

최소각 추적 방식을 이용한 직교적층평판에 대한 플러터 해석

Panel Flutter Analysis of Cross-Ply Composite Plate Utilizing Minimum Angle Tracking

김기언* 박흥석* 김현순*
Kim, Ki-Un, Park, Heung-Suk, Kim, Hyun-Soon

ABSTRACT

An alternative panel flutter approach utilizing minimum angle is presented. The minimum angle is the lowest value among the angles between modes i and j at a certain pressure condition. This method utilizes eigenvectors rather than eigenvalues. Cross-ply composite plates are considered in this study. A remarkable result of this investigation is that the angle always dropped gradually to zero for all presented examples

주요기술용어: Panel Flutter (패널플러터), Aeroelasticity (공탄성), Minimum Angle (최소각), Flutter Prediction (플러터예측), Composite (복합재료)

1. 머리말

패널플러터 해석에 널리 사용되는 방법은 고유치 추적 방식으로서, 복소수 고유치 발생 시점을 플러터 조건으로 판단한다. 이러한 해석 방법은 많은 문헌^(1,2,3,4)에서 소개되어져 있다. 최근에 Afolabi, Pitaparti와 Yang⁽⁵⁾은 ‘고유벡터간 각도 추적 방식’이라는 새로운 방법을 제시하였다. 이 방법은 ‘고유치’가 아닌 ‘고유벡터’가 사용된다는 특징을 갖고 있다. 이 새로운 방법은 특정 고유벡터간 각도를 계산하여 그 각도값이 0° 에 근접할 때를 플러터 조건으로 판단한다.

Afolabi 등은 이 새로운 방법의 타당성을 보이기 위

하여, 네 가지 예제를 제시하여 기존의 고유치 추적 방식과 비교하였다. Afolabi 등이 제시한 예 중에서, 복합재료 평판인 경우에만 특이한 조건 및 결과가 제시되었다. 즉, 다른 예와는 달리 2-3차 모우드가 각도 계산에 사용되었으며, 이때의 각도 곡선은 플러터 조건 직전에 급격히 감소하였다. 이러한 급격한 각도 변화는 플러터 조건에 대한 조기 예상을 힘들게 하는 특성이다. 또한, 각도 추적 방식이 독립적인 해석 방법이 되기 위해서는 고유치 추적 방식으로부터의 각도 계산용 모우드 차수 정보를 얻어서는 안 된다.

본 논문에서는 고유치 일치 유형^(7,8) 등을 감안하여 새로운 ‘최소각 추적 방식’을 제시하였다. 이 방법을 통하여 Afolabi 등이 제시하였던 각도 추적 방식의 한 가지 특이 현상인 ‘급격한 각도 변화 곡선’도 충분히

* 국방과학연구소

분석되었다. 최소각 추적 방식으로 얻어지는 각도 변화 곡선은 제시된 예에서 완만히 변화는 특성을 갖으며, 각도 계산용 모우드의 차수도 인위적으로 선정될 필요가 없다. 따라서, 최소각 추적 방식은 독자적인 해석 방법으로도 사용될 수 있으며, 완만한 각도 변화 특성을 통하여 필터 조건에 대한 조기 예상능력도 충분하다.

2. 고유벡터간 각도와 상사도

두 복소수 벡터 X 와 Y 간 내적은 앞의 복소수 벡터를 공액복소수로 바꾸어 계산된다⁹⁾. 이러한 변경을 통하여 복소수 벡터간 각도 코사인은 다음과 같이 표현된다.

$$\cos \Omega = \frac{\overline{X} \cdot Y}{\|\overline{X}\| \|Y\|} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{\sqrt{S_3 S_4}} \equiv S_{ij} \quad (1)$$

여기서,

$$S_1 = \sum_{i=1}^n [Re(X_i)Re(Y_i) + Im(X_i)Im(Y_i)]$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^n [Re(X_i)Im(Y_i) - Im(X_i)Re(Y_i)]$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^n \|X_i\|^2$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^n \|Y_i\|^2$$

이 식(1)는 기본적으로 Louw¹⁰⁾에 의해 제시된 내적 (scalar product)과 동일하며, \overline{X} 는 복소수 벡터 X 의 공액 복소수 벡터를 의미한다. 이 식을 상사도(Similarity) 관계식이라 하고, 기호로는 S_{ij} 로 표현하였다. 이 기호에서, 아래 첨자 i 와 j 는 모우드- i 와 모우드- j 를 각각 의미한다.

이러한 관계로부터, 두 벡터간 각도는 내적에 역 (inverse cosine)을 취하여 얻어질 수 있다. 즉, 두 벡터간 각도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_{ij} = \cos^{-1} \left[\frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \right] \quad \text{또는}$$

$$C_{ij} = \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{\sqrt{S_3 S_4}} \right] \quad (2)$$

이 식을 각도 코사인(Cosine) 관계식이라고, 기호로는 C_{ij} 로 표현하였다. 두 개의 서로 다른 모우드간 각도 계산에 사용하였다.

3. 고유벡터를 이용한 필터 해석

3.1 검토조건

해석에 사용된 평판은 Graphite/Epoxy로 적층 되었으며, 재질 특성은 다음의 표에 제시된 값을 기본값으로 사용하였다.

(표 1) 복합재료의 재질 특성

$E_1 = \beta E_l = \beta E_R$, $E_2 = E_R = 0.75 \text{Mpsi}$ $G_{12} = 0.375 \text{Mpsi}$, $\nu_{12} = 0.25$ $m_p = 2.588799 \times 10^{-4} \text{lb-sec}^2/\text{in}^4$

또한, ν_{12} 는 포아송비(Poisson's ratio)이다. 고려된 평판의 적층수는 8이며, 중립면에 대하여 대칭으로 직교적층(Cross-Ply)되었으며, 기호로는 $[(0/90)_2]_S$ 로 표현된다. 이 평판의 네 변은 모두 고정지지되었으며, 가로세로비가 1인 정사각형 형태이다. 강성비는 β 로 표현하였으며, $E_2 = E_R$ 을 기준값으로 선정하여 다

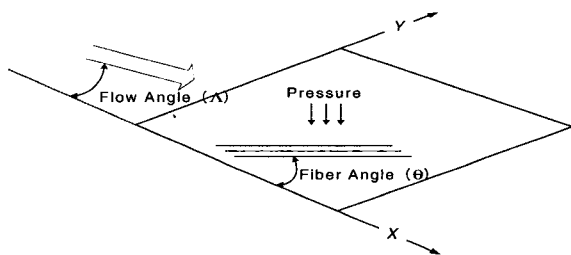
음과 같이 정의하였다.

$$\beta = E_1/E_2 \quad (3)$$

3.2 운동방정식

해석에 사용된 운동방정식은 참고문헌^[7]과 동일하므로 여기서는 주요 항목만 간략히 정리하였다. 복합재료 평판의 기하학적인 형상과 좌표계는 그림 1에 나타내었다. 적층각 θ 는 x-축 방향으로부터 y-축 방향으로의 회전방향을 '+'로 정의하였다. 이러한 평판의 x-방향 길이, y-방향 길이 및 x-방향 두께는 각각 L, B, h 이며 단위 면적 당 질량은 m_P 이다.

이러한 평판 윗면으로 밀도 ρ_a 인 공기가 x-축과 흐름각 Λ 를 이루면서 속도 U_0 (마하수 M_0)로 흐른다고 가정하였다. 이 흐름방향을 ζ -축이라 정의하였다.



(그림 1) Coordinate system of the panel

이 흐름에 의한 공기역학적 힘은 피스톤 이론에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta p(x, y, t) = \frac{2q_0}{\sqrt{M^2 - 1}} \times \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{U_0} \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (4)$$

여기서, $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \Lambda + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \Lambda$ 이다. 이러한 공기역학적 힘을 받는 평판에 대한 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$0 = \left[[K] + \frac{\phi}{n^3} - \frac{k}{n^4} [M] \right] \{ \bar{q} \} \quad (5)$$

식 (5)에서, k 와 ϕ 는 각각 무차원 고유치 및 무차원 동압으로서 다음과 같이 표현된다.

$$k = \frac{m_P L^4}{D_{11}} - \mu \frac{L^4}{D_{11}}, \quad \phi = \lambda \frac{L^3}{D_{11}}$$

식 (5)에서 $\{ \bar{q} \}$ 가 무용해가 아닌 해를 갖기 위하여 행렬식은 0이 되어야 한다. 즉,

$$\left| [K] + \frac{\phi}{n^3} - \frac{k}{n^4} [M] \right| = 0 \quad (6)$$

가 되어야 한다. 이 식을 통하여 무차원 고유치를 얻을 수 있으며, 이를 토대로 무차원 고유치에 상응하는 고유벡터를 구할 수 있다. 보다 자세한 유도과정과 각종 기호에 대한 정의는 참고자료^[7]에 나타나 있다.

3.3 고유벡터간 각도를 이용한 플러터 해석 : Afolabi 방식⁽⁵⁾

Afolabi가 최근에 제시한 '고유벡터간 각도 추적 방식'은 기존의 고유치를 사용하는 방식과는 달리 고유벡터간 각도를 플러터 조건 판단에 활용한다는 측면에서 새로운 방법이라 할 수 있다. 그러나, 각도 계산에 사용될 모우드의 차수 정보를 기존의 고유치 추적 방식에서 획득한다는 점과 복합재료 평판인 경우에만 급격히 변하는 각도 폭선이 나타나는 것은 추가적인

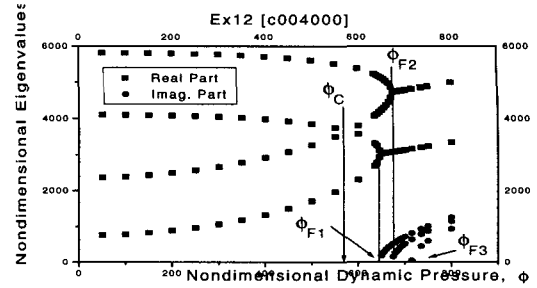
분석의 필요성을 남기게 되었다.

Afolabi의 각도 추적 방식에 대한 이해와 의문점을 분석하기 위하여 대표적인 두가지 예를 선정하였다. 정사각형 평판에서 흐름각조건에 따라 고유치 일치 유형은 고유치 교차가 있는 경우와 없는 경우로 나눌 수 있다. 고유치 교차가 있는 예는 '21-mode의 2방향으로 흐름이 있는 경우'이며, 고유치 교차가 없는 대표적인 경우는 '12-mode의 2방향으로 흐름이 있는 경우'이다^(7,8). 또한, Pidaparti⁽¹¹⁾도 '흐름각에 대한 적층각 효과'로 인하여 플러터에 이르는 고유치(또는 모드)가 달라질 수 있다고 하였으므로, 이 같은 예제의 선정은 타당한 것으로 볼 수 있다.

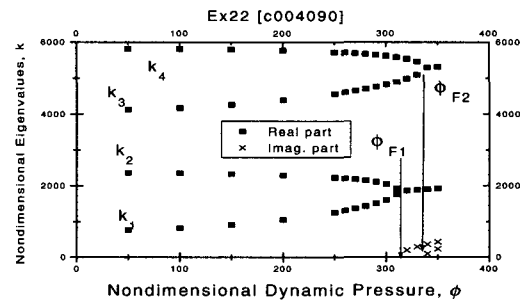
이러한 조건에 상응하는 흐름각 조건은 흐름각이 0°인 경우와 90°인 경우이며, 이들에 대한 고유치 변화 곡선을 그림 2와 4에 각각 나타내었다.

그림 2에서, ϕ_C 는 두 개의 고유치가 근접하다가 다시 멀어지는 동압을 의미하며, 플러터 조건(ϕ_F)과는 다른 것이다. 그림 2와 4를 보면, 플러터 발생(ϕ_F) 직전에 플러터에 이르는 mode의 차수는 모두 1-2차 mode임을 알 수 있다. 따라서, 각도 곡선은 두 경우 모두 1-2차 mode간 각도변화를 토대로 작성하였다. 그 결과는 그림 4와 6에 각각 나타내었다. 이들 그림 4, 6을 그림 2, 4와 비교해보면, 플러터 조건(ϕ_F)이 동일함을 알 수 있다. 즉, 각도 추적 방식으로도 Afolabi⁽⁶⁾가 제시한 바와 같이 플러터 조건을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

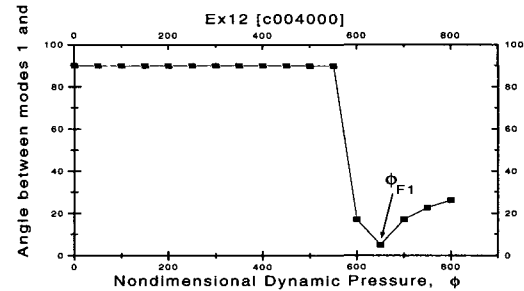
그림 4는 Afolabi가 제시한 복합재료 평판에 대한 결과와 거의 유사한 형태이다. 즉, 플러터 발생 지점 직전에서 급격한 각도 감소를 관찰할 수 있다. 그러나, 그림 5의 각도 변화 곡선은 그림 4 및 Afolabi가 제시한 복합재료 평판에 대한 각도 곡선과 다른 형태를 띄고 있으며, Afolabi가 제시한 다른 예(등방성 재료인 경우 및 복합재료 쉘인 경우)에서 볼 수 있었던 각도 변화 곡선과 유사하다



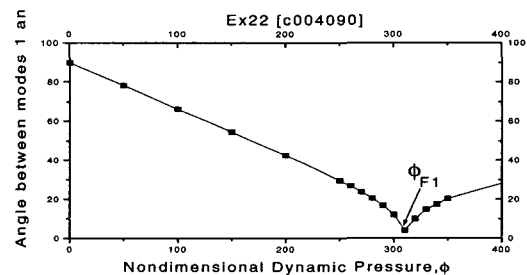
(그림 2) 고유치 변화 곡선(강성비 40, 흐름각 0°)



(그림 3) 고유치 변화곡선(강성비 40, 흐름각 90°)



(그림 4) 1-2차 모드간 각도 변화(강성비 40, 흐름각 0°)



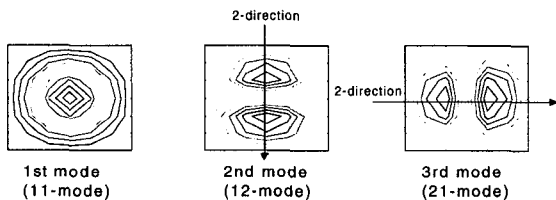
(그림 5) 1-2차 모드간 각도 변화(강성비 40, 흐름각 90°)

어느 경우가 보다 타당한지는 제시된 예가 부족하여 현 시점에서 판단하기는 곤란하다. 그러나, 그림 5는 “복합재료 평판인 경우에도 완만한 각도 감소 곡선이 얻어질 수 있다”는 가능성을 보여 준 의미 있는 그림이다.

또한, 이들 그림만으로는 어떤 형태의 각도 곡선이 보다 일반적인지를 판단할 수는 없다. 단, 재료나 패널의 형태에 관계없이 완만히 감소하는 각도 곡선이 얻어진다면 플러터 발생에 대한 조기 예측은 보다 용이하게 이루어 질 수 있다. 이러한 가능성은 고유치 교차 개념^(7,8)을 감안하여 다음 항에서 자세히 분석하였다.

3.4 고유치 교차

동일한 평판에 대하여 흐름각이 달라지면 고유치 일치 유형도 변하며, 특히, 흐름각이 21-mode의 2방향 부근일때 고유치 교차가 발생한다고 하였다^(7,8). 이같은 개념과의 연계성을 고찰하기 위하여, 고려된 평판의 고유 모드 형상을 그림 6에 나타내었다.

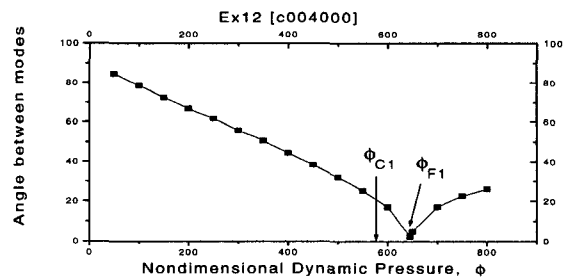


[그림 6] 직교적층평판의 모드 형상과 ij-mode

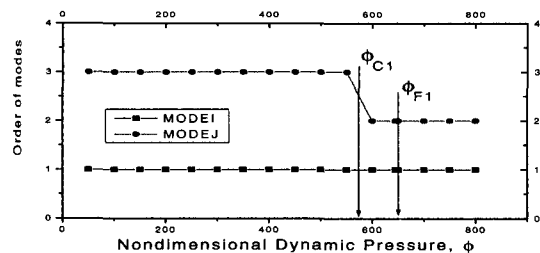
이 그림에서, 모드의 차수는 고유치 크기 순서에 따른 차수를 의미하며, 괄호속의 ‘ij-mode’ 형태의 표현과 2-방향은 참고자료-7의 정의에 따른 것이다. 그림 6에서, 12-mode의 2방향은 흐름각 90° 방향이며, 21-mode의 2방향은 흐름각 0° 방향임을 알 수 있다. 즉, ‘21-mode의 2방향 = 흐름각 0°’ 일 경우, 플러터에 이르는 모우드는 11-mode와 21-mode이다^(7,8). 이때, 11-mode는 1차 모우

드이고, 21-mode는 3차 모우드이므로 플러터에 이르는 과정에서 2차 모우드와 교차가 생기게 된다. 이처럼 교차가 있다는 것은 플러터에 이르는 과정에서 상응하는 모우드의 차수도 변함을 의미한다. 이 같은 모우드 교차는 참고문헌⁽⁷⁾의 그림 2-2에서 확인할 수 있다.

이 같은 모우드 형상 변화로부터, ‘흐름각이 0°로서 21-mode이 2방향일 경우(그림 2 및 7 참조)’에만 ‘21-mode가 플러터에 이르면서 플러터에 이르는 모우드의 차수가 변함’을 알 수 있었다. 따라서, 이러한 경우에 Afolabi가 제시한 각도 추적 방식을 적용하려면 ‘ ϕ_c 이하 구간에서는 1-3차 모우드간 각도를, $\phi_c < \phi$ 구간에서는 1-2차 모우드간 각도를’ 취할 필요가 있다. 이러한 차수 변경을 감안하면 그림 7과 같은 각도 변화 곡선을 얻을 수 있다. 이때, 동압 변화에 따른 모우드의 차수 변화는 그림 8에 나타내었다.



[그림 7] 차수변경이 가미된 각도변화곡선(강성비40, 흐름각0°)



[그림 8] 각도 곡선 도출에 사용된 모우드의 차수 변화

그림 7과 8로부터, 고유치 교차를 적절히 반영하면 $\phi < \phi_F$ 구간에서는 완만히 감소하고, $\phi > \phi_F$ 구간에서는 점진적으로 증가하는 각도 곡선을 얻을 수 있을 것을 알 수 있다. 결과적으로 복합재료의 경우에도 흐름각에 관계없이 완만히 변하는 각도 곡선이 얻어질 수 있는 것이다.

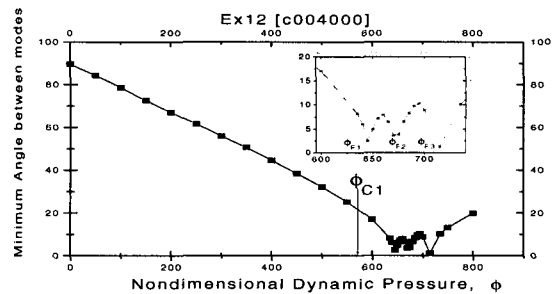
그러나, 현재까지 적용된 방법에서의 가장 근본적인 문제점은 차수 변경에서의 인위성이다. 21-mode 개념에 입각할 경우, 흐름각 조건에 따라서 플러터에 이르는 모드들의 차수는 쉽게 알 수 있으나, 고유치 교차점(ϕ_{F1})에 대한 정보는 해석을 통해서만 획득될 수 있는 것이다. 바꾸어 말하면, 고유치 교차점에 대한 사전 정보없이 완만히 감소하는 각도 곡선을 얻을 수 있다면 각도 추적을 통한 플러터 발생 예측은 원활히 이루어질 수 있는 것이다. 고유치 교차에 대한 사전 정보 없이 플러터 발생을 예측할 수 있는 방법은 다음 항에서 제시되었다.

3.5 최소각 추적 방식

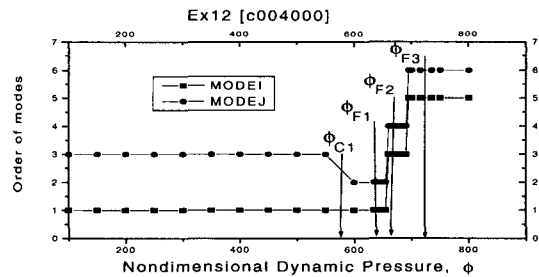
Dowell⁽³⁾은 패널플러터에 대하여 ‘The flutter mechanism is a convergence of natural frequencies with increasing velocity’라고 표현하였다. 여기서, 고유진동수와 고유벡터는 한 쌍을 이루는 것이므로 ‘The flutter mechanism is a convergence of natural frequencies and modes with increasing velocity’라는 표현이 가능하며 간략히 ‘Mode Coalescence’라고도 할 수 있다. 이러한 표현은 참고문헌⁽⁷⁾을 통해서도 확인할 수 있다. 즉, “Mode Coalescence”라는 표현은 ‘플러터에 이르는 두 모드는 동압이 증가하면서 서서히 유사해지며, 플러터 조건에서 두 모드의 형상은 동일해진다’는 개념이다. 이 개념에 따르면, 모드 간 각도 계산은 각각의 동압 조건에서 가장 상사도가 큰 모드들 간 각도를 추적하면 된다. 여

기서, ‘상사도가 가장 크다’는 것은 곧 ‘각도가 최소가 된다’는 의미이다. 따라서, 단순 각도 추적이 아니라 “최소각 추적”을 통하여 플러터 조건을 도출할 수도 있음을 의미한다.

이러한 가능성을 확인하기 위하여 앞서 고찰된 예에 적용하여 보았다. Afolabi와는 달리 최소각 조건을 추적하면 아래와 같은 그림이 얻어질 수 있었다



(그림 9) 최소각 변화 곡선(강성비 40, 흐름각 0°)



(그림 10) 최소각 계산시 획득된 모드 차수 변화

이 그림 9는 그림 7과 유사하나 획득 과정은 근본적인 차이가 있다. 즉, 그림 7은 모드 차수를 고유치 추적 방식 등을 통해 획득된 차수 변경 정보에 근거하여 인위적으로 결정하였으나, 그림 9는 최소각 추적 방식에 의하여 이러한 인위성 없이 도출된 각도 곡선이다. 이 그림에서 볼 수 있듯이, 최소각 변화 곡선은 고유치 교차가 없는 경우와 거의 동일한 형태임을 알 수 있다. 이때, 최소각 추적에 사용된 mode의 차수 변

화는 그림 10에 나타낸 바와 같이 ϕ_{C1} 를 전후로 자연스럽게 바뀌어 갈 수 있다. 즉, ϕ_{C1} 이전에는 1-3차 모우드가, ϕ_{C1} 이후부터 ϕ_F 직후까지는 1-2차 모우드가 최소각을 이루었음을 알 수 있다.

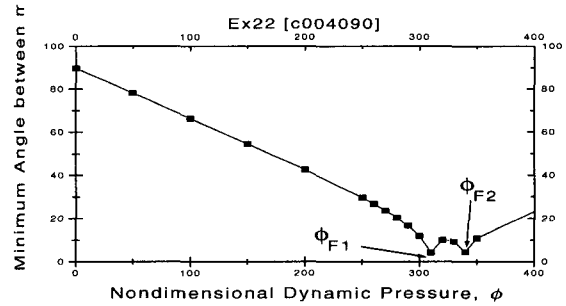
그림 7과 그림 9의 부분적인 차이는 $\phi > \phi_F$ 구간에서 나타난다. 즉, 이 구간에서 최소각에 사용된 모우드의 차수는 그림 10에서 볼 수 있듯이 3-4차, 5-6차로 변한다. 그 결과로 그림 9와 같은 각도 변화 곡선이 나타난 것이다.

이같은 최소각 추적 방식을 흐름각이 90° 인 경우에 적용하면 그림 11과 같은 곡선을 얻을 수 있다. 그림 12로부터 최소각 계산에 사용된 모우드의 차수는 대체로 1-2차 모우드이나, 플러터 발생 이후에서는 최소각을 이루는 모우드의 차수가 3-4로 바뀌고 있음을 볼 수 있다. 또한, 그림 11로부터 최소각도 이러한 차수 변경 구역에서 또 다시 각도가 감소 후 증가하는 현상을 볼 수 있다.

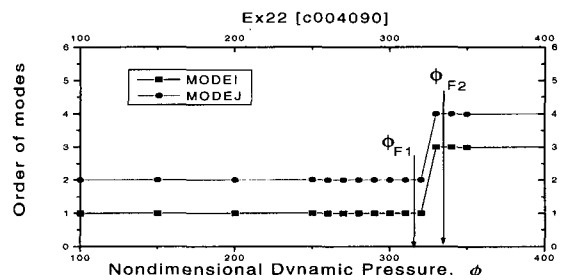
그림 3과 연계하여 살펴보면, 2차 하강점(ϕ_{F2})이 그림 3의 두번째 고유치 일치점(3-4차 고유치 일치)과 동일함을 알 수 있다. 즉, 플러터에 이르는 동안 고유치 교차가 없는 경우에도 2차 고유치 일치 조건을 얻게되어 최소각 추적 방식을 적용하면 단순 각도 추적 방식보다 많은 정보를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

이상의 고찰로부터, 최소각 추적 방식을 사용하면 직교적층된 복합재료 평판인 경우에도 인위성 없이 완만히 감소하는 각도 곡선이 얻어짐을 알 수 있었다. 또한, 흐름각 변화에 따라 플러터에 이르는 모우드의 차수가 변해도 각도 곡선은 언제나 유사한 형태로 얻어질 수 있으며, 2차 이상의 고유치 일치 조건(ϕ_{F2} , ϕ_{F3})도 고찰할 수 있다.

이들 예들을 통하여, 복합재료 평판인 경우에도 완만히 변하는 각도곡선이 얻어질 수 있음을 알 수 있었다.



(그림 11) 최소각 변화 곡선(강성비 40, 흐름각 0°)



(그림 12) 최소각 추적시 획득된 모우드 차수변화(강성비 40, 흐름각 90°)

이때, 얻어지는 플러터 조건(ϕ_{F1})은 고유치 추적 방식과 동일하였다.

특히, 최소각 추적 방식은 Afolabi의 각도 추적 방식과 비교하여 ‘고유치 추적 방식을 통한 각도 계산용 모우드의 사전 선정’ 과정이 없으므로 독자적인 해석 방법이 될 수 있는 것이다.

5. 맺음말

본 논문에서 제시된 최소각 추적방식을 적용한 해석 결과로부터 네 변이 고정지지되고 직교적층된 정사각형 평판에 대하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 각각의 동압 조건에서 모우드간 최소각을 추적하면, 고유치 추적 방식과 동일한 플러터 조건(ϕ_{F1})을 얻을 수 있으며, 플러터에 이르는 모우드의 차수도 확

인할 수 있다.

- $\phi < \phi_{F1}$ 구간에서, 동압이 증가하면 플러터에 이르는 두 mode간 각도는 점진적으로 감소한다.
- $\phi < \phi_{F1}$ 구간에서, 동압이 증가하면 플러터에 관계된 모우드간 각도는 증가하나, 2, 3차 고유치 일치(또는 모우드형상 일치) 조건 부근에서는 감소와 증가를 반복한다.

참 고 문 헌

1. Dowell, E.H., "Panel Flutter : A Review of Aeroelastic Stability of Plates and Shells", *AIAA Journal*, Vol. 28, No.3, 1970, pp. 385-399.
2. Fung, Y.C., "Some recent contributions to panel flutter research", *AIAA Journal*, Vol. 21, 1963, pp. 898-909.
3. Dowell, E. H., *A Modern Course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1989.
4. Dowell, E.H., *Aeroelasticity of Plates and Shells*, Noordhoff International, Leyden, The Netherlands, 1975.
5. Afolabi, D., Pidaparti, R.M.V., Yang, H.T., "Flutter Prediction Using an Eigenvector Orientation Approach", *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 1, 1998, pp. 69-74
6. Pidaparti, R.M.V., Afolabi, D., "The Role of Eigenvectors in Aeroelastic Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 193, No. 4, 1996, pp. 934-940.
7. 김기연 외 4명, "판넬플러터에서의 고유치 일치 유형", 한국항공우주학회지, 제22권, 제3호, 1994, pp. 32-45.
8. 김기연 외 4명, "판넬플러터에서 강성비와 고유치 일치 유형", 1994년 춘계 학술 발표회 논문집, 1994. 4.30, pp. 189-193.
9. Strang, G., *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York, 1980.
10. Louw H van Zyl, "Use of Eigenvectors in the Solution of the Flutter Equation", *J. Aircraft*, Vol. 30, No. 4, pp. 553-554.
11. Pidaparti, R.M.V., Yang, H.T., "Supersonic Flutter Analysis of Composite Plates and Shells", *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 6, 1993, pp. 1109-1117.