

Pollution 오차를 이용한 요소생성에 관한 연구

A mesh generation based on the pollution error

유형선^{*1}, 편수범^{*2}

Yoo, Hyeong Seon^{*1} and Pyun, Soo Bum^{*2}

ABSTRACT

In this paper, made was a study on a mesh generation method based on the pollution error. This method is designed for the control of the pollution error in any patch of elements of interest. It is a well-known fact that the pollution error estimates are much more than the local one. When the pollution error is significant, nothing can be said about the reliability of any estimator based on local computations in the patch. Reliable a posteriori error estimation is possible by controlling the pollution error in the patch through proper design of the mesh outside the patch. This design is possible by equally distributing the pollution error indicators over the mesh outside the patch. The mesh generated from the conventional feedback pollution-adaptive mesh generation algorithm needs many iterations. Therefore, the solution time is significant. But the remeshing scheme in the proposed method was used here. It was shown that the pollution-adaptive mesh improves the E.I., simply denoted as Effectivity Index, on the patch of interest, and the pollution error reduces less than the local error.

Keywords : Pollution Error(포류션 오차), Mesh Generation(요소생성),
Effectivity Index(효능지수), Finite Element Method(유한요소법)

1. 서론

Pollution 오차의 개념은 오차에 대한 재정의에 따라 기존의 오차추정자(error estimator)로 계산되지 못한 오차의 또다른 부분을 의미한다. 이 오차성분에 대한 새로운 오차 계산방법과 pollution 오차에 의존한 적응요소분할 알고리즘(adaptive mesh generation algorithm)에 관련된 연구가 현재 진행되고 있다. 기존의 적응요소분할 알고리즘이 전체 오차중의 일부에 해당하는 국소(local error)에 의한 것이므로[1], 전체 오차중에서 나머지 부분, 즉 pollution 오차를 이용한 새로운 요소분할 알고리즘에 대한 연구가 더 적

은 자유도의 허용을 가능하게 한다는 실험 결과에 따른 것이다[1, 2].

기존의 pollution 적응요소분할 알고리즘[2, 3]은 pollution 오차를 구성하는 각 요소의 값(이 값을 오차표시자(error indicator)로 한다)에 따라 그 요소를 균등하게 세분화하는 것이었다. 그러나 이와 같은 요소분할은 원하는 정확도를 얻기 위해서는 많은 반복이 필요하다. 특히, 초기 요소분할이 세밀하지 못할수록 반복횟수는 더 많아지게 된다.

뿐만 아니라, 요소의 분할이 점점 세분화되면서 메모리의 효율적인 사용을 위해서 현재는 계산이 끝나면 메모리를 변수 사용으로부터 자유롭게 하여야 한다.

*1 정회원, 인하대학교 자동차공학과, 교수

*2 비회원, 인하대학교 자동차공학과, 대학원생

이에, 본 논문에서는 pollution 오차를 제어하는 방법으로서, remeshing 방법[4]을 적용하고자 한다. 즉, 이전의 요소 크기로부터 원하는 정확도를 얻기 위하여 요구되는 새로운 요소분할을 위한 요소 크기를 계산하고, 이를 토대로 새로운 요소분할을 구성하는 것이다.

2. 국소오차 및 Pollution 오차

오차에 대한 기존의 개념에 새로운 성분을 고려하여 오차를 재정의하는 과정에서, 새로 도입된 오차 성분을 pollution 오차로 정의하고, 기존의 오차에 대한 정의를 국소오차(local error)로 정의한다. 따라서, 국소오차는 기존의 오차추정자로 구하고, pollution 오차의 계산을 위해서는 추가 계산이 필요하다.

$$e_{h|_{\omega_h}} = V_1^{\omega_h} + V_2^{\omega_h} \quad (1)$$

여기서, $e_{h|_{\omega_h}}$ 는 관심영역 ω_h 의 오차이고, $V_1^{\omega_h}$ 는 국소오차이며, $V_2^{\omega_h}$ 는 pollution 오차이다.

각 오차성분에 대한 정의는 다음과 같다[2].

$$V_i^{\omega_h} \in H_{\Gamma_0}^1, \quad i=1,2 \text{ such that}$$

$$B_Q(V_1^{\omega_h}, v) = \sum_{\tau \in T_h} \mathcal{F}_\tau^{EQ}(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\tau) \quad (2-1)$$

$$B_Q(V_2^{\omega_h}, v) = \sum_{\tau \in T_h} \mathcal{F}_\tau^{EQ}(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\tau) \quad (2-2)$$

여기서, $H_{\Gamma_0}^1$ 는 해공간(solution space)이고, $B_Q(u, v)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$B_Q(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (3)$$

그리고, 식(2-1, 2)에서 오른쪽 항은 각 요소에서의 보정된 잉여함수(residual functional)로 다음과 같이 주어진다.

$$\mathcal{F}_\tau^{EQ}(v) = \mathcal{F}_\tau(v) + \int_{\partial\tau} v \theta_\tau, \quad v \in H^1(\tau) \quad (4)$$

여기서, $\mathcal{F}_\tau(v)$ 는 각 요소에서 잉여함수를 나타낸다. 또한, θ_τ 는 각 변에서 잉여의 보정을 위해 도입된 함수이다[2].

식(2-1, 2)로부터 각각의 요소에서 정의된 오차식을 유도하고, Laplace 방정식에 Green function theory[5]를 적용하여, [2]에서처럼 결합하면 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial V_2^{\omega_h}}{\partial x_i} = \sum_{\substack{\tau \in T_h \\ \tau \in \omega_h}} B_\tau(\hat{e}_\tau, G_i^{(\bar{x})} - w_\tau) \quad (5)$$

여기서, $G_i^{(\bar{x})}$ 는 $G^{(\bar{x})}$ 의 x_i 방향으로의 도함수이다. $G_i^{(\bar{x})}$ 대신 식(6)의 유한차 관계식으로 표현된 $\tilde{G}_i^{(\bar{x})}$ 를 대체하여 정리하면, 식(7)처럼 정리할 수 있다.

$$\tilde{G}_i^{(\bar{x})} \equiv \frac{1}{h} \left(G^{(\bar{x} + h\mathbf{n}_i)} - G^{(\bar{x})} \right) \quad (6)$$

여기서, h 는 요소의 길이이고, \mathbf{n}_i 는 x_i 방향으로의 단위벡터이다.

$$\frac{\partial V_2^{\omega_h}}{\partial x_i} \approx \sum_{\substack{\tau \in T_h \\ \tau \in \omega_h}} B_\tau(\hat{e}_\tau, \tilde{G}_i^{(\bar{x})} - \tilde{w}_\tau) \quad (7)$$

그런데 $\tilde{G}_i^{(\bar{x})} - \tilde{w}_\tau$ 에서 \tilde{w}_τ 는 $\tilde{G}_i^{(\bar{x})}$ 에 대한 가장 근사한 함수이므로, 유한요소해인 $\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{x})}$ 의 오차보다는 적다. 따라서 식(7)의 등호 오른쪽에서 합해지는 각 항에 대해 다음과 같은 부등식이 성립된다.

$$B_\tau(\hat{e}_\tau, \tilde{G}_i^{(\bar{x})} - \tilde{w}_\tau) \leq B_\tau \left(\hat{e}_\tau, \hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{x})}) \right) \quad (8)$$

여기서, $\hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{x})})$ 는 $\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{x})}$ 가 만족하는 다음 식에서 구한 오차이다[2].

$$\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{x})} \in S_{h,\Gamma_0}^P \text{ such that}$$

$$B_Q \left(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{x})}, v \right) = \frac{1}{h} \left(v(\bar{x} + \mathbf{n}_i h) - v(\bar{x}) \right)$$

$$\forall v \in S_{h,\Gamma_0}^P = H_{\Gamma_0}^1 \cap S_h^P \quad (9)$$

식(8)로부터 요소별 pollution 오차 표시자 (error indicator)의 x_i 방향 도함수를 다음과 같이 정의한다[6].

$$\mu_{i,\tau}(\bar{X}) \equiv \left| B_\tau \left(\hat{e}_\tau(u_h), \hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{X})}) \right) \right| \quad (10)$$

여기서, $\mu_{i,\tau}(\bar{X})$ 는 각 요소에서 x_i 방향으로의 pollution 도함수를 추정하는 값이고, \bar{X} 는 구하고자 하는 영역 ω_h 의 중앙요소의 한 정점(vertex)를 사용한다.

이 pollution 오차표시자는 관심영역의 pollution 오차추정치를 이루는 각 요소에서의 공헌치를 계산하기 위해 정의된 것으로, 주로 적응요소분할에서 각 요소에서의 오차추정을 위해 사용된다.

식(10)를 ZZ 오차추정자에 적용하기 위해 다음과 같이 정리할 수 있다. 식(3)에서 정의한 식을 이용하여 적분으로 전개하면,

$$B_\tau \left(\hat{e}_\tau(u_h), \hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{X})}) \right) = \int_{\tilde{\omega}_h} \nabla \hat{e}_\tau(u_h) \cdot \nabla \hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{X})}) \quad (11)$$

이 식에서 $\nabla \hat{e}_\tau(u_h)$ 와 $\nabla \hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{X})})$ 는 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$\nabla \hat{e}_\tau(u_h) = \sigma^{ZZ}(u_h) - \nabla u_h \quad (12)$$

$$\nabla \hat{e}_\tau(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{X})}) = \sigma^{ZZ}(\tilde{G}_{i,h}^{(\bar{X})}) - \nabla \tilde{G}_{i,h}^{(\bar{X})} \quad (13)$$

이 성분은 $\Omega - \tilde{\omega}_h$ 영역에 있는 모든 요소에서 구하여 합한 다음, 그 값에 유클리디언 놈을 취한 후, 관심영역의 면적을 곱하는데, 이는 ω_h 안에서 pollution 오차의 구배 $\nabla V_2^{u_h}$ 가 일정하다는 전제에 따른 것이다[1, 2].

$$M_i(\bar{X}) = \sum_{\tau \in \tilde{\omega}_h} \mu_{i,\tau}(\bar{X}) \quad (14)$$

결국 식(14)에서 $M_i(\bar{X})$ 는 $\left| \frac{\partial V_2^{u_h}}{\partial x_i} \right|$ 의 추정치에 해당한다.

$$M(\bar{X}) \equiv \sqrt{M_1(\bar{X})^2 + M_2(\bar{X})^2} \quad (15)$$

$$M_{\omega_h} = \sqrt{|\omega_h|} M(\bar{X}) \quad (16)$$

3. ZZ-SPR 및 Z² 오차추정자

이들 오차추정자들은 Zienkiewicz와 Zhu[7, 8, 9]에 의해 개발된 것으로, 오차추정 방법중의 하나인 부분복원법의 대표적인 것이며, 후 과정에서 직접 구한 응력으로부터 복원될 응력에서 사용할 절점의 각 절점에서의 응력값을 구하기 위해 다항식, $\sigma_b^* = P^T a$ 를 최소자승법을 이용하여 구성한 것이다. 이 다항식으로부터 구한 각 절점에서의 응력값에 유한요소법에서 변위의 내삽에서 사용된 기저함수의 벡터를 스칼라 곱하여 각 요소에서의 복원응력 σ^{ZZ} 를 구성한다[7].

$$\sigma^{ZZ} = N^T \bar{\sigma}^* \quad (17)$$

여기서, $\bar{\sigma}^*$ 는 각 절점에서의 응력값이다.

이 응력을 가지고 다음과 같이 각 요소마다 오차표시자를 구한다.

$$\eta_\tau^{ZZ} \equiv \|\sigma^{ZZ} - \nabla u_h\|_{L^2(\tau)} \quad (18)$$

4. 고전적인 Feedback Pollution 적응요소분할

주어진 문제가 강한 특이점을 지니고 있거나, 급격한 해의 변화를 가지고 있는 경우, 기존의 오차추정자로 구한 오차의 신뢰도는 떨어지게 된다. 그럼에도 불구하고, 이렇게 계산된 오차를 적응요소분할 알고리즘에서 오차의 표시자(indicator)로 사용하여 최적의 요소분할을 찾는 알고리즘은 그 접근방법에서 문제점을 노출하고 있다. 이와같은 상황에서 국소오차보다 훨씬 더 큰 pollution 오차를 줄여가는 방향으로 요소분할을 적용하는 알고리즘은 오차의 정확성을 보장하는 효율적인 방법이라고 할 수 있다. 이와같은 맥락에서 출발한 기존의

제한 알고리즘은 가장 쉽게 구현할 수 있는 pollution 적용요소분할 알고리즘이다.

우선 초기 요소분할에 의해 해석한 후, 관심 영역 ω_h 의 오차를 추정한다. 그리고, 현재의 요소분할에서 구한 pollution 오차를 추정한 후, 다음 조건을 만족하는지 판단한다[2].

$$\|V_2^{w_s}\|_{\omega_s} \leq t\% \|V_1^{w_s}\|_{\omega_s} \quad (19)$$

여기서, $\|v\|_{\omega_s} \equiv (B_{\omega_s}(v, v))^{1/2} = \|\nabla v\|_{L^2(\omega_s)}$ [1].

이 조건이 만족되면 반복을 끝내고, 그렇지 않으면 $\Omega - \tilde{\omega}_h$ 안에 있는 모든 요소에서 다음 식에 따라 pollution 오차표시자를 계산한다 [2].

$$\mu_\tau = \sqrt{(\mu_{1,\tau})^2 + (\mu_{2,\tau})^2} \quad (20)$$

이 구한 값을 가지고 다음 조건식으로 판정한다[2].

$$\mu_\tau \geq \gamma \quad \max_{\substack{\tau \in T_h \\ \tau \notin \tilde{\omega}_h}} \mu_\tau \quad (21)$$

여기서, γ 는 0과 1사이의 값이다. 이 조건이 맞으면 그 요소는 분할된다. 위의 영역에 있는 모든 요소에 대해 식(21)의 판정 과정을 수행하고, 분할 과정을 거친 다음, 다시 수정된 요소분할에 의존해 유한요소해석을 한 후 위의 식(19)을 수행하는 단계로 되돌아간다. 이때 두 오차성분의 비교에는 추정치가 사용된다.

이 알고리즘에 의하면, 매 반복마다 $\Omega - \tilde{\omega}_h$ 안의 요소에 대해 pollution 오차 표시자를 구해야 한다. 더욱이 반복 직전과 직후의 요소분할의 변화가 크지 않기 때문에, 많은 반복횟수가 불가피 하다. 또 반복이 상당히 지난 다음에는 많은 자유도가 필요하므로 메모리의 효율적인 관리가 필요하게 된다. 그밖에도, 요소를 식(21)에 의해 균등하게 분할하기 때문에 이웃한 요소와 접하는 변에 자유도수가 불일치하는(1-irregular connection) 요소가 만들어 지고, 이 경우 ZZ-SPR의 수정이 불가피하다.

5. Pollution 적용요소분할

4장에서 지적된 여러 결점을 해결하기 위해 이 연구에서는 remeshing 방법을 적용하여 $\Omega - \tilde{\omega}_h$ 영역의 요소에 대해 요소분할의 수정을 고려한다. 위의 자유도수 불일치 문제를 피할 수 있고, 반복횟수를 현저히 줄일 수 있다. 또한 이 방법은 부분적으로 식(20)의 pollution 오차표시자의 값이 다른 곳보다 큰 경우, 이를 극복하여 균등한 분포를 기대할 수 있으며, pollution 오차의 근사적 특성을 이용해 다음 반복시 원하는 요소의 길이를 예측할 수 있다.

근사적으로 pollution error는 다음과 같은 관계를 보인다[1].

$$\|V_2^{w_s}\|_{\omega_s} = Ch^{2\alpha+1} \quad (22)$$

여기서, α 는 특이성의 특징을 나타내는 지수이고, h 는 요소의 길이이며, C 는 요소의 크기와 관련이 없는 상수이다. 이 관계식을 이용하여 새로운 요소의 크기를 계산한다. 식(23)은 식(22)을 이용해 k 번째 요소분할에서 ω_h 에서의 pollution 오차와 $k+1$ 번째 요소분할에서의 pollution 오차를 가지고 만든 식이다.

$$\frac{\|V_2^{w_s}\|_{\omega_s}^{(k+1)}}{\|V_2^{w_s}\|_{\omega_s}^{(k)}} = \left(\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)^{2\alpha+1} \quad (23)$$

이 식으로부터 다음과 같이 식을 정리한다.

$$h_{k+1} = h_k \times \left(\frac{\|V_2^{w_s}\|_{\omega_s}^{(k)}}{\|V_2^{w_s}\|_{\omega_s}^{(k+1)}} \right)^{-\frac{1}{2\alpha+1}} \quad (24)$$

이 식을 다음과 같이 변형시킨다.

$$h_{k+1} = h_k \times \left(\frac{\mu_\tau}{t\% \varepsilon_{\omega_s}} \right)^{-\frac{1}{2\alpha+1}} \quad (25)$$

여기서, μ_τ 는 각 요소에서의 pollution 오차표시자로 식(20)에 의해 계산되고, $\varepsilon_{\omega_s} = \left(\sum_{\tau \in \omega_s} \eta_\tau^2\right)^{1/2}$ 는 ω_h 에서의 국소오차의 추정치로 ω_h 안의 요소들에 대해 식(18)에 의해 구

한 표시자들을 제공하여 모두 더한 값에 제곱근을 취한다.

이와같은 변형은 각 요소에서의 pollution 오차표시자의 값을 균등화시키기 위한 것이고, 이를 통해 반복 후의 pollution 오차를 제어하기 위해 식(19)을 적용한 것이다.

식(25)로부터 새로운 요소분할에 필요한 각 요소에서의 길이를 계산하고, 이 계산된 길이 중에 경계선에 접한 요소의 길이를 토대로 경계선에 놓일 절점의 위치를 정하고, 이 절점으로부터 요소를 생성하여 내부로 진행된다. 이 과정은 [13]에서 제공되는 Delaunay 요소분할 프로그램에 의해 진행된다.

6. 모의 실험

5장에서 설명한 요소분할방법의 실효성을 증명하기 위해 이 논문에서는 오차 연구시 자주 사용하는 L-모양의 공간에서 정의된 혼합 경계조건(Mixed boundary condition)의 Laplace 방정식에 적용하고자 한다. Fig. 1에서 그 해석 대상을 확인할 수 있다.

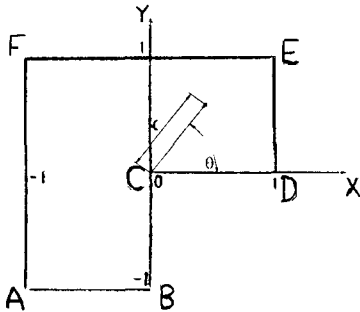


Fig. 1 The L-Shaped Domain for the Numerical Model

이 영역에서 경계조건은 Dirichlet이나, Neumann 경계조건 둘중에서 하나에 속하고, 각 경계에서의 조건은 다음과 같다[2].

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_D$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \equiv \nabla u_{exact} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_N \quad (26)$$

여기서, \mathbf{n} 은 경계에서 바깥으로 향하는 법선 방향의 단위벡터이다.

그 영역에서 Dirichlet 경계조건이 적용되는 구간 Γ_D 는 CD이고, 나머지 구간은 모두 Neumann 경계구간 Γ_N 이다.

또한, 이와같은 조건에서 정해(exact solution)는 다음과 같다[1, 10].

$$u_{exact}(r, \theta) = r^{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{3} \theta\right) \quad (27)$$

여기서, r 은 원점 C를 중심으로 하는 방사방향의 길이이고, θ 는 X축에서부터 잰 Z축에 대한 회전각도이다.

초기에 사용할 요소분할로는 1/8의 크기를 가지고 균일하게 분포한 요소(mesh)이며, 그 모양은 Fig. 2와 같다. 이 Fig. 2에서는 또 오차해석에서 관심을 갖는 소영역 ω_h (접게 칠해진 부분)과 이 영역을 둘러싼 $\tilde{\omega}_h$ (둘레가 굵게 표시된 부분)영역에 대한 정의도 확인할 수 있다.

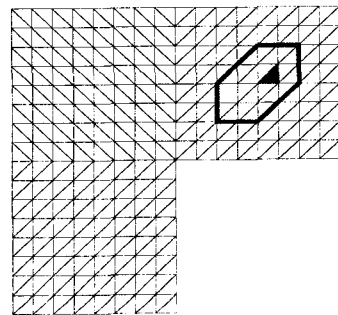


Fig. 2 The Initial Mesh of the Model Domain

모의 실험에서는 ω_h 를 하나의 요소를 사용하고, $\tilde{\omega}_h$ 를 구성할 때 다른 논문에서처럼 2 요소층(mesh-layer)를 사용하는데, 즉 해당 요소를 감싸고 있는 요소의 한 정점을 공유하는 요소들과 이것들을 둘러싼 요소들로 이루어진다.

사용된 요소는 2차 삼각요소이며, 사용된 요소분할의 패턴은 [1]에서 설명한 대로, 어떤 오차추정자든지 실제오차에 눈을 취한 것과 동가(equivalence)이고, 오차추정자에 대한 성능이 좋은 것으로 알려져 있다. 또한, ZZ-SPR을 이용해 오차를 구할 때 2차요소는 초수렴성(Superconvergence)을 보인다.

그리고, 식(25)에서 사용될 α 의 값은 식(27)에서 정의된 1/3의 값이 사용된다.

이와 같은 요소분할에 의존하여 해를 구하고, 오차를 구하기 위해서 ZZ-SPR과 Z^2 오차추정자를 사용하며, 각 요소에서 구한 효능지수(Effectivity Index)[11, 12]의 분포는 Fig. 3과 같다.

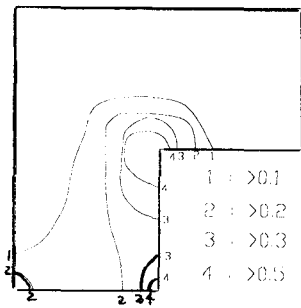


Fig 3 The Distribution of E.I. in the Global Domain

Fig. 3의 분포도에 의하면 대부분의 영역이 0.5보다 작은 효능지수를 나타내고 있다. 특히 소영역 근처에서는 모든 요소에서 효능지수값이 0.1보다 작은 분포를 보이며, 이와같이 과소 평가된 오차추정의 문제점을 해결하기 위해서 오차추정 구간을 Fig. 2에서처럼 설정한 것이다. 결국 이와같은 결과는 기존의 오차추정자에 대한 신뢰도를 의심하게 만든다. 그러나 이 결과는 비단 이 논문에서 사용중인 오차추정자 뿐만 아니라 다른 추정자에서도 비슷한 결과를 보이는 것으로 알려져 있다[1, 2, 3].

그러나, 이와같은 결과는 오차에 대해 pollution 오차성분의 고려로 설명이 가능하며,

이 경우 기존의 오차 추정자로 계산하는 국소 오차보다 pollution 오차가 더 크다는 것을 확인한 바 있다.

따라서, 더 큰 값을 보이는 pollution 오차를 국소오차보다 줄이기 위해 4장에서 제시한 알고리즘을 사용한 결과 Fig. 4와 같이 요소분할을 바꿀 수 있다.

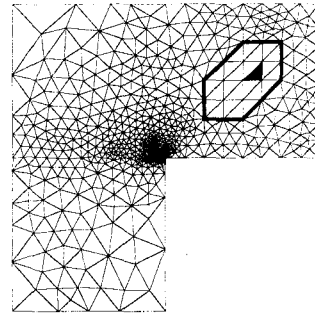


Fig 4 The Mesh Obtained for the Control of the Pollution Error in the Shaded Element

이 결과에 의하면 특이점 부근에서 매우 작은 요소의 크기가 4장에서 제시한 알고리즘에 의해 계산된다. 또한, pollution 오차의 제어를 목적으로 하기 때문에 Fig 4에서 보면 $\tilde{\omega}_h$ 에서는 요소분할에 변화가 없음을 알 수 있다. Fig. 4는 알고리즘에서 계산된 새로운 요소 길이에 의존해 구성한 것으로 요소(mesh) 작성에 사용된 프로그램은 Karamete의 mesh2d[13]이다.

작성된 새로운 요소분할과 초기 요소분할 사이에서 효능지수의 분포의 변화를 보여주기 위해 전체영역에서 값의 분포 비교를 Fig. 5에서 볼 수 있는데, 이 Fig. 5에 의하면 초기 요소(mesh)에서는 효능지수의 값이 대부분 0.1보다 작은 값을 보이는데, 새로운 요소(mesh)에서는 대부분이 0.5 이상을 보이고 있다.

이 그림 5를 통해 초기 요소분할에서 보다 Fig.4의 요소분할에서 효능지수의 값이 훨씬 개선됨을 알 수 있다.

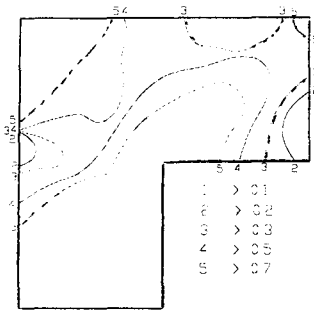


Fig. 5 The Distribution of E.I. in the Mesh of Fig. 4

또한, 새로운 요소분할에서는 특이점 가까운 곳에서는 0.8 이상의 값의 분포를 보이고 있는데, 이는 특이점에서의 오차가 정확히 추정되고 있음을 말해주는 결과이다. 이와 같은 효능지수 분포의 개선은 결국 요소분할의 구성과 관련이 있고, 그 요소분할 작성에 영향을 미치는 성분은 pollution 오차이다.

또한, Table 1에서는 알고리즘의 적용으로 pollution 오차 대비 국소오차의 비율이 얼마나 감소되었는지를 보여주며, 그리고, 해당 요소에서의 효능지수의 수치적인 비교를 통하여 개선됐음을 짐작할 수 있다.

특히, pollution 오차 대비 국소오차 추정치의 비율 비교는 요소분할의 재구성에 의해 pollution 오차가 국소오차보다 작아질 수 있다는 사실을 알 수 있다.

또한, 초기 요소분할에서 나타난 pollution 오차 추정치의 국소오차 추정치에 대한 초과현상은 알고리즘의 적용으로 해소되었고, 오차 추정치의 낮은 수치는 상당히 개선되었다.

이 결과를 통해 오차계산에서 기존 가정인 국소 영향은 pollution 오차의 계산에는 영향을 미치지 못하고, 그로 인해 해당 구역에서의 오차추정자의 성능을 떨어뜨린다는 사실을 알 수 있다.

위의 일련의 결과에서, pollution 오차의 감소를 통한 오차추정자의 성능향상을 기대할 수 있고, 이러한 접근방법은 기존의 적용요소 구성 알고리즘과 다른 접근방법이라 하겠다.

7. 결론

이 연구에서는 pollution 오차의 추정과 함께 그 추정치의 제어를 통한 단순한 형태의 초기 요소분할을 remeshing하는 알고리즘을 제안하였다. 그리고, 제6장의 모의 실험 결과로부터 다음과 같은 결론을 도출할 수 있다.

1. 초기 요소분할에서 나타난 pollution 오차의 큰 추정치를 국소오차보다 낮춤으로써 관심 영역에서 오차추정의 신뢰도가 높아짐을 알 수 있다.
2. 초기 요소분할에서 0에 가까운 효능지수를 보인 그 특정요소의 pollution 오차를 낮추기 위해, 각 요소에서 구한 pollution 오차 표시자의 값이 사용되고, 이 값을 조건식에 따라 제어를 통해 가능함을 알았다. 오차의 균등한 분포를 목표로 하는 최적 요소분할의 접근방법과 유사한 결과이다.
3. 특이점 부근의 요소의 크기를 줄이으로써, 다른 구역보다 높은 표시자의 값을 낮출 수 있었고, 이를 통해 pollution 오차의 추정치를 줄일 수 있었다.

Table 1 The E.I. and Pollution Factor in the Shaded Element

	초기 mesh 사용	pollution error를 제어한 mesh 사용	변화율 (%)
$\theta_{\omega_s} = \frac{\epsilon_{\omega_s}}{\ e_h\ _{\omega_s}}$	0.03212	0.584955	1821%
$\frac{\ V_2^{\omega_s}\ _{\omega_s}}{\ V_1^{\omega_s}\ _{\omega_s}}$	8.9754	0.63989	-1403%

4. 3장에서 제시한 방법보다 반복횟수에서 상당한 감소가 예상되므로 계산속도에 있어 상당한 효율을 기대할 수 있다.

참고문헌

- [1] Babuška, I., Strouboulis, T., Mathur A. and Upadhyay, C. S., 1994, "Pollution Error in the h -Version of the Finite Element Method and the Local Quality of a-Posteriori Error Estimators", *Finite Elements Anal. Des.*, Vol. 17, pp273-321
- [2] Babuška, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C. S. and Gangaraj, S. K., 1995, "A Posteriori Estimation and Adaptive Control of the Pollution Error in the h -Version of the Finite Element Method", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 38, pp4207-4235
- [3] Babuška, I., Strouboulis, T. and Gangaraj, S. K., 1996, "Practical Aspects of a-Posteriori Estimation and Adaptive Control of the Pollution Error for Reliable Finite Element Analysis", <http://yoyodyne.tamu.edu/research/pollution/index.html>
- [4] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R.L., 1989, "*The Finite Element Method*", 4th eds., McGraw-Hill, International Edition
- [5] Greenberg, Michael D., 1978, "*Foundations of Applied Mathematics*", Prentice-Hall Inc.
- [6] Babuška, I., Strouboulis, T., Gangaraj, S. K. and Upadhyay, C. S., 1997, "Pollution Error in the h -Version of the Finite Element Method and the Local Quality of the Recovered Derivatives", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 140, pp1-37
- [7] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Estimators. Part 1. The Recovery Techniques", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 33, pp1331-1364
- [8] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Estimators. Part 2. Error Estimates and Adaptivity", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 33, pp1365-1382
- [9] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 101, pp207-224
- [10] Szabo, B. A. and Babuška, I., 1991, "*Finite Element Analysis*", John Wiley & Sons, Inc., New York
- [11] Babuška, I., Plank, L. and Rodriguez, R., 1992, "Quality Assessment of the a Posteriori Error Estimation in Finite Elements", *Finite Elements Anal. Des.*, Vol. 11, pp285-306
- [12] Babuška, I., Plank, L. and Rodriguez, R., 1992, "Basic Problems of a Posteriori Error Estimation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 101, pp97-112
- [13] Karamete, B. Kaan, "User manual of 2D Constrained Mesh Generator Mesh2d", <http://scorec.rpi.edu/~kaan/mesh2d.tar>
- [14] Hinton, E. and Owen, D. R., 1977, "*Finite Element Programming*", Academic Press. Inc., London