韓國經營科學會誌
第24卷 第1號
1999年 3月


# 일반한계 선형계획법에서의 원내부점-쌍대단체법과 쌍대내부점-원단체법*

임성묵** · 김우제*** · 박순달**

# Primal-Interior Dual-Simplex Method and Dual-Interior Primal-Simplex Method in the General bounded Linear Programming*

Sungmook Lim** · Wooje Kim*** · Soondal Park**

■ Abstract ■

In this paper, Primal-Interior Dual-Simplex method(PIDS) and Dual-Interior Primal-Simplex method(DIPS) are developed for the general bounded linear programming. Two methods were implemented and compared with other pricing techniques for the Netlib. linear programming problems. For the PIDS, it shows superior performance to both most nagative rule and dual steepest-edge method since it practically reduces degenerate iterations and has property to reduce the problem. For the DIPS, it requires less iterations and computational time than least reduced cost method, but it shows inferior performance to the dynamic primal steepest-edge method.

## 1. 서 론

선형계획법은 경영과학의 여러 가지 모형 중에서 가장 널리 사용되고 있다. 선형계획법은 모형이 명료하고 해법이 잘 개발되어 있으며 또한 다루기가 비교적 편리하다. 일반한계 선형계획 문제는 다음과 같은 형태를 갖는다[1].

$$\text{P}: \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & l \le x \le u \end{array} \tag{1.1}$$

선형계획법 문제의 해법은 여러 가지가 있다. 선

* 본 연구는 한국과학재단의 특정기초연구과제(과제번호 98-0200-07-01-2)의 지원을 받았음.
** 서울대학교 산업공학과
*** 대진대학교 산업공학과

형계획법 문제를 푸는 해법으로서 처음 제시된 방법은 1940년대에 G. B. Dantzig에 의해 개발된 단체법이다[2]. 그 후 많은 연구자들에 의해 단체법의 실용적인 구현과 개선이 이루어져서, 단체법은 선형계획법을 푸는 실용적인 해법으로서 그 자리를 굳히게 되었다.

원단체법은 원가능-쌍대비가능 기저해에서 출발하여 쌍대가능성을 만족시켜가는 해법이다. 따라서, 쌍대비가능인 비기저변수를 진입시켜 원목적함수를 개선시키고, 원가능성을 유지할 수 있도록 탈락변수를 선정하는 과정을 반복하게 된다. 현 기저해에서 쌍대비가능을 일으키는 비기저변수는 여러 개 존재하게 되는데, 이 중 어떤 비기저변수를 진입시킬 것인가에 따라 다양한 종류의 원단체법 변형이 가능하게 된다. 진입변수의 선택방법으로는 쌍대비가능성을 표현하는 할인가를 단순하게 이용하는 Dantzig의 최소할인가법[1], 실제로 개선가능한 목적함수값을 기준으로 삼는 최대개선법(Greatest Improvement rule)[2], 단위 길이의 능선방향 당 개선되는 목적함수값을 기준으로 진입변수를 선정하는 최급등법(Steepest-edge method)[9]등이 있다. 이 중에서 최급등법이 반복회수 면에서 아주 우수한 것으로 알려져 있다[4].

쌍대단체법은 쌍대가능-원비가능인 기저해로부터 출발하여 원가능성을 만족시켜 가는 해법이다. 따라서, 현재 원비가능인 기저변수를 탈락시키고 쌍대가능성을 유지할 수 있는 진입변수를 선택시키는 과정을 반복하여 원가능성을 이루어 간다. 쌍대문제 측면에서 보면 원비가능인 기저변수를 탈락시킴으로써 쌍대목적함수를 개선시킬 수 있게 된다. 원비가능을 일으키는 어떠한 기저변수라도 탈락됨으로써 쌍대목적함수를 개선시킬 수 있는데, 어떤 비가능 기저변수를 탈락변수로 선택할 것인지에 따라 쌍대단체법의 변형들이 여러 가지 존재하게 된다. 가장 기본적으로 생각할 수 있는 것은 원단체법의 최소할인가법과 비슷하게 비가능성이 최대인 기저변수를 탈락변수로 선택하는 것이다. 또 다른 탈락변수 선택방법으로 Goldfarb에 의해 개발된 쌍대최급등법(Dual steepest-edge method)이 있다[7]. 이 방법은 단위 길이의 능선방향 당 쌍대목적함수 개선폭을 계산하여 탈락변수를 선정하는 방법으로 아주 효율적이라고 알려져 있다. 또한, 원내부점 쌍대단체법(Primal-interior dual-simplex method, PIDS)은 쌍대단체법에서 탈락변수를 선정할 때 원내부점을 이용하는 방법으로 퇴화의 경우 효율성이 좋은 것으로 검증되었다[3]. 원내부점 쌍대단체법은 변수의 비음조건만 있는 선형계획법 문제에 대해 개발되었으며 그 효율성이 실험적으로 검증되었다. 현재까지는 PIDS의 개발과 그 효율성의 실험적 검증에 대한 연구[6], PIDS에서 필요한 원가능 내부해의 도출과 그 효율 향상을 위한 비퇴화 변환에 대한 연구[3], PIDS의 강성다항식 복잡도의 가능성에 대한 연구[5] 등이 이루어 졌다. 그러나, PIDS의 효율성을 다양한 다른 평가방법과 비교하는 연구는 수행되지 못하였다. 또한 일반적으로 대형의 실생활 문제는 문제 P와 같은 일반한계 선형계획법 문제 형태를 지니게 되는데 이에 적용할 수 있는 형태가 개발되지 못하였다.

따라서, 본 연구에서는 PIDS에 대한 기존의 연구를 바탕으로 하여 일반한계 문제에 적용할 수 있는 PIDS를 유도하고, PIDS의 개념을 원단체법에 적용하여 쌍대 내부점을 이용한 원단체법의 진입변수 결정방법을 유도한 후, 일반한계문제로 확장한다. 또한, 두 가지 평가전략을 구현한 실용 코드를 개발하여 대형 선형계획법문제에 적용하는 실험을 통해 두 가지 평가전략과 다른 평가전략들과의 비교를 수행한다.

## 2. 원내부점 쌍대단체법

원내부점 쌍대단체법(Primal-Interior Dual-Simplex method, PIDS)은 원내부점을 이용하여 탈락변수를 선정하는 쌍대단체법이다. 이 내부점 쌍대단체법은 현재의 쌍대가능기저에 대응되는 원비가능해와 원내부가능해를 연결하는 선분이 처음으로 만나는 원제약식은 현재의 원비가능 기저해

가 만족시키지 못하는 원제약식이 된다는 것을 이용하여 탈락변수를 선정한다. 이 방법을 일반한계 문제로 확장하기 위해 다음과 같은 단순상한 선형계획법 문제를 생각해 보자. 이는 모든 일반한계 문제가 기저의 확장없이 단순상한 문제로 변형될 수 있기 때문에 일반성을 잃지 않는다[1].

$$
\begin{array}{llll}
 & min & c^T x & \\
(P) & s.t. & Ax & = b \\
 & & x + s & = u \\
 & & x,\ s & \ge 0 \\
 & & & \\
 & max & b^T y + u^T z & \\
(D) & s.t. & A^T y + & z \le c \\
 & & & z \le 0
\end{array}
\qquad (2.1)
$$

우선, 하나의 $n$차원 벡터 $v$와 $\{1,2,\cdots,n\}$의 부분집합 $K=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$가 주어졌을 때 $K$에 대한 $v$의 제한(restriction)을 $v_K=\{v_{k_1},v_{k_2},\cdots,v_{k_m}\}$라고 하자.

쌍대가능기저 지수집합 $B$, 이에 대응하는 원비가능 기저해 $x$ 와 원내부가능해 $x^d$가 주어져 있다고 하자. 여기서 지수집합과 그 지수집합에 해당되는 열 부분행렬을 표현하는데 같은 기호를 사용하기로 한다. 예를 들어 기저 지수집합 $B$에 대응하는 기저행렬을 $B$로 표현하기로 한다. 상한 비기저 지수집합을 $U$, 하한 비기저 지수 집합을 $L$, 비기저 지수 집합을 $N$ 이라고 하면, 기저 변수, 상한 비기저변수, 하한 비기저변수는 각각 $x_B$, $x_U$, $x_L$이 되고, 상한 비기저변수에 대한 상한은 $u_U$가 된다. 또한, 기저변수, 상한 비기저변수, 하한 비기저변수의 상한 제약식에 대응하는 쌍대변수는 각각 $z_B$, $z_U$, $z_L$이 된다. 그러면 기저변수의 값은 $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Ux_U$이고, 상한 비기저변수 $x_U=u_U$이고, 하한 비기저변수 $x_L=0$이다. 원문제의 첫째 제약식 $Ax=b$에 대응하는 쌍대변수값은 $y=B^{-T}c_B$이고, 변수의 상한제약식에 대응되는 쌍대변수값들은 각각 $z_U=\bar{c}_U=c_U-A_N^TB^{-T}c_B$, $z_L=z_B=0$이다. 그리고, 원내부가능해 $x^d$에 대해 기저변수에 대응되는 부분을 $x_B^d$, 상한 비기저변수에 대응되는 부분을 $x_U^d$, 하한 비기저변수에 대응되는 부분을 $x_L^d$라고 하자. $x^d$는 원내부가능해이므로 $Ax^d=b$, $0<x^d<u$이 성립한다. 여기서, 현재의 원가능 내부해 $x^d$로 부터 원비가능 기저해 $x$로 향하는 방향은 원문제 (P)를 개선시키는 방향이 되는데 이는 다음 정리를 통해 알 수 있다.

**[정리 1]** $d=(x_B-x_B^d,\ -x_L^d,\ u_U-x_U^d)^T$는 (P)의 목적함수를 개선시키는 가능방향(Feasible direction)이다.

증명) 약쌍대정리(Weak duality theorem)에 의해 다음이 성립한다.

$$
\begin{array}{ll}
b^Ty+u_U^T\bar{c}_U & \le c^Tx^d \\
c_B^TB^{-1}b+u_U^T\bar{c}_U & \le c^Tx^d \\
c_B^T(x_B+B^{-1}Ux_U)+ & \\
\quad u_U^T(c_U-U^TB^{-T}c_B) & \le c^Tx^d
\end{array}
$$

$$
c_B^Tx_B+c_U^Tu_U\le c_B^Tx_B^d+c_L^Tx_L^d+c_U^Tx_U^d
$$

$$
c_B^T(x_B-x_B^d)+c_L^T(-x_L^d)+c_U^T(u_U-x_U^d)\le 0
$$

$$
c^T\begin{pmatrix} x_B-x_B^d \\ -x_L^d \\ u_U-x_U^d \end{pmatrix}\le 0
$$

따라서, $d=(x_B-x_B^d,\ -x_L^d,\ u_U-x_U^d)^T$는 (P)의 목적함수 개선방향이 될 수 있다. 또한, $Ad=0$이고, $x_d$가 원내부가능해이므로 $0\le x+\lambda d\le u$가 충분히 작은 $\lambda$에 대해 성립하므로 $d$는 가능방향도 된다. ■

한편, 쌍대가능기저 $B$가 최적기저가 아니라면, 이에 대응하는 기저해 $x$는 원비가능이다. 즉, 다음을 만족시키는 최대집합 $V$가 존재한다.

$$x_i<0 \quad or \quad x_i>u_i \qquad \text{for } i\in V$$

따라서, $\boldsymbol{x}_d$와 $\boldsymbol{x}$를 잇는 선분은 위와 같은 제약식이 이루는 초평면과 만나게 된다. 즉,

$$\{\boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_d,\ 0 \le \alpha \le 1\} \cap \{\boldsymbol{x} : x_i = 0,\ i \in V\} \ne \phi \quad or$$

$$\{\boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_d,\ 0 \le \alpha \le 1\} \cap \{\boldsymbol{x} : x_i = u_i,\ i \in V\} \ne \phi$$

이 성립한다. 그러므로 $V$에 속하는 원제약식에 대응하는 기저변수들은 현 기저에서 탈락함으로써 원목적함수를 개선시킬 수 있다. PIDS에서는 $\boldsymbol{x}^d$에서 $\boldsymbol{x}$로의 선분이 처음으로 만나는 원제약식에 해당하는 원문제 변수를 진입시킨다. 그 원제약식을 찾는 것은 원내부가능해 $\boldsymbol{x}^d$가 $\boldsymbol{d}$방향으로 가능성을 유지하면서 최대한 움직일 수 있는 폭을 구하는 것과 동일하다.

**[정리 2]** 다음 식 (2.2)와 같이 원가능 내부해 $\boldsymbol{x}^d$의 개선폭 $\lambda_{\min}$을 정할 때, $\boldsymbol{x}^d$의 가능성은 유지된다.

$$\begin{aligned} r &= argmin\{-x_i^d / d_i : d_i < 0\} \\ &= argmin\{-x_i^d / d_i : x_i < 0\} \\ s &= argmin\{(u_i - x_i^d) / d_i : d_i > 0\} \\ &= argmin\{(u_i - x_i^d) / d_i : x_i > u_i\} \qquad (2.2) \end{aligned}$$

$$\lambda_{\min}^1 = -\frac{x_r^d}{d_r},\quad \lambda_{\min}^2 = \frac{(u_s - x_s^d)}{d_s}$$

$$\lambda_{\min} = min\ \{\lambda_{\min}^1,\ \lambda_{\min}^2\}$$

(증명) 개선 방향 $\boldsymbol{d}$를 따라 $\lambda$만큼 이동했을 때, $\boldsymbol{x}^d$의 가능성이 유지되기 위해서는 다음 식을 만족해야 한다.

$$0 \le \overline{\boldsymbol{x}}^d = \boldsymbol{x}^d + \lambda\boldsymbol{d} \le \boldsymbol{u}$$

이 식을 전개하여 (2.2)를 얻어내는 것은 자명하다.

위의 **[정리 2]**을 통해 $x_r$또는 $x_s$가 탈락 가능하다는 것을 알 수 있다. 그리고, 쌍대내부가능해 $\boldsymbol{x}^d$는 다음과 같이 개선된다. 아래의 식에서 $\alpha$만큼 개선폭을 줄이는 것은 내부해를 유지하기 위해서이다.

$$\overline{\boldsymbol{x}}^d = \boldsymbol{x}^d + \alpha\lambda_{\min}\boldsymbol{d},\ 0 < \alpha < 1$$

이상의 원내부점 쌍대단체법의 알고리즘을 단계별로 설명하면 다음과 같다.

단계 0 : 초기화
초기 쌍대가능 기저 $B$, 원가능 내부점 $\boldsymbol{x}^d$
단계 1 : 개선 방향
원가능 내부점의 개선방향 $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_B^d, -\boldsymbol{x}_L^d, \boldsymbol{u}_U - \boldsymbol{x}_U^d)^T$의 도출
단계 2 : 탈락변수 결정
식 (2.2)를 통한 탈락변수의 결정
단계 3 : 기저수정 및 내부해 수정
$\boldsymbol{d}$에 따른 원가능 내부점의 개선과 선회연산을 통한 쌍대가능 기저해의 개선
단계 4 : 최적 판정
원가능성 검사를 통한 최적판정 후 최적이면 종료, 아니면 단계 1로 감

[그림 1] 원내부점 쌍대단체법의 절차

원내부점 쌍대단체법은 쌍대가능정점이외에 초기에 원내부가능해가 필요하게 되는데 초기원내부가능해는 다음과 같이 얻어낼 수 있다. 우선 다음과 같이 인공열을 추가한 문제를 만든다.

$$\begin{array}{lll} & min & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + Mx_{n+1} \\ (\mathrm{P1}) & s.t. & A\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^0)x_{n+1} = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u},\ x_{n+1} \ge 0 \end{array}$$

단, 여기서 $\boldsymbol{x}^0$는 문제 (P)의 상하한 한계를 만족하는 내부해
그러면 $(\boldsymbol{x},\ x_{n+1}) = (\boldsymbol{x}^0,\ 1)$는 초기원내부가능해가 될 수 있다. 그리고, 추가된 변수 $x_{n+1}$의 쌍대가능성을 알아보자. 변수 $x_{n+1}$의 할인가는 다

음과 같다.

$$\bar{c}_{n+1} = M - B^{-T} c_B (b - Ax^0) > 0$$

즉, 쌍대가능성이 유지된다.

한편, 추가된 인공변수인 $x_{n+1}$은 최적해를 가지는 문제에서는 진입되지 않는다는 것은 자명하므로, 실제 PIDS의 전산 구현에서는 대수 $M$을 사용하지 않아도 된다. 따라서 대수를 사용함에 따른 수치적 불안정은 없다[3].

일반한계 선형계획법 문제에 대한 원내부점 쌍대단체법의 특성은 [3]에서 제시한 특성을 확장하여 다음과 같이 나타내어 질 수 있다.

**[종정리 1]** 원내부점 쌍대단체법의 탈락변수 선택방법은 내부가능해에 대한 평면변환(Affine Transformation)후의 최소할인가법과 동일하다.
증명) 식 (2.2)로부터 다음이 유도된다.

$$\begin{aligned} r &= argmin\{-x_i^d / d_i : x_i < 0\} \\ &= argmin\{x_i^d / (x_i^d - x_i) : x_i < 0\} \\ &= argmin\{1 / (1 - x_i / x_i^d) : x_i < 0\} \\ &= argmin\{x_i / x_i^d : x_i < 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= argmin\{(u_i - x_i^d) / d_i : x_i > u_i\} \\ &= argmin\{(u_i - x_i^d) / (x_i - x_i^d) : x_i > u_i\} \\ &= argmin\{(u_i - x_i^d) / (u_i - x_i^d + x_i - u_i) \\ &\quad : x_i > u_i\} \\ &= argmin\{1 / (1 + (x_i - u_i) / (u_i - x_i^d)) \\ &\quad : x_i > u_i\} \\ &= argmin\{(u_i - x_i) / (u_i - x_i^d) : x_i > u_i\} \end{aligned}$$

위 식을 통해 원내부점 쌍대단체법은 현재의 내부가능해에 대해 위 식의 $x_i^d$ 와 $u_i - x_i^d$ 를 상수($he$, $0 < h < u_i \ \forall i$)로 평면변환 후 최소할인가법을 사용하여 탈락변수를 선정하는 것과 동일하다는 것을 알 수 있다. ■

**[종정리 2]** 모든 원가능해에서 $x_i$가 $0 < x_i < u_i$를 만족할 때, 원내부점 쌍대단체법에서는 $x_i$가 한번 진입된 후에 다시 탈락되지 않는다
증명) 식 (2.2)를 생각해 보자. 그러면 $0 \le \lambda \le \lambda_{\min}$에 대해 $x(\lambda) = x^d + \lambda(x - x^d)$는 원가능해이다. 그리고 탈락변수를 $x_r$이라고 하면 $x(\lambda_{\min})_r = 0$ 또는 $x(\lambda_{\min})_r = u_r$이다. 그런데, 모든 원가능해에 대해 $0 < x_i < u_i$이므로 $x_i$는 탈락되지 않는다. ■

위 **[종정리 2]**는 원내부점 쌍대단체법이 가지는 문제 축소효과를 설명한다.

## 3. 쌍대내부점 원단체법

앞에서 설명하였던 원내부점 쌍대단체법의 개념을 원단체법에도 적절히 변형하여 적용할 수 있다. 즉, 쌍대내부점 원단체법(Dual-Interior Primal-Simplex, DIPS)은 쌍대내부점을 이용하여 진입변수를 선정하는 원단체법이 된다. 쌍대내부점을 이용하여 진입변수를 선정하는 방법에서는 현재의 원가능정점에 대응되는 쌍대비가능해와 쌍대내부가능해를 연결하는 선분이 처음으로 만나는 쌍대제약식은 현재의 원가능해가 만족시키지 못하는 쌍대제약식이 된다는 것을 이용하여 진입변수를 선정한다. 쌍대내부점을 이용하여 진입변수를 선정하는 방법을 일반한계문제에서 유도해 보면 다음과 같다.

식 (2.1)의 단순상한 선형계획법 문제 (P)를 다시 생각해 보자. (P)문제의 원가능 쌍대비가능기저 $B$가 주어져 있고, 이에 대응되는 쌍대비가능해가 $y$, $z$라고 하자. 또한 (D)문제의 내부가능해 $y^d$, $z^d$가 주어져 있다고 하자. 그러면 기저변수의 상한을 $u_B$라고 할 때 다음이 성립한다.

$$0 \le B^{-1} b - B^{-1} N x_N \le u_B,$$
$$A^T y^d + z^d < c, \quad z^d < 0$$
$$y = B^{-T} c_B, \quad z_B = 0, \quad z_U = \bar{c}_U, \quad z_L = 0$$

그리고, 하한 비기저변수와 상한 비기저변수에 대한 상한을 각각 $\boldsymbol{u}_L, \boldsymbol{u}_U$이라고 하고, 기저변수의 상한제약에 대한 쌍대변수값과 하한 비기저변수의 상한제약에 대한 쌍대변수값과 상한 비기저변수의 상한제약에 대한 쌍대변수값을 각각 $\boldsymbol{z}^d_B$, $\boldsymbol{z}^d_L$, $\boldsymbol{z}^d_U$ 라고 하고, 상한 비기저변수에 대한 할인가와 하한 비기저변수에 대한 할인가를 각각 $\overline{\boldsymbol{c}}_U$, $\overline{\boldsymbol{c}}_L$라고 하자. 그러면 현재의 쌍대가능 내부해로부터 쌍대 비가능기저해로의 방향은 쌍대가능 내부해의 가능 개선 방향이 된다는 것을 다음 정리로부터 알 수 있다.

**[정리 3]** $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^d,\ -\boldsymbol{z}^d_B,\ -\boldsymbol{z}^d_L,\ \overline{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}^d_U)$는 (D)의 가능개선방향이 된다.

(증명) 현재의 원가능기저해와 쌍대내부가능해에 대해 약쌍대정리(Weak duality theorem)에 의해 다음이성립한다.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^d+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{z}^d \le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}
&= \boldsymbol{c}^T_B\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{c}^T_N\boldsymbol{x}_N\\
&= \boldsymbol{c}^T_B(B^{-1}\boldsymbol{b}-B^{-1}N\boldsymbol{x}_N)+\boldsymbol{c}^T_N\boldsymbol{x}_N\\
&= \boldsymbol{c}^T_B B^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}^T_N-\boldsymbol{c}^T_B B^{-1}N)\boldsymbol{x}_N\\
&= \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}+\overline{\boldsymbol{c}}^T_N\boldsymbol{x}_N \quad (\boldsymbol{y}=B^{-T}\boldsymbol{c}_B)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^d+\boldsymbol{u}^T_B\boldsymbol{z}^d_B+\boldsymbol{u}^T_U\boldsymbol{z}^d_U+\boldsymbol{u}^T_L\boldsymbol{z}^d_L \le \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{u}^T_U\overline{\boldsymbol{c}}_U$$

$$\boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^d)+\boldsymbol{u}^T_B(-\boldsymbol{z}^d_B)+\boldsymbol{u}^T_L(-\boldsymbol{z}^d_L)+\boldsymbol{u}^T_U(\overline{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}^d_U)\ge 0$$

$$\boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^d)+\boldsymbol{u}^T\begin{pmatrix}-\boldsymbol{z}^d_B\\ -\boldsymbol{z}^d_L\\ \overline{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}^d_U\end{pmatrix}\ge 0$$

따라서 $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^d,\ -\boldsymbol{z}^d_B,\ -\boldsymbol{z}^d_L,\ \overline{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}^d_L)$는 (D)의 목적함수 개선방향이 될 수 있다. 또한, $\boldsymbol{y}^d$, $\boldsymbol{z}^d$가 쌍대내부가능해이므로

$$A^T(\boldsymbol{y}^d+\lambda_y(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^d))+$$

$$(\boldsymbol{z}^d+\lambda_z\begin{pmatrix}-\boldsymbol{z}^d_B\\ -\boldsymbol{z}^d_L\\ \overline{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}^d_U\end{pmatrix})\le \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{z}^d+\lambda_z\begin{pmatrix}-\boldsymbol{z}^d_B\\ -\boldsymbol{z}^d_L\\ \overline{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}^d_U\end{pmatrix}\le 0$$

가 충분히 작은 $\lambda_y$, $\lambda_z$에 대해 성립한다. 따라서 $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^d,\ -\boldsymbol{z}^d_B,\ -\boldsymbol{z}^d_L,\ \overline{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}^d_L)$는 (D)의 가능방향이 된다. ■

한편, 원가능기저 $B$가 최적기저가 아니라면 $(\boldsymbol{y},\ 0,\ 0,\ \overline{\boldsymbol{c}}_U)$는 쌍대비가능이다. 즉, 다음을 만족시키는 최대집합 $V$가 존재한다.

$$A^T_i\boldsymbol{y}+z_i > c_i \ \ or\ \ z_i > 0 \ \ \text{for}\ \ i\in V$$

이다. 따라서, $\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{y}^d,\ \boldsymbol{z}^d)$와 $\boldsymbol{y}'=(\boldsymbol{y},\ 0,\ 0,\ \overline{\boldsymbol{c}}_U)$를 잇는 선분은 위와 같은 제약식의 초평면과 만나게 된다. 즉,

$$\{\boldsymbol{w}:\ \boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{y}'+(1-\alpha)\boldsymbol{d}\ ,\ 0\le\alpha\le1\}\ \cap$$

$$\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}:\ A^T_i\boldsymbol{y}+z_i=c_i\ ,i\in V\}\ne\phi$$

또는,

$$\{\boldsymbol{w}:\ \boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{y}'+(1-\alpha)\boldsymbol{d}\ ,\ 0\le\alpha\le1\}\ \cap$$

$$\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}:\ z_i=0\ ,i\in V\}\ne\phi$$

이 성립한다. 그러므로 $V$에 속하는 쌍대제약식에 대응하는 원문제의 변수들은 현기저에 진입함으로써 원목적함수를 개선시킬 수 있다. PSDI에서는 $\boldsymbol{d}$에서 $\boldsymbol{y}'$로의 선분이 처음으로 만나는 쌍대제약식에 해당하는 원문제 변수를 진입시킨다. 그 쌍대제약식을 찾는 것은 쌍대내부가능해 $\boldsymbol{d}$가 $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^d,\ -\boldsymbol{z}^d_B,\ -\boldsymbol{z}^d_L,\ \overline{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}^d_U)$방향으로 가능성을 유

지하면서 최대한 움직일 수 있는 폭을 구하는 것과 동일하다.

**[정리 4]** 다음 식 (3.1)와 같이 쌍대가능 내부해 $\boldsymbol{d}$의 개선폭 $\lambda_{\min}$을 정할 때, $\boldsymbol{d}$의 가능성은 유지된다.

$$\boldsymbol{w}^y = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^d,$$

$$\boldsymbol{w}^z = (-\boldsymbol{z}_B^d,\ -\boldsymbol{z}_L^d,\ \bar{\boldsymbol{c}}_U - \boldsymbol{z}_U^d)$$

$$r = argmin[\frac{c_i - A_i^T \boldsymbol{y}^d - z_i^d}{A_i^T \boldsymbol{w}^y + w_i^z} : A_i^T \boldsymbol{w}^y + w_i^z > 0]$$

$$= argmin[\ \frac{c_i - A_i^T \boldsymbol{y}^d - z_i^d}{A_i^T \boldsymbol{w}^y + w_i^z} : \bar{c}_i < 0,\ x_i \text{ 는 하한 비기저변수}]$$

$$s = argmin[\frac{-z_i^d}{w_i^z} : w_i^z > 0]$$

$$= argmin[\ \frac{-z_i^d}{w_i^z} : \bar{c}_i > 0,\ x_i \text{ 는 상한 비기저변수}]$$

$$\lambda_{\min}^1 = \frac{c_r - A_r{}^T \boldsymbol{y}^d - z_r^d}{A_r{}^T \boldsymbol{w}^y + w_r^z},$$

$$\lambda_{\min}^2 = \frac{-z_s^z}{w_s^z}$$

$$\lambda_{\min} = min\ \{\lambda_{\min}^1,\ \lambda_{\min}^2\} \tag{3.1}$$

(증명) **[정리 3]**에서 밝힌 개선 방향 $(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{d})$을 따라 $\lambda$만큼 $\boldsymbol{d}$를 개선할 때 새로운 쌍대내부해 $\bar{\boldsymbol{d}}$가 쌍대제약식을 만족시키기 위해서는 다음 식을 만족시켜야 한다.

$$\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{d} + \lambda(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{d})$$

$$A_i^T \bar{\boldsymbol{y}}^d + \bar{z}_i^d \le c_i, \text{ and } \bar{\boldsymbol{z}}^d \le 0 \quad \forall i$$

위 식을 전개하면 (3.1)이 유도된다는 것은 자명하다.

위의 정리를 통해 $\boldsymbol{x}_r$또는 $\boldsymbol{x}_s$가 진입가능하다는 것을 알 수 있다. 그리고, 쌍대내부가능해 $\boldsymbol{d}$는 다음 같이 개선된다.

$$\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{d} + \alpha\lambda_{\min}(\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{d}),\ 0 < \alpha < 1$$

위 식에서 $\alpha$만큼 개선폭을 줄이는 것은 내부해를 유지하기 위해서이다.

초기쌍대내부가능해는 다음과 같이 얻어낼 수 있다. 우선 $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{y}^d, \boldsymbol{z}^d) = (\boldsymbol{y}_0^d, \boldsymbol{z}_0^d)$, $\boldsymbol{z}_0^d < 0$ 라고 임의의 쌍대해를 구한다. 그런 후,

$$w_i = c_i - A_i^T \boldsymbol{y}_0^d - (\boldsymbol{z}_0^d)_i$$

를 계산하여 $w_i > 0,\ \forall i$ 이면 $(\boldsymbol{y}_0^d, \boldsymbol{z}_0^d)$가 초기쌍대내부가능해가 된다. 그렇지 않으면 다음과 같은 인공행 $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \le M$과, 인공행의 여유변수 $x_{n+1} (\ge 0)$을 추가하는 과정을 거쳐 초기쌍대내부가능해를 구한다.

$$w_r = min\{w_i\},\ \tilde{\boldsymbol{y}}_0^d = (\boldsymbol{y}_0^d, -1),$$

$$(\boldsymbol{a}^T)_i = -w_r + 1,\ b_{m+1} = M$$

$$\tilde{\boldsymbol{d}} = (\tilde{\boldsymbol{y}}_0^d, \boldsymbol{z}_0^d)^T,\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \boldsymbol{a}^T & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ M \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{c}, 0)$$

그러면 $\tilde{\boldsymbol{d}} = (\tilde{\boldsymbol{y}}_0^d, \boldsymbol{z}_0^d)^T$는 다음과 같이 쌍대내부가능해가 된다.

$$\tilde{c}_i - \tilde{A}_i{}^T \tilde{\boldsymbol{y}}_0^d - (\boldsymbol{z}_0^d)_i = w_i - w_r + 1 > 0$$

한편, 인공행의 추가로 인해 원가능기저 $B$는 다음과 같이 확장된다.

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ \boldsymbol{a}^T & 1 \end{bmatrix},\ \tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -\boldsymbol{a}^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

그러면 원기저해 $\boldsymbol{x}_B = \tilde{B}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}$는 다음과 같이 원가능해가 된다.

$$x_B = \tilde{B}^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -a^T B^{-1} b + M \end{pmatrix},$$

$$0 \le x_B \le u_B$$

한편, 추가된 인공행의 기저변수인 $x_{n+1}$은 최적해를 가지는 문제에서는 탈락되지 않는다는 것은 자명하므로, 실제 PSDI의 전산 구현에서는 대수 $M$을 사용하지 않아도 된다. 따라서 대수를 사용함에 따른 수치적 불안정은 없다.

쌍대내부점 원단체법의 성질은 다음의 정리들에 의해 설명될 수 있다.

**[종정리 3]** 쌍대내부점 원단체법의 진입변수 선택방법은 내부가능해에 대한 평면변환(Affine Transformation)후의 최소할인가법과 동일하다.
증명) 식 (3.1)로부터 다음이 유도된다.

$$\begin{aligned} r &= argmin[\frac{c_i - A_i^T y^d - z_i^d}{A_i^T w^y + w_i^z} \\ &\quad : \bar{c}_i < 0,\ x_i \text{는 하한 비기저변수}] \\ &= argmin[\frac{c_i - A_i^T y^d - z_i^d}{A_i^T y - A_i^T y^d + w_i^z} \\ &\quad : \bar{c}_i < 0,\ x_i \text{는 하한 비기저변수}] \\ &= argmin[\frac{c_i - A_i^T y^d - z_i^d}{c_i - A_i^T y^d - z_i^d + A_i^T y - c_i + z_i^d + w_i^z} \\ &\quad : \bar{c}_i < 0,\ x_i \text{ 는 하한 비기저변수}] \\ &= argmin[\frac{\bar{c}_i - z_i^d - w_i^z}{c_i - A_i^T y^d - z_i^d} \\ &\quad : \bar{c}_i < 0,\ x_i \text{ 는 하한 비기저변수}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= argmin[\frac{-z_i^d}{w_i^z} \\ &\quad : \bar{c}_i > 0,\ x_i \text{ 는 상한 비기저변수}] \\ &= argmin[\frac{z_i^d}{(z_i^d - \bar{c}_i)} \\ &\quad : \bar{c}_i > 0,\ x_i \text{ 는 상한 비기저변수}] \\ &= argmin[\frac{\bar{c}_i}{z_i^d} \\ &\quad : \bar{c}_i > 0,\ x_i \text{ 는 상한 비기저변수}] \end{aligned}$$

위 식을 통해 원내부점 쌍대단체법은 현재의 내부가능해에 대한 적절한 평면변환 후 최소할인가법을 사용하여 진입변수를 선정하는 것과 동일하다는 것을 알 수 있다. ■

**[종정리 4]** 모든 쌍대가능해에서 $A_i^T y + z_i < c_i$, $z_i < 0$가 만족될 때, 쌍대내부점 원단체법에서는 $x_i$가 한번 탈락된 후에 다시 진입되지 않는다.
증명) 식 (3.1)를 생각해 보자. 그러면 $0 \le \lambda \le \lambda_{\min}$에 대해 $d(\lambda) = d + \lambda(y' - d)$는 쌍대가능해이다. 그리고 진입변수를 $x_r$이라고 하면 $d(\lambda_{\min})$는 $A_r^T y + z_r = c_r$ 또는 $z_r = 0$를 만족한다. 그런데, 모든 쌍대가능해에 대해 $A_i^T y + z_i < c_i$, $z_i < 0$이므로 $x_i$는 진입되지 않는다. ■

**[종정리 5]** 쌍대가능해 집합을 $K = \{y, z : A^T y + z \le c,\ z \le 0\}$, 이라 하고 쌍대가능해 중에서 $A_i^T y + z_i = c_i$ 또는 $z_i = 0$이 되는 집합을 다음과 같이 정의되는 $K_i$라고 하자.

$$K_i = \{y, z : A^T y + z \le c,\ z \le 0,\ A_i^T y + z_i = c_i \text{ 또는 } z_i = 0\}$$

그러면, $b^T d_y + u^T d_z \ge b^T y^*(K_i) + u^T z^*(K_i) = max\{b^T y + u^T z : (y, z) \in K_i\}$라면 변수 $x_i$는 한번 탈락된 후에 진입하지 않는다.
증명) 만약 $x_i$가 진입한다고 하자. 그리고 $d(\lambda) = d + \lambda(y' - d)$, $(0 < \lambda \le \lambda_{\min})$라고 하면, $d(\lambda_{\min})$에 대해 $A_i^T y + z_i = c_i$ 또는 $z_i = 0$이므로 $d(\lambda_{\min}) \in K_i$이다. 그런데, $d(\lambda_{\min})$에 대한 쌍대목적함수값을 $k$라고 할 때, $b^T d_y + u^T d_z < k \le b^T y^*(K_i) + u^T z^*(K_i)$이므로 가정에 모순된다. ■

위 [종정리 4]와 [종정리 5]는 쌍대내부점 원단

체법이 가지는 문제 축소효과를 설명한다.

이상의 쌍대내부점 원단체법을 단계별로 설명하면 다음과 같다.

단계 0 : 초기화
초기 원가능 기저 $B$, 쌍대가능 내부점 $\boldsymbol{y}^d$, $\boldsymbol{z}^d$
단계 1 : 개선 방향
쌍대가능 내부점의 개선방향 ($\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^d$, $-\boldsymbol{z}_B^d$, $-\boldsymbol{z}_L^d$, $\bar{\boldsymbol{c}}_U-\boldsymbol{z}_L^d$)의 도출
단계 2 : 진입변수 결정
식 (3.1)를 통한 진입변수의 결정
단계 3 : 기저수정 및 내부해 개선
원가능 내부점의 개선과 선회연산을 통한 원가능 기저해의 개선
단계 4 : 최적 판정
쌍대가능성 검사를 통한 최적판정 후 최적이면 종료, 아니면 단계 1로 감

[그림 2] 쌍대내부점 원단체법의 절차

# 4. 실험을 통한 분석

현재까지 알려진 진입변수 선택방법 중에서 비교적 효율적으라고 알려진 방법으로는 최급등법(Steepest-edge simplex method)이 있다. 이 방법의 장점은 단체법의 반복회수를 크게 줄인다는 것이고, 단점은 진입변수를 선정하기 위한 계산량이 과다하다는 것이다. 그래서 이 방법을 근사적으로 구현하는 여러가지 방법들이 개발되어 그 성능이 실험적으로 검증되었다[7]. 여러가지 평가방법을 비교할 때 비교기준으로 삼을 수 있는 것 들이 여러 가지 있겠으나 본 논문에서는 두가지 기준을 사용하기로 한다. 즉, 진입변수나 탈락변수를 선정하기 위해 사용되는 계산량과 단체법의 반복회수를 통해 알 수 있는 진입, 탈락변수 선택의 우수성이 기준이 된다.

우선, 원내부점 쌍대단체법의 효율성을 검증하기 위해서 쌍대 최급등법을 구현하여 비교대상으로 삼았다. 쌍대 최급등법의 경우에는 근사적으로 구현하는 것보다 원래의 개념을 그대로 구현하는 것이 좀 더 효율적이라고 판명되어 근사 방법을 적용하지 않았다. 또 하나의 비교대상으로는 쌍대단체법에서 전통적으로 사용되어 왔던 최대비가능법이다. 이 방법은 가장 비가능이 심한 기저변수를 탈락시키는 방법으로 아직도 여러 단체법 프로그램에서 사용되고 있다. 그리고, 계산상의 효율을 위해 부분, 다종평가방법이 적용되고 있다. 따라서, 본 연구에서도 부분, 다종평가방법을 적용하여 실험을 수행하였다. 반면, 원내부점 쌍대단체법의 경우 해법상의 특징 때문에, 쌍대 최급등법의 경우 전체적인 성능 때문에 완전평가(full pricing)을 구현하여 실험하였다.

원내부점 쌍대단체법의 계산상 특징을 살펴보면, 탈락 변수를 선정하기 위해서 최대비가능법과 비슷하게 별도의 부가적 연산없이 식 (2.2)와 같은 일정 값의 비교연산 만을 필요로 한다는 것이다. 이것은 쌍대 최급등법에서 탈락변수를 선정하기 위해 필요로 하는 많은 부가연산을 고려할 때, 큰 이점으로 작용할 수 있다. 또한, [종정리 2]에 의한 문제 축소효과, 퇴화방지 효과 등이 최대비가능법에 비해 장점으로 작용한다. 아래의 <표 1>은 Netlib.문제[8]를 대상으로 하여 위 세가지 탈락변수 선정방법을 비교 실험한 결과이다.

이 실험 결과를 분석해 보면, 원내부점 쌍대단체법은 쌍대 최급등법에 비해 단체법 반복회수는 늘어난다. 하지만, 한 반복 당 계산량이 쌍대 최급등법에 비해 상당히 적기 때문에 전체적인 수행도는 쌍대 최급등법에 비해 약 10%정도 향상되는 것을 알 수 있다. 즉, 좀 더 나은 탈락변수를 선정한다는 측면에서는 쌍대 최급등법이 우수하지만 계산량으로 볼 때는 원내부점 쌍대단체법이 월등히 우수하여 반복회수의 증가를 보상했다고 볼 수 있다.

또한, 쌍대 최급등법은 대부분의 문제에서 최대비가능법 보다 우수한 성능을 나타내고 있는데 이는 부분, 다종평가방법을 적용하지 못한다는 이유로 원내부점 쌍대단체법의 계산량이 최대비가능법

〈표 1〉 원내부점 쌍대단체법 구현결과

| 문 제 | | | 최대비가능법 | | 쌍대 최급등법 | | 원내부점 쌍대단체법 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 이 름 | 행 | 열 | 수행 횟수 | 수행 시간 | 수행 횟수 | 수행 시간 | 수행 횟수 | 수행 시간 |
| pilot | 1442 | 3652 | 14916 | 532.74 | 5854 | 1134.89 | 7145 | 389.21 |
| finnis | 498 | 614 | 831 | 0.84 | 324 | 0.73 | 389 | 0.73 |
| agg3 | 517 | 302 | 222 | 0.61 | 188 | 0.64 | 193 | 0.51 |
| pilotwe | 723 | 2789 | 11932 | 73.62 | 3828 | 77.78 | 5485 | 50.17 |
| scfxm2 | 661 | 914 | 714 | 1.51 | 510 | 1.90 | 778 | 2.21 |
| bnl2 | 2325 | 3489 | 6461 | 31.34 | 1723 | 24.69 | 1999 | 18.84 |
| perold | 626 | 1376 | 4100 | 19.94 | 1615 | 13.22 | 2328 | 16.98 |
| cycle | 1904 | 2857 | 2002 | 13.85 | 1312 | 14.54 | 1312 | 11.70 |
| degen3 | 1504 | 1818 | 5717 | 87.40 | 1913 | 36.74 | 2897 | 34.77 |
| pilot4 | 441 | 1000 | 2814 | 10.21 | 1517 | 8.84 | 1185 | 6.20 |
| nesm | 663 | 2923 | 3726 | 19.22 | 4157 | 26.81 | 2932 | 15.89 |
| 25fv47 | 822 | 1571 | 6523 | 37.34 | 2642 | 21.48 | 2908 | 19.41 |
| ship12l | 1152 | 5427 | 972 | 7.12 | 902 | 8.17 | 809 | 7.17 |
| woodw | 1099 | 8405 | 2008 | 22.12 | 2701 | 32.10 | 1624 | 19.50 |
| pilotwe | 723 | 2789 | 14199 | 78.12 | 3828 | 54.69 | 2573 | 24.72 |
| seba | 516 | 1028 | 208 | 0.41 | 116 | 0.50 | 124 | 0.38 |
| stocfor2 | 2158 | 2031 | 914 | 9.70 | 782 | 10.00 | 956 | 7.64 |
| stair | 357 | 467 | 303 | 1.48 | 287 | 1.66 | 216 | 1.03 |
| capri | 272 | 353 | 256 | 0.37 | 266 | 0.47 | 249 | 0.35 |

(실험 환경 : Sun Ultra Sparc, GCC v2.7 -O3)

에 비해 약간 열등한 반면, 원내부점 쌍대단체법이 최대 비가능법에 비해 탈락변수 선정면에서 많은 우수성을 보이고 있기 때문이다. 즉, 원내부점 쌍대단체법이 최대 비가능법에 비해 반복회수와 수행시간면에서 모두 우수한 성능을 보이고 있다.

다음으로 쌍대내부점 원단체법의 효율성을 검증하기 위해서 원 최급등법을 근사적으로 구현하는 원 동적 최급등법(Primal Dynamic Steepest-edge simplex method)[7]을 비교대상으로 삼았다. 원 동적 최급등법의 효율성은 [4]에 잘 나타나 있다. 또 하나의 비교대상으로는 전통적으로 사용되고 있는 최소할인가법인데, 아직도 여러 단체법 프로그램에서 사용되고 있는 방법이기도 하다. 보통의 상용프로그램의 경우에 최소할인가법을 적용할 때는 계산량을 줄이기 위해 부분, 다종평가방법을 적용하게 된다. 따라서, 본 실험에서도 최소할인가법을 사용할 때 부분, 다종평가방법을 적용하였다. 그러나, 쌍대내부점 원단체법은 해법상의 특징 때문에, 원동적 최급등법의 경우 효율상의 이유 때문에 부분, 다종평가방법을 적용할 수 없으므로[4] 본 실험에서는 완전평가(full pricing)방법을 사용하였다.

쌍대내부점 원단체법에서 가장 계산 시간이 많이 소요되는 부분은 쌍대내부점의 가능 개선폭을 구하는 과정이다. 즉, 모든 비기저변수에 대응하는 쌍대내부해의 개선폭을 구하기 위해서 식 (3.1)과 같은 연산을 수행하여야 하는데 이는 $A$ 행렬의 비기저변수 부분에 대한 내적 연산이 필요하게 되어 많은 계산량을 필요로 한다. 그러므로 쌍대내부점 원단체법의 계산효율성은 상당히 열등하다고 할 수 있다.

다음의 <표 2>는 Netlib.문제를 대상으로 하여 위 세가지 진입변수 선정방법을 비교 실험한 결과이다. 이 실험결과를 토대로 볼 때, 쌍대내부점 원단체법에서의 계산량은 부가연산이 많은 원 동적 최급등법의 계산량보다도 많고, 진입변수 선정의 우수성도 열등하여 전체적 수행시간은 원 동적 최

〈표 2〉 쌍대내부점 원단체법 구현결과

| 문제 | | | 최소할인가법 | | 원 동적 최급등법 | | 쌍대내부점 원단체법 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 이 름 | 행 | 열 | 수행 횟수 | 수행 시간 | 수행 횟수 | 수행 시간 | 수행 횟수 | 수행 시간 |
| pilot | 1442 | 3652 | 21914 | 672.35 | 4031 | 238.88 | 5538 | 294.86 |
| finnis | 498 | 614 | 667 | 0.84 | 415 | 0.71 | 457 | 0.93 |
| agg3 | 517 | 302 | 184 | 0.43 | 162 | 0.41 | 174 | 0.48 |
| pilotwe | 723 | 2789 | 6625 | 28.07 | 1699 | 12.75 | 2435 | 22.74 |
| scfxm2 | 661 | 914 | 879 | 2.55 | 597 | 1.82 | 621 | 2.28 |
| bnl2 | 2325 | 3489 | 6446 | 42.87 | 1808 | 17.23 | 2342 | 26.84 |
| perold | 626 | 1376 | 6734 | 25.01 | 1310 | 8.74 | 1767 | 11.80 |
| degen3 | 1504 | 1818 | 9026 | 135.32 | 1786 | 34.77 | 2043 | 37.99 |
| pilot4 | 441 | 1000 | 2152 | 6.27 | 945 | 4.99 | 1313 | 5.75 |
| nesm | 663 | 2923 | 6866 | 23.10 | 2152 | 10.06 | 2934 | 20.54 |
| 25fv47 | 822 | 1571 | 5660 | 28.06 | 1587 | 13.20 | 2129 | 19.15 |
| ship12l | 1152 | 5427 | 914 | 6.74 | 719 | 4.94 | 720 | 5.60 |
| woodw | 1099 | 8405 | 1486 | 6.69 | 835 | 6.41 | 922 | 10.31 |
| pilotwe | 723 | 2789 | 6625 | 28.08 | 1699 | 12.93 | 2260 | 18.73 |
| seba | 516 | 1028 | 316 | 0.79 | 270 | 0.67 | 259 | 0.83 |
| stocfor2 | 2158 | 2031 | 1538 | 10.55 | 770 | 6.74 | 798 | 7.73 |
| stair | 357 | 467 | 750 | 2.47 | 326 | 1.69 | 463 | 1.98 |
| capri | 272 | 353 | 268 | 0.35 | 220 | 0.35 | 247 | 0.39 |

(실험 환경 : Sun Ultra Sparc, GCC v2.7 -O3)

급등법에 비해 1.5배에서 2배정도 많다는 것을 알 수 있다.

한편, 최소할인가법과 비교해 볼 때, 앞에서 설명했던 것처럼 쌍대내부점 원단체법이 할인가의 계산만이 필요한 최소할인가법에 비해 계산량이 훨씬 많다. 또한, 최소할인가법과 달리 부분, 다종 평가방법도 사용할 수 없으므로 계산량이 더욱 더 많아진다. 그러나, 진입변수 선정의 우수성면에서는 쌍대내부점 원단체법이 최소할인가법에 비해 상당히 우수하다는 것을 반복회수를 통해 알 수 있다. 즉, 쌍대내부점 원단체법이 최소할인가법에 비해 가지는 진입변수 선정의 우수성이 계산량의 과다를 보상하여 결과적으로 전체 수행시간의 감소를 가져왔다고 할 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 원내부점 쌍대단체법(PIDS)에 대한 기존의 연구를 바탕으로 하여 일반한계 문제에 적용할 수 있는 PIDS를 유도하고, PIDS의 개념을 원단체법에 적용하여 쌍대 내부점을 이용한 원단체법의 진입변수 결정방법을 유도한 후, 일반한계 문제로 확장하였다. 또한, 두 가지 평가전략을 구현한 실용 코드를 개발하여 대형 선형계획법문제에 적용하는 실험을 통해 두 가지 평가전략과 다른 평가전략들과의 비교를 수행하였다.

원내부점 쌍대단체법의 경우, 최대비가능법과 쌍대 최급등법에 비해 수행시간 면에서 우수한 성능을 보였다. 이는 원내부점 쌍대단체법이 최대비가능법에 비해 퇴화현상을 효과적으로 방지하고 문제축소 효과를 가지고 있어 해법의 반복회수를 줄일 수 있었기 때문이다. 그리고, 쌍대 최급등법에 비해서는 반복회수 면에서는 약간 열등하지만 탈락변수 결정을 위한 계산량이 쌍대 최급등법에 비해 훨씬 작기 때문에 전체적인 수행속도 면에서는 10%정도 우수한 성능을 보였다. 결과적으로 쌍대 최급등법, 최소할인가법에 비해 원내부점 쌍대단체법이 우수함을 확인할 수 있었다.

쌍대내부점 원단체법의 경우, 최소할인가법에 비해서는 반복회수, 수행시간 면에서 모두 우수한 성능을 보였지만, 원 동적 최급등법에 비해서는 열등한 것으로 판명되었다. 이는 쌍대내부점 원단체법의 퇴화방지나 문제 축소효과로 인해 얻을 수 있는 반복회수의 감소가 진입변수 선정을 위한 계산량의 많은 증가를 상쇄시키지 못했기 때문이다. 결과적으로 쌍대내부점 원단체법은 전통적으로 사용되는 최소할인가법보다는 우수함을 보였으나 원 동적 최급등법에 비해서는 열등함을 보였다.

## 참 고 문 헌


[1] 강완모, "내부점 쌍대단체법에 관한 연구", 서울대학교 석사학위 논문, 1994

[2] 박순달, 「선형계획법(3정판)」, 민영사, 1992

[3] 박순달, 「OR(경영과학)」, 민영사, 1991

[4] 박찬규, 임성묵, 박순달, "동적 steepest-edge 방법과 퇴화방지기법의 구현", 「한국경영과학회/대한산업공학회 '97 춘계 공동학술대회 논문집」, 1997

[5] 정성진, 강완모, 정의석, 허홍석, "선형계획문제의 강성다항식 계산단계 기법에 관한 연구", 「한산업공학회지」 Vol.19, No.4(1993), pp.3-11.

[6] 허홍석, "내부점을 이용한 쌍대단체법에 관한 연구", 서울대학교 석사학위 논문, 1992

[7] Forrest, J. J. and D., Goldfarb, "Steepest-edge simplex algorithms for linear programming," *Mathematical Programming* 57 (1992), pp.341-374.

[8] Gay, D. M., "Electronic mail distribution of linear programming test problems," *Mathematical Programming Society Committee on Algorithms Newsletter* 13(1985).

[9] Goldfarb, D., "Using the steepest-edge simplex algorithm to solve sparse linear programs," in : J. Bunch and D. Rose, eds., *Sparse Matrix Computations* (Academic Press, New York, 1976) pp.227-240.