_\xi]$ 을 이용하여, i-자유도에서의 변위를 식 (3)과 같이 나타낸다.

$$\{q_i\} = -[K_{ii}]^{-1}[K_{mi}]^T\{q_m\} + [T_\xi]\{\xi\} \quad (3)$$

식 (3)은 다음과 같은 Craig-Bampton 변환행렬 $[T_{CB}]$ 로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} q_m \\ q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_{ii}^{-1}K_{mi}^T & T_\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_m \\ \xi \end{Bmatrix} = [T_{CB}] \begin{Bmatrix} q_m \\ \xi \end{Bmatrix} \quad (4)$$

식 (4)를 이용하여 n-자유도 Craig-Bampton 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} [K_{CB}] &= [T_{CB}]^T[K_n][T_{CB}] \\ [M_{CB}] &= [T_{CB}]^T[M_n][T_{CB}] \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 시험모델(최소차수 시스템 행렬) 구성

본 연구의 모달 해석/시험 모델간의 보정 시 사용되는

시험모델의 모달벡터는 “최소차수 시스템 행렬”로부터 구해진다. 최소차수 시스템 행렬은 모달시험에서 가속도 센서 수(m)보다 더 많은 모드 수(k)를 추출한 경우(k > m), 측정된 모드를 이용하여 역진동방정식을 풀어 구성하게 된다. 이러한 최소차수 시스템 행렬은 모달시험 결과를 모두 구현할 수 있는 특성을 갖고 있다⁽¹⁰⁾.

역진동방정식을 구성하기 위해, 모달시험에서 측정된 모달행렬 $[\Psi_m]_{m \times k}$ 을 이용하여, $[\Psi_k]_{k \times k}$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$[\Psi_k] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k] = \begin{bmatrix} \Psi_m \\ \Psi_g \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 $\phi_i, i=1,2,\dots,k$ 는 각각의 모드 벡터이고, g 는 Craig-Bampton 행렬에서 사용된 것과 같은 일반화된 자유도이며, $[\Psi_g]$ 는 일반화된 자유도에 대한 모달행렬으로써 나중에 구하게 된다. $[\Psi_g]$ 를 구하기 위해, 식 (7)과 같이 최소차수 시스템 행렬 $[\hat{K}]_{k \times k}$, $[\hat{M}]_{k \times k}$ 을 구성한다. 식 (7)은 최소차수 시스템 행렬로 구성된 역진동방정식인데, $[\Psi_g]$ 를 구해 완성되어진다.

$$\begin{aligned} [\hat{K}_k]^{-1} &= [\Psi_k] [\Omega_k]^{-1} [\Psi_k]^T \\ [\hat{M}_k]^{-1} &= [\Psi_k] [\Psi_k]^T \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $[\Omega_k]$ 는 측정된 고유치로 된 대각행렬이다. 식 (7)을 풀기 위해 다음과 같은 고유치 방정식을 구성한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{K} & 0 \\ 0 & \Omega_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_m \\ \Psi_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M} & M_c \\ M_c^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_m \\ \Psi_g \end{bmatrix} [\Omega_k] \quad (8)$$

여기서 Ψ_m, Ψ_g 는 질량으로 정규화된 모달행렬이고 \bar{K}, \bar{M} 은 Guyan 방법으로 축약된 강성 및 질량 행렬이다. 모달시험에서 측정된 Ψ_m, Ω_k 를 이용하여 식 (8)의 Ψ_g, Ω_g 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Psi_g^T \Omega_g \Psi_g &= \Omega_k - \Psi_m^T \bar{K} \Psi_m \\ &= [\Delta\Omega] \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)의 $\Delta\Omega$ 는 각 행렬의 차수(rank) 차이가 $(k-m)$ 이므로 다음과 같이 특이치 분리를 하여 $[\Psi_g]$ 에 대한 기저(basis)를 구한다.

$$SVD(\Delta\Omega) = Q_g \Sigma_g Q_g^T \quad (10)$$

따라서, 식 (7)은 Q_g^T 를 이용하여 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{K} & 0 \\ 0 & K_g \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Psi_m \\ Q_g^T \end{bmatrix}^{-T} [\Omega_k] \begin{bmatrix} \Psi_m \\ Q_g^T \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} \bar{M} & \bar{M}_c \\ \bar{M}_c^T & M_g \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Psi_m \\ Q_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_m^T & Q_g \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 M_g, K_g 행렬에 대해 질량으로 정규화된 모달행렬 $[U]$ 을 이용하여, 식 (7)의 최소차수 시스템 행렬은 최종적으로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K} & 0 \\ 0 & K_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \bar{K} & 0 \\ 0 & \Omega_g \end{bmatrix} = [\hat{K}] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M} & \bar{M}_c \\ \bar{M}_c^T & M_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M} & M_c \\ M_c^T & I \end{bmatrix} = [\hat{M}] \quad (13)$$

식 (6)의 $[\Psi_k]$ 는 식 (12), (13) 식에 대한 고유치 해로 구해지고, 모달 해석/시험모델 보정 시 시험모델의 모달벡터로 이용된다.

2.3 정밀 동적축약기법 및 체결강성 규명

모달시험의 k-자유도 보다 훨씬 자유도가 많은 식 (5)의 n-자유도 Craig-Bampton 행렬을 k-자유도로 축약하기 위해, 정밀축약법으로 알려진 SEREP (System Equivalent Reduction Expansion Process)방법⁽⁹⁾을 이용하였다. 본 연구에서 SEREP 적용방법에서 역행렬을 구성할 때, 기존 방법과 달리 측정된 자유도 외에 일반화된 자유도를 추가하였다.

식 (5)의 n-자유도 Craig-Bampton 행렬에 대한 고유치 해로써 $n \times k$ 모달행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[\Phi_k] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k] = \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Phi_\xi \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 $\phi_i, i=1,2,\dots,k$ 는 각각의 모드 벡터이고, Φ_m 과 Φ_ξ 는 측정된 자유도 m과 일반화된 자유도 ξ 에 대해 행렬크기가 $m \times k, (n-m) \times k$ 인 부행렬이다. Φ_ξ 는 다음의 식(15)과 같이 $\Phi_{\xi a}, \Phi_{\xi b}$ 로 분할한 다음, Φ_{mg} 과 $\Phi_{\xi a}$ 를 합쳐 Φ_k 인 부행렬을 구성한다.

$$[\Phi_k] = \begin{bmatrix} \phi_m \\ \phi_{\xi a} \\ \dots \\ \phi_{\xi b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_k \\ \Phi_{\xi b} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서 $\Phi_{\xi a}, \Phi_{\xi b}$ 및 Φ_k 는 각기 크기가 $(k-m) \times k, (n-k) \times k, k \times k$ 인 모달 부행렬이다. SEREP 방법 적용시 지금까지는 측정된 자유도에 해당하는 Φ_m 모달행렬만이 역행렬구성시 쓰였지만, 본 연구에서는 일반화된 자유도가 포함된 Φ_k 를 역행렬구성시 이용하여 다음과 같이 SEREP 방법을 구성한다.

$$[T_{SEREP}] = \begin{bmatrix} \Phi_k \\ \Phi_{\xi b} \end{bmatrix} [\Phi_k]^{-1} \quad (16)$$

식 (4)와 식 (16)에서 각기 정의된 변환행렬 $[T_{CB}]$ 와 $[T_{SEREP}]$ 을 연속적으로 적용하여, 식(1)의 n-자유도 시스템 행렬로부터 k-자유도 모델로 다음과 같이 본 연구의 축약모델을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} [\hat{K}_k] &= [T_{SEREP}]^T [T_{CB}]^T [K_n] [T_{CB}] [T_{SEREP}] \\ [\hat{M}_k] &= [T_{SEREP}]^T [T_{CB}]^T [M_n] [T_{CB}] [T_{SEREP}] \end{aligned} \quad (17)$$

따라서 본 연구의 정밀축약모델 구성기법인 SREEP-CB 변환행렬을 다음과 같이 정의된다.

$$[T_{mix}] = [T_{CB}] [T_{SEREP}] \quad (18)$$

본 연구에서 초기 유한요소모델의 개선은 초기에 가정된 연결부위 체결강성(Fig. 1 참조)을 부행렬 및 보정계수로 나타내고, 초기모델을 식 (17)과 같이 축약시킨 다음 모달시험/축약모델 간의 직접비교를 통해 보정계수를 구하므로써 이루어진다. 여기서 부행렬은 같은 강성특성을 갖는 것들로 구성된다. 식 (1)의

진동계에서 질량행렬은 정확하게 모델링 되어있다고 가정하면, 강성행렬은 부행렬 $[K_j]$ 를 이용하여 다음과 같이 표현한다⁶⁾.

$$[K_n] = \left\{ [K_b] + \sum_{j=1}^P s_j [K_j] \right\} + \sum_{j=1}^P s_j [K_j]$$

$$= [K_a] + \sum_{j=1}^P s_j [K_j] \quad (19)$$

여기서

- $[K_n]$: 수정 강성행렬
- $[K_b]$: 정확하게 모델된 부위의 강성행렬
- $[K_a]$: 초기 강성행렬
- $[K_j]$: 부행렬 (연결부위 체결강성 행렬)
- s_j : j번째 보정계수
- P : 보정강성행렬 개수

식 (19)를 식 (1)에 대입하고 식 (18)을 적용하면 보정계수에 대한 선형방정식으로써 다음과 같은 시스템 식별식을 구할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^P s_j [\hat{K}_j] [\Psi_k]$$

$$= [\hat{M}_n] [\Omega_k] [\Psi_k] - [\hat{K}_a] [\Psi_k] \quad (20)$$

여기서

$$[\hat{K}_j] = [T_{mix}]^T [K_j] [T_{mix}]$$

$$[\hat{K}_a] = [T_{mix}]^T [K_a] [T_{mix}]$$

$$[\hat{M}_k] = [T_{mix}]^T [M_n] [T_{mix}] \quad (21)$$

식 (20)에서 Ω_k 는 모달시험에서 측정된 진동수이고, Ψ_k 는 식 (12), (13)의 최소차수 시스템행렬의 고유치 해로부터 구한 것이다. 식 (22)에서 벡터 행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$\{ L_{ji} \} = [\hat{K}_j] \{ \Psi_i \}$$

$$j=1, 2, \dots, p \text{ and } i=1, 2, \dots, k \quad (22)$$

$$\{ R_i \} = [\hat{M}_k] \{ \Psi_i \} \Omega_i - [\hat{K}_a] \{ \Psi_i \}$$

$$j=1, 2, \dots, p \text{ and } i=1, 2, \dots, k \quad (23)$$

최종적으로 식 (20)은 다음과 같이 표현된다.

$$[L] \{ s \} = \{ r \} \quad (24)$$

여기서

$$[L] = \begin{bmatrix} \{ L_{11} \} & \{ L_{21} \} & \dots & \{ L_{p1} \} \\ \{ L_{12} \} & \{ L_{22} \} & \dots & \{ L_{p2} \} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{ L_{1k} \} & \{ L_{2k} \} & \dots & \{ L_{pk} \} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\{ s \} = \{ s_1 \ s_2 \ \dots \ s_p \}^T \quad (26)$$

$$\{ r \} = \{ \{ R_1 \}^T \ \{ R_2 \}^T \ \dots \ \{ R_k \}^T \}^T \quad (27)$$

식 (24)에서 $[L]$ 는 정방행렬이 아니므로, 해는 최소자승법을 이용하여 구한다. 최종적으로 식 (19)에 구해진 보정계수를 대입하여 초기모델을 보정하게 된다.

보정된 초기모델의 고유진동수가 모달시험에서 측정된 고유진동수에 비해 오차가 5% 이내로 들지 않을 경우, 시스템 식별식을 반복 적용하였다. 여기서 오차는 식 (28)과 같다.

$$\text{error percent} = (\Omega_e - \Omega_c) / \Omega_e \times 100 \quad (28)$$

여기서 Ω_e 는 모달시험에서 측정된 고유진동수이고, Ω_c 는 개선된 모델의 고유진동수이다. 초기에 가정한 강성은 i번째 반복 계산시 다음과 같다.

$$K_j^{(i)} = (1 + s_j^{(1)}) (1 + s_j^{(2)}) \dots (1 + s_j^{(i)}) K_j^{(0)} \quad (29)$$

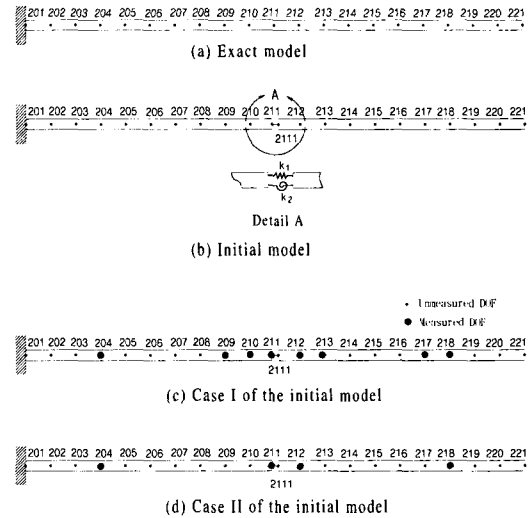
여기서 아래 첨자 j 는 부행렬의 해당번호를 의미하고, 윗 첨자 i 는 반복 횟수이며, $K_j^{(i)}$ 는 부행렬 구성시 처음에 가정한 강성이다.

3. 결과 및 검토

3.1 1단 고정경계조건의 보 모델 체결강성

1단 고정(fixed-free) 경계조건으로 된 외팔 보를 20개의 보 요소으로 균등하게 Fig. 1과 같이 모델링하였다. 일체로 연결된 보가 엄밀모델이며, 중간에 2개의 스프링으로 연결된 모델이 초기모델이다. 보 요소는 병진자유도 및 회전자유도를 갖기 때문에, 초기모델의 연결부를 2개의 스프링으로 모델링하여 초기에 k_1 , k_2 를 각각 15kgf/mm, 20 kgf-mm/rad으로 가정하였다. 질량행렬은 정확하다고 가정하고, 초기에 가정한 2개의 스프링 강성에 대해서 2개의 부행렬을 구성하였다. 따라서 초기모델의 행렬 크기는 [42 x 42]가 된다. 모드시험에서 구할 고유진동수 및 모드는 등가 시험모델인 엄밀모델에서 해석적으로 구하였다. 유한요소해석 모델링시 강 재질에 대한 물성치로 $E=21092.4$ kgf/mm², $\rho=7.7782 \times 10^{-6}$ kg/mm³, $\nu=0.3$ 을 사용하였고, 보 요소 1개의 길이는 20mm, 직경은 3.0mm로 균일하게 적용하였다. 측정 위치에 따라 Fig. 1과 같이 Case를 분류하였고 측정된 위치를 ●로 표기하였다.

Case I은 모달시험에서 8개의 측정위치에서 11개의 모드를 측정할 경우로써 최소차수 시스템 행렬은 11 x 11인 행렬이 된다. 즉 최소차수 시스템 행렬의 자유도는 측정된 자유도 8개 및 일반화된 자유도 3개로 구성되어 있다. 최소차수 시스템행렬과 엄밀모델의 동특성은 잘 일치하고 있어서 별도의 표로 제시하지 않았다. 본 연구의 SEREP-CB 방법을 이용한 축약모델과 축약 전 모델에서 각기 추출한 고유진동수를 Table 1



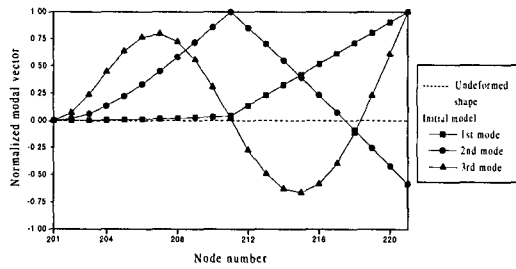
(Fig. 1) Finite element model of a beam with 42 DOF

(Table 1) Natural frequency(Hz) of Case I with a fixed-free condition

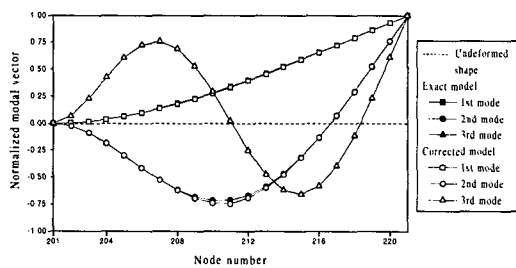
Mode No	Exact model	Initial model		Corrected model
		A	B	
1	13.5	5.6	5.6	13.5 (0.0)
2	84.7	40.3	40.3	82.0 (3.2)
3	237.2	235.9	235.9	237.0 (0.1)
4	464.8	344.4	344.4	450.7 (3.0)
5	768.1	754.4	754.4	765.8 (0.3)
6	1147.2	951.2	951.2	1114.0 (2.9)
7	1602.0	1573.4	1573.4	1591.6 (0.6)
8	2132.7	1861.1	1861.1	2073.9 (2.8)
9	2739.8	2528.3	2528.3	2708.4 (1.1)
10	3423.7	3075.4	3075.4	3333.4 (2.6)
11	4185.4	3665.7	3665.7	4108.6 (1.8)

A: Unreduced model B: Present TAM
() : error percent, Eq. (28)

에 비교 제시하였는데 본 축약모델은 축약 전 초기모델의 동특성을 잘 보존하고 있음을 알 수 있다. Table 1에서 보정된 고유치들은 최소차수 시스템 행렬에서



(Fig. 2) Mode shapes of the initial beam model with the fixed-free condition



(Fig. 3) Comparison of mode shapes between the exact and corrected model with the fixed-free condition

구한 모드 11개 전부를 이용하여, 식 (24)를 풀 결과로써 반복계산 횟수는 4회이다. 이 경우에서 개선 전 후 모델에 대한 모드형상을 Fig. 2 및 Fig. 3에 각각 수록하였다.

최소차수 시스템 행렬에서 구한 모드 11개중 선형 방정식 (24)에 이용된 모드 갯수에 따라 보정된 초기 강성 결과 및 반복계산 횟수를 Table 2에 수록하였다. 여기서 반복계산 횟수는 엄밀모델에 대한 고유진동수 오차가 5% 이내로 들어올 때의 횟수이다. 그런데, 측정모드가 7개 사용된 경우와 11개 사용된 경우에서, 보정된 초기강성 값들은 차이를 보이고 있었다. 이러한 차이는 최소자승법의 특성상, 선형방정식에 대한 벡터공간에서 해의 오차가 최소화된 값들을 찾기 때문이다. 일반적으로 해석모델의 자유도에 비해 모달 시험 결과는 훨씬 불충분한 정보를 갖고 있어 유일한

해를 구할 수는 없지만⁽¹²⁾, 최소자승법으로 해의 오차가 최소로 존재하는 영역은 제시할 수 있다.

Case II의 경우는 모달시험에서 4개의 측정위치에서 7개의 모드를 측정할 경우로써, 최소차수 시스템 행렬은 7x7인 행렬이 된다. 즉 최소차수 시스템 행렬의 자유도는 일반화된 자유도 3개를 포함하여 7개이다. Case II의 경우에서도 Case I 경우처럼 최소차수 시스템 모델 및 축약모델은 엄밀모델 및 초기 모델의 동특성을 잘 보존하고 있었다. 최소차수 시스템 행렬에서 구한 모드 7개중 식 (24)에 이용된 모드 갯수에 따라 보정된 초기강성 결과 및 반복계산 횟수를 Table 2에 수록하였다.

(Table 2) Corrected stiffness of assumed springs in the fixed-free beam

Number of modes used in Eq. (24)	Case I		Case II	
	7	11	5	7
No. of Iterations	27	4	12	3
k1	50.8	100.7	50.6	101.2
k2	11282.0	6169.3	7426.0	4304.2

3.2 양단 자유경계조건의 보모델 체결강성

본 절에서는 앞 절의 모델에 대해 경계조건만 양단 자유조건(free-free)으로 바꾸어 체결강성을 구하였다. 앞 절에서 선택된 측정자유도에 따라 분류된 Case I, II에 대해, 본 절에서는 Case I-a, Case II-a라고 분류한다. 따라서, 초기모델의 행렬크기는 44x44가 된다. 양단 자유조건인 경우, 회전 및 병진운동을 하는 강체운동 모드가 2개 존재하는 반한정계(Semidefinite system)가 된다. 강체운동 모드가 포함된 측정모드를 이용하여

최소차수 시스템을 구성할 때 특이치가 3개 보다 더 많이 추출되게 된다. 이 경우, 분리된 특이치에 대해 고차의 값을 갖는 순서대로 일반화된 자유도 수(3개) 만큼 특이치를 선정하였다.

Case I-a의 경우, 강제운동 모드가 포함된 11개 모드를 이용하여, 11x11 최소차수 시스템행렬이 구성된다. Case I-a의 경우에서도 Case I과 같이 축약모델은 초기 모델의 동특성을 잘 보존하고 있었다(Table 3 참조). 최소차수 시스템 행렬에서 구한 모드 11개중 식 (24)에 이용된 모드 갯수에 따라 보정된 초기강성 결과 및 반복계산 횟수를 Table 4에 수록하였다. 식 (24)에서 축정모드를 7개 사용한 경우에 대해, 개선된 고유치들을 Table 3에 수록하였고, 개선 전 후 모델의 모드 형상을 Fig. 4 및 Fig. 5에 각각 수록하였다.

Case II-a의 경우에서도 경향은 Case I-a와 같으며, 최소차수 시스템 행렬에서 구한 모드 7개중 식 (24)에 이용된 모드 갯수에 따라 보정된 초기강성 결과 및 반복계산 횟수를 Table 4에 수록하였다.

(Table 3) Natural frequency(Hz) of Case I-a with a free-free condition

Mode No	Exact model	Initial model		Corrected model	
		A	B		
1	0.00046	0.4363	0.4363	0.4362	(-)
2	0.00054	0.4508	0.4508	0.4508	(-)
3	86.0	16.2	16.2	82.5	(4.2)
4	237.1	235.8	235.8	237.0	(0.0)
5	464.8	346.9	346.9	450.5	(3.1)
6	768.2	754.4	754.4	766.6	(0.2)
7	1147.3	951.1	951.1	1113.3	(3.0)
8	1602.2	1537.6	1537.6	1595.3	(0.4)
9	2133.1	1861.4	1861.4	2073.1	(2.8)
10	2740.4	2528.7	2528.7	2719.7	(0.8)
11	3424.5	3076.1	3076.1	3332.4	(2.7)

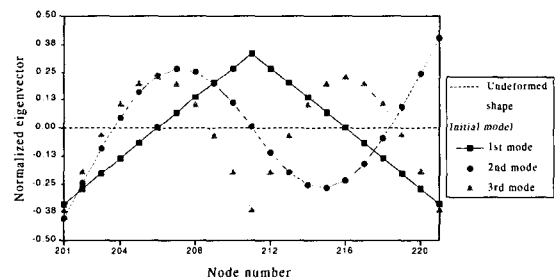
A: Unreduced model B: Present TAM

() : error percent, Eq. (28)

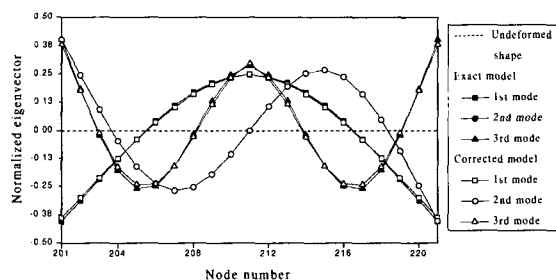
각 경계조건에서 구한 체결강성(Table 2와 Table 4 참조)들을 서로 다른 경계조건에서의 체결강성 값들로 대입하여 구한 고유진동수를 구한 결과, 전반적으로 5%이내의 오차를 보이고 있었다. 이러한 결과는 임의의 경계조건에서 구한 체결강성이 다른 경계조

(Table 4) Corrected stiffness of assumed springs in the free-free beam

Number of modes used in Eq.(24)	Case I-a		Case II-a	
	7	11	5	7
No. of Iterations	41	4	10	4
k_1	22.3	127.8	127.0	106.7
k_2	34129.7	5987.0	5477.3	7742.9



(Fig. 4) Mode shapes of the initial beam model with the free-free condition



(Fig. 5) Comparison of mode shapes between the exact and corrected model with the free-free condition

건에 대한 체결강성으로 적용할 수 있음을 알 수 있다. 이러한 결과는 규명하고자 하는 대상진동계에 대해, 모달시험의 경계조건 설정에 대한 융통성을 줄 수 있다.

4. 결 론

모달시험에서 측정되는 동특성은 해석모델의 자유도에 비해 훨씬 불충분한 정보를 갖고 있기 때문에 초기모델을 정확하게 개선하기 위해서는, 모달시험에서 측정된 모드를 가능하면 많이 활용해야 하고, 모달시험/해석간의 비교 시 사용되는 축약모델은 축약 전 모델에 대한 동특성을 보존해야 한다. 이를 위해 모달시험에서 모달센서 수 보다 더 많은 모드를 추출한 경우, 측정모드를 이용하여 최소차수 시스템모델을 구성하고, 초기 모델을 최소차수 시스템의 자유도로 축약시키는 SEREP-CB 축약방법을 제안하였다. 최종적으로, 최소차수 시스템과 축약모델을 직접 비교하여 초기모델을 개선할 수 있는 시스템 식별식을 제안하였다. 본 연구의 시스템 개선방법을 보 구조물에 적용한 결과 측정자유도의 위치 및 갯수에 관계없이 체결부의 강성을 규명할 수 있었고, 시스템 식별식 이용 시 측정모드를 많이 이용할수록 수렴속도는 빨라지고 있었다.

또한 본 연구의 시스템 식별식을 경계조건이 다른 보 구조물에 대해 적용하여 체결강성을 구한 결과, 구해진 체결강성들은 다른 경계조건에 대한 모달해석용 체결강성으로 사용할 수 있음을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Kabe, A. M., "Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data", AIAA Journal, Vol. 23, No. 9, 1985, pp 1431-1436.
2. Kabe, A. M., "Constrained Adjustment of Analytical Stiffness Matrices", SAE Transactions, Sec. 6, Vol. 94, 1985, pp. 6.825-6.837.
3. Berman, A., and Nagy, E. J., "Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data," AIAA Journal, Vol. 21, No.8, 1983, pp. 1168-1173.
4. Papadopoulos, M. and Garcia, E., "Improvement in Model Reduction Schemes Using the System Equivalent Reduction Expansion Process", AIAA Journal, Vol. 34, No. 10, 1996, pp. 2217-2219.
5. Guyan, R., J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, 1965, pp. 380.
6. Lim, T. W., "Submatrix Approach to Stiffness Matrix Correlation Using Modal Test Data," AIAA Journal, Vol. 28, No. 6, 1990, pp. 1123-113.
7. Shin, Young-Sug, and Lee, In, "Investigation on Equivalent System modelin gand Dynamic Characteristics Using Reduced Models", Accepted to be published in AIAA Journal, May, 1999.
8. O'Callahan, J. C., "A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model", Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Union College, Schenectady, NY, 1989, pp. 17-21.
9. O'Callahan, J. C., Avitabile, P., and Riemer, R., "System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)", "Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Union College, Schenectady, NY, 1989, pp. 29-37.
10. Alvin, K. F., Peterson, L. D. and Park, K. C., "Method for Determining Minimum Order Mass and Stiffness Matrices from Modal Test Data," AIAA Journal, Vol. 33, No. 1, 1995, pp. 128-135.

11. Craig, R. R., and Bampton, M. C., "Coupling of Substructures for Dynamic Analyses", AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, 1968, pp. 1313-1319.
12. Baruch, M., "Modal Data Are Insufficient for Identification of Both Mass and Stiffness Matrices", AIAA Journal Vol.35, No.11, 1997, pp 1797-1798.