

유한요소법을 이용한 예압된 금형의 응력해석

여홍태*, 최영**, 허관도***

Stress Analysis of the Prestressed Dies by Using FEM

Yeo Hong Tae*, Choi Young**, and Hur Kwan Do***

ABSTRACT

By using the FEM, a method for the stress analysis of the prestressed dies has been proposed. In this method, FEM and Lamé equation are used for the analyses of the die insert and the stress ring, respectively. The proposed method includes the calculation of the contact pressure between the die insert and the stress ring. To show the validity, the proposed method has been applied to the simple test problem. The results of the stress analysis have been compared with the results of ANSYS, a commercial FE-code. Cold extrusion has been simulated by using the rigid-plastic FEM and the results of the deformation analysis have been used as the input of the die structure analysis. The stress states of the prestressed extrusion die have been obtained. The stress analysis of the die insert with stress rings has also been performed during extrusion.

Key Words : Prestressed Die(예압된 금형), FEM(유한요소법), Lamé Equation(Lamé 식), Die insert(다이 인서트), Stress Ring(보강링), Superposition Principle(중첩의 원리), Contact Pressure(접촉압력)

1. 서론

소성가공방법 중 하나인 냉간 단조는 비교적 간단한 장비로 정밀도 높은 부품을 대량 생산하는데 많이 이용되고 있다. 그러나 높은 성형 압력 때문에 냉간 단조의 공구 및 금형의 수명이 크게 제한 받거나, 금형 제작비용이 높아질 수 있다. 그러므로, 냉간 단조 금형 파손 방지 및 금형 단가를 낮추기 위해서 보강링을 이용하여 다이 인서트를 예압하여 사용하는 것이 일반적이고, 금형의 변형 및 파손 등을 예측하기 위해서는 정확한 금형의 응력해석이 요구되어진다.

본 연구에서는 강소성 유한요소법을 이용하여

소재의 성형을 해석하고 이 결과를 이용하여 예압된 금형에서의 응력해석을 수행하는 절차를 논하고자 한다.

이러한, 예압된 금형의 응력해석은 보강링(stress ring)과 다이 인서트(die insert)간의 접촉문제를 포함하고 있다. 이전의 몇 가지 해석에서, 두꺼운 원통에 관한 해석해인 Lamé 식⁽¹⁾을 이용하여 다이 인서트와 보강링의 접촉면압을 계산하는 방법⁽²⁻⁴⁾이 이용되었다. 그러나 이러한 방법은 다이 인서트에 작용하는 접촉면압분포를 고려하기 어려운 단점이 있다. 또한 접촉문제를 고려한 유한요소법⁽⁵⁻⁶⁾으로는 해석시간이 많이 요구되며 유한요소 모델링시에도 어려움이 많으며 상당한 경험이

* 동의대학교 일반대학원, 기계공학과
 ** 부산대학교 일반대학원, 기계설계공학과
 *** 동의대학교 기계공학과

요구된다.

본 연구에서는, 예압된(prestressed) 금형의 응력 해석을 빠르고 비교적 정확한 방법으로 수행하기 위해 형상이 복잡한 다이 인서트는 탄성 유한요소 법으로 해석하고 형상이 간단한 보강링은 Lamé 식을 이용하여 해석하며, 다이 인서트와 보강링에 작용하는 접촉압력을 다이 인서트에 작용하는 성형압력에 따라 계산하는 방법을 제안한다. 제안한 방법의 타당성을 보이기 위해, 간단한 예에 제안한 해석기법을 적용하고 그 해석결과와 접촉문제를 고려한 상용유한요소 프로그램인 ANSYS⁽⁷⁾의 해석결과를 비교한다.

제안한 방법의 적용 예로 냉간압출 금형의 응력 해석을 수행하였다. 이를 위해, 강소성 유한요소 법으로 냉간압출공정을 해석하여 다이 인서트에 작용하는 절점력을 계산하였다. 예압된 금형의 응력 해석은 성형하기 전·후에 대해 수행되었다. 또한 보강링이 두 개인 금형에 대해서 해석을 수행하였다.

2. 예압된 금형의 응력해석 절차

2.1 예압된 금형의 응력해석 절차

본 연구에서 도입된, 예압된 금형의 응력해석 절차는 다음과 같다.

- 1) 성형공정을 강소성 유한요소 해석하여 소재의 절점력(nodal force)을 계산한다.
- 2) 소재의 절점력을 사상(mapping)하여 다이 인서트의 절점력을 계산한다⁽⁸⁾.
- 3) 다이 인서트에 작용하는 성형력에 따라 다이 인서트와 보강링 사이에 작용하는 접촉압력을 계산한다.
- 4) 다이 인서트에 작용하는 절점력과 보강링 사이에 작용하는 접촉압력을 하중조건으로 하여 다이 인서트를 유한요소 해석한다.
- 5) 접촉압력을 보강링에 작용시켜 Lamé 식으로 보강링의 응력해석을 수행한다.

상기에 기술된 절차는 성형공정시 예압된 금형의 응력을 계산하는 절차이다. 보강 후, 성형공정이 시작되기 전의 응력해석은 다이 인서트의 절점력을 0로 하여 계산한다.

Fig. 1은 간단한 검사용 문제(simple test problem)이다. 다이 인서트와 보강링간에 간섭은 없다. 그러므로 초기의 응력은 존재하지 않는다.

Fig. 1에 보인 것과 같은 하중이 작용 할 때의 응력 해석을 설명한다.

다이 인서트의 재질은 SKD11로, 탄성계수는 208GPa 이고 포아송비는 0.3, 보강링 재질은 SKD61로 탄성계수는 212GPa 이고 포아송비는 0.3이다. 접촉면의 마찰계수는 0.3이다.

본 연구에서 적용된 모델은 Fig. 2와 같다. 다이 인서트의 외경에 분할된 요소(element)를 외곽 요소(outside element)로 부르기로 한다. 이를 Fig. 2에 빗금친 요소로 나타낸다.

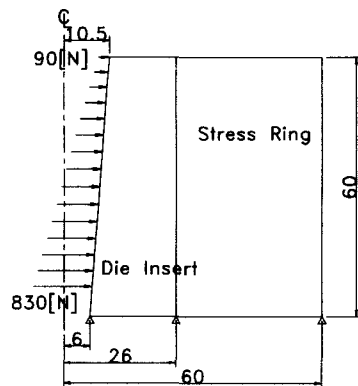


Fig. 1 The simple test problem.

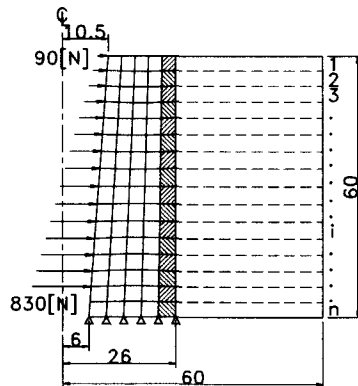


Fig. 2 Present model for the test problem.

2.2 다이 인서트의 접촉압력

금형에 발생하는 응력이 탄성범위 내에 있다면 하중과 변위는 중첩의 원리(superposition principle)가 성립한다. 이 원리를 이용하여 외곽요소의 변위를 계산한다. 다이 인서트에 작용하는 하중은 성형시 발생하는 절점력과 각 외곽요소에 작용하는 접촉압력이다.

다이 인서트 부분에 대해, 절점력이 작용할 때, 탄성 유한요소 해석을 수행하여 각 외곽요소 바깥에서의 변위, U_i^f 를 높이방향의 중점에서 계산한다. 삼첨자 f 는 다이 인서트에 작용하는 성형압력을 나타내며, 하첨자 i 는 i 번째 외곽요소를 나타낸다. 그리고 외곽요소에 작용압력을 단위 값으로 하여, 유한요소 해석한다. 이때, j 번째 외곽요소에 단위 압력에 의한 i 번째 외곽요소의 변위, U_i^j 를 구할 수 있다.

중첩의 원리를 이용하여 j 번째 외곽요소에 작용하는 접촉압력을 P_j^* 라 하면, i 번째 외곽요소의 변위는 다음과 같다.

$$U_i = U_i^f + \sum_{j=1}^n U_i^j \times P_j^* \quad (1)$$

변형 후에도 다이 인서트가 보강링과 접촉해 있으므로, 각 외곽요소의 외경과 보강링의 내경은 같다. 이 접촉조건을 각 외곽요소에 대해 적용한다. 이를 위해 보강링에 대한 계산은 Fig. 2와 같이 n 개의 층으로 나누어 적용한다. i 번째 외곽요소의 접촉조건은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} r_o + \delta + U_i &= r_o + U_i^s \\ \delta + U_i &= U_i^s \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, δ 는 다이 인서트와 보강링의 간섭량이며, U_i^s 는 보강링의 i 번째 층에서 내경의 변위이다. 이는 Lamé 식을 이용하여 계산된다.

$$U_i^s = A \cdot P_i^r \quad (3)$$

여기서, A 는 보강링의 갯수, 치수 및 물성치에 따른 값으로 결정되는 상수이며, P_i^r 은 보강링에 작용하는 접촉압력의 반경방향 성분이다. 마찰을 고려한 P_i^s 와 P_i^r 의 관계는 아래와 같다.

$$P_i^r = P_i^s \cdot (\cos\theta + \mu \cdot \sin\theta) \quad (4)$$

여기서 θ 는 다이 인서트와 보강링이 경사각 각도이며, μ 는 다이 인서트와 보강링 사이의 마찰계수이다. 마찰은 비선형이므로 식(4)의 부호는 정확한 것이 아니다. 그러나 보강링과 다이 인서트를 하나의 요소로 생각할 때, 식(4)를 얻을 수 있다.

보강링이 한 개인 경우, 내측 반경이 r_i , 외측

반경이 r_2 , 보강링의 탄성계수 E , 포아송비를 ν 라 하면 A 는 아래와 같다.

$$A = \frac{r_1^3}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left((1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) \quad (5)$$

식(2)와 같은 n 개의 접촉조건식에 식(1), 식(3)과 식(4)를 대입하면, 외곽요소에 작용하는 접촉압력, P^* 에 대한 선형 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} D_1 & U_1^2 & \dots & U_1^n \\ U_2^1 & D_2 & \dots & U_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^1 & U_n^2 & \dots & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ \vdots \\ P_n^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta + U_1^f \\ \delta + U_2^f \\ \vdots \\ \delta + U_n^f \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 D_i 는 아래와 같다.

$$D_i = U_i^i - A(\cos\theta + \mu \sin\theta) \quad (7)$$

식(6)을 구성하기 위해서, 다이 인서트 모델을 $n+1$ 번 유한요소 해석해야 한다. 그러나 유한요소 모델은 같고 하중조건만 변함으로, 개발된 탄성 유한요소 프로그램에선 선형 연립방정식(Symmetric Banded Matrix Solver with Multiple Right Sides)⁽⁹⁾를 사용하였다.

식(6)의 연립방정식을 풀어 외곽요소에 작용하는 접촉압력, P^* 를 계산하고 이를 작용시켜 다이 인서트를 유한요소법으로 해석하였다.

2.3 ANSYS 를 이용한 해석과의 비교

ANSYS 로 해석하기 위한 유한요소 모델(FE-model)은 Fig. 3 과 같다. 보강링과 다이 인서트사이의 접촉을 접촉요소(contact48 element)로 모델링 하였다.

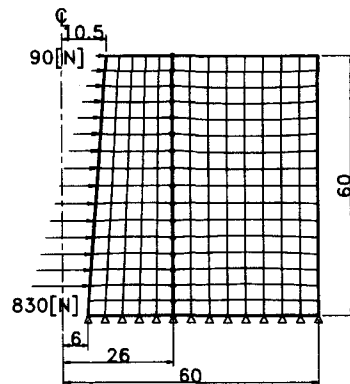


Fig. 3 FE-model for the analysis with ANSYS.

먼저, 계산된 접촉압력을 본 연구의 결과와 ANSYS 해석결과를 Fig. 4 에 비교한다.

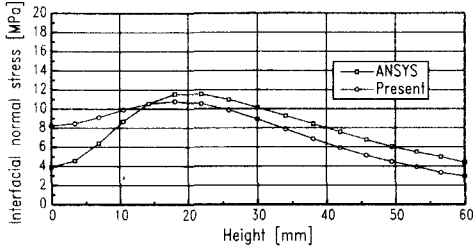
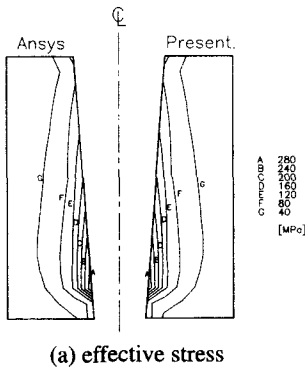


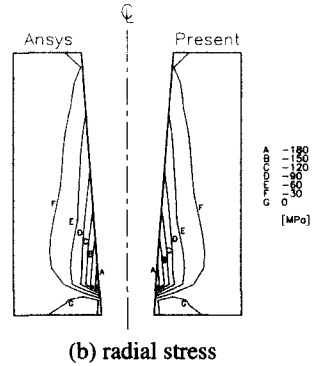
Fig. 4 Normal stress on the interface between the die insert and the stress ring.

Fig. 4 에서와 같이, 제안된 방법으로 계산된 접촉압력은 다이 인서트와 보강링 경계면에서 높이 0-10mm 인 부분에서 약간의 차이를 보인다. 이 부분에서는, 다이 인서트에 작용하는 하중이 변화되는 부분이다. 본 연구에서 제안된 방법이 접촉면에서의 전단력(마찰력)을 정확히 고려하지 못한 것과 Lamé 식의 적용을 위해 축방향 변위의 중첩 없이 반경방향 변위의 중첩으로만 해석한 결과 이와 같은 오차를 가지고 있으나, 제안된 방법과 ANSYS 해석으로 얻은 다이 인서트의 응력분포를 Fig. 5 에서 비교한다.

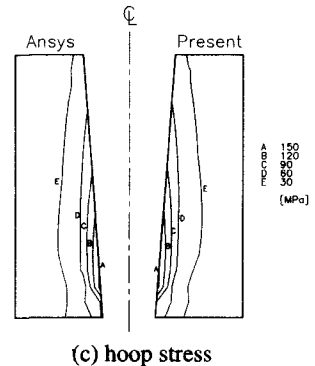
Fig. 5(a)는 등가응력(effective stress)을, (b)는 반경방향 응력(radial stress)을 나타내며, (c)는 원주방향 응력(hoop stress)을 나타낸다. Fig. 4 와 같이, 다이 인서트와 보강링의 경계면에서 접촉압력이 높이 0-10mm 인 부분에서 다소 차이가 있음에도 다이 인서트의 응력분포는 거의 일치함을 알 수 있다. 최대값 역시 잘 일치하며 등가응력은 0.89%, 반경방향 응력은 0.15% 원주방향 응력은 2.63%의 오차를 가진다.



(a) effective stress



(b) radial stress



(c) hoop stress

Fig. 5 Distribution of stresses on the die insert.

(Left: ANSYS and Right : Present Method)

3. 강소성 유한요소법을 이용한 전방압출 공정의 성형해석

3.1 강소성 유한요소법의 정식화

강소성 유한요소법의 정식화⁽¹⁰⁾는 잘 알려져 있다.

비압축성 조건을 고려하기 위하여 벌칙함수, $K(=10^6)$ 를 도입한 강소성 재료에 대한 범함수의 일차변분은 다음과 같다.

$$\delta\pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} dV + K \int_V \bar{\epsilon}_v \delta \bar{\epsilon}_v dV - \int_{S_f} \bar{\mathbf{i}}_i \delta v_i dS = 0 \quad (8)$$

여기서, $\bar{\sigma}$ 는 유효응력, $\bar{\epsilon}$ 는 유효변형률속도, $\bar{\mathbf{i}}_i$ 는 표면력, v_i 는 절점속도이다.

식(8)은 유한요소 분할화 과정을 거치면 절점속도가 미지수인 비선형 방정식으로 변환되고 이를 뉴턴-랩슨법(Newton-Raphson Method)을 이용하여 반복계산을 통하여 수렴된 해를 구하며, 초기 속도장은 직접반복법(Direct Iteration Method)을 이

용하여 구한다.

마찰력 계산을 위하여 Chen 등⁽¹¹⁾이 제안한 다음 식을 이용하였다.

$$f = -m \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \left[\frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{|V_r|}{a} \right) \right] \frac{V_r}{|V_r|} \quad (9)$$

여기서, V_r 은 상대속도이며, m 은 마찰상수이며 a 는 대단히 작은 수(10^{-4})이다.

3.2 축대칭 전방압출 공정의 성형해석

개발된 강소성 유한요소 코드를 이용하여 축대칭 냉간 전방압출 공정을 해석 및 비교하였다⁽¹²⁾⁽¹³⁾.

가공소재는 풀림처리된 AISI 1010 강이며 유동응력식은 다음과 같다⁽²⁾.

$$\bar{\sigma} = 715.95 \bar{\epsilon}^{0.22} \quad [\text{MPa}] \quad (10)$$

초기소재의 직경은 35.2mm, 높이는 35.2mm 인 봉재이다. 압출공정의 단면적 감소율은 50.0%이다. 시뮬레이션시 마찰상수는 $m=0.15$ 로 하였다.

금형의 치수는 Fig. 6⁽²⁾과 같다.

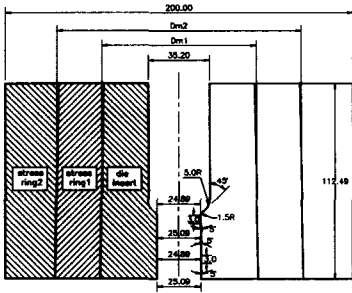


Fig. 6 Dimension of forward cold extrusion die.

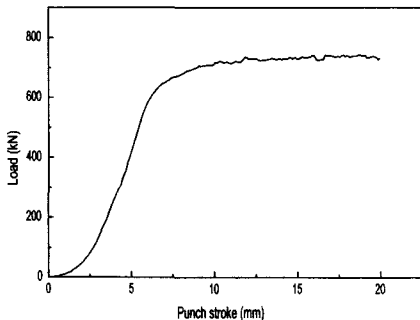


Fig. 7 Load-stroke diagram of the extrusion.

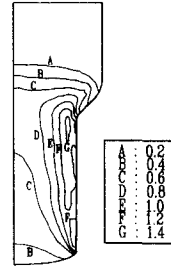


Fig. 8 Distribution of effective strain.

Fig. 7 과 Fig. 8 은 강소성 유한요소 해석결과이다. Fig. 7 은 하중-변위 선도를 나타낸다. 초기에 압출하중이 증가한 후 정상상태에 도달하는 전형적인 냉간 압출공정의 하중-변위 선도를 얻었다.

Fig. 8 은 강소성 유한요소법을 이용한 성형해석 결과로 소재의 변형을 분포를 보인다. 성형부를 빠져나온 소재의 변형을 분포가 점차 길이방향으로 일정해지고 있으므로 정상상태가 됨을 알 수 있다.

3.3 냉간압출시 다이 인서트의 작용력

본 연구에서는, 소재의 절점력(nodal force)을 사상(mapping)하여 다이 인서트의 절점력을 계산하는 방법은 Yang 등⁽⁸⁾이 제안한 방법을 따랐다. 냉간 압출공정에서 다이 인서트에 작용하는 하중을 Fig. 9 에 보인다.

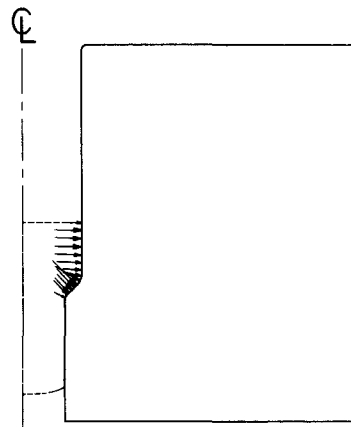


Fig. 9 Distribution of nodal force on the die set.

4. 결과 및 고찰

4.1 보강링이 한 개인 경우의 응력해석

예압된 금형의 응력해석 과정에 따라 Table 1 (2)과 같이 다이 인서트의 재질이 다른 두 가지 경우에 대해 해석하고자 한다. 각각 Dm1 이 99.2mm 이고 간섭량은 0.40mm, Dm1 이 76.2mm 이고 간섭량은 0.24856mm 이다. 다이 인서트에 대한 보강후와 압출시의 응력분포를 Fig. 10-11 에 각각 나타낸다.

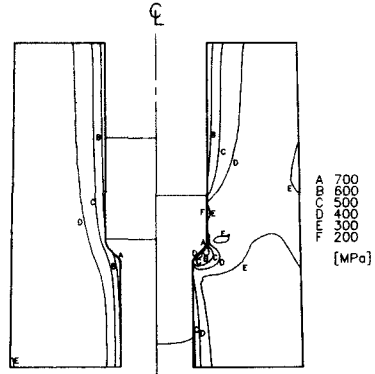
Table 1 Material properties of the dies with one stress ring(2).

Case		Mat.	HrC	v	E(MPa)	S _y (MPa)
1	Die Insert	SKD11	62	0.3	208000.0	2150.0
	Stress Ring	SKD61	42	0.3	212000.0	1100.0
2	Die Insert	GTi50	87	0.22	540000.0	3300.0
	Stress Ring	SKD61	42	0.3	212000.0	1100.0

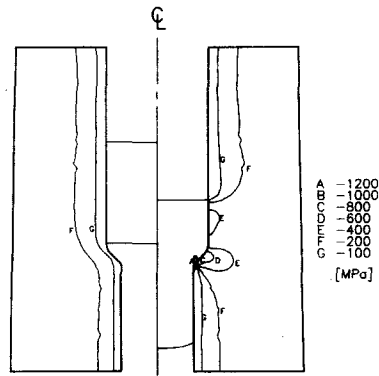
Fig. 10(a)는 등가응력 분포를 나타낸다. 금형인서트의 최대응력값이 모두 재료의 항복응력을 넘지 않았다. 또한 Fig. 10(b)와 (c)에는 반경방향 응력과 원주방향 응력을 나타낸다.

Fig. 11(a)는 등가응력 분포를 나타낸다. 금형인서트의 최대응력값이 항복응력을 넘지 않았다. 또한 Fig. 11(b)와 (c)에는 반경방향 응력과 원주방향 응력을 나타낸다. 일반적으로 사용하는 금형재료는 압축 항복강도보다 인장 항복강도가 낮으므로 금형에 압축응력이 작용하는 것이 유리하다. 특히 경우 2와 같이 초경재료가 사용될 땐 압축응력이 발생하도록 설계해야 한다.

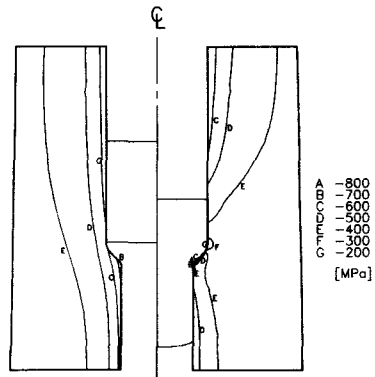
Fig. 12 에 경우 2의 정수압 응력을 나타낸다. Fig. 12와 같이, 끼워박음후(after shrink fit)와 압출 공정시에 금형에 발생하는 정수압 응력이 압축응력이면, 초경으로 된 다이 인서트가 안전하다.



(a) effective stress

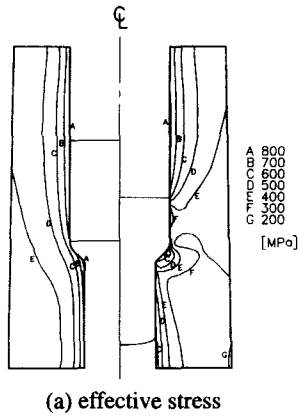


(b) radial stress

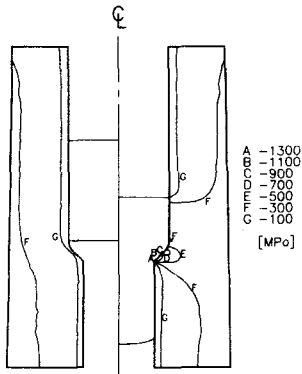


(c) hoop stress

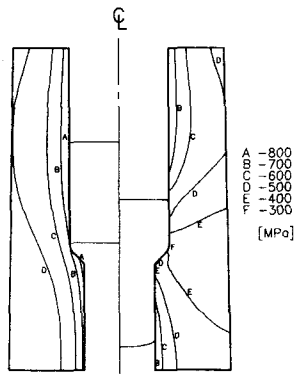
Fig. 10 Distribution of stresses for case 1. (left: after shrink fit, right: during extrusion)



(a) effective stress



(b) radial stress



(c) hoop stress

Fig. 11 Distribution of stresses for case 2. (left: after shrink fit, right: during extrusion)

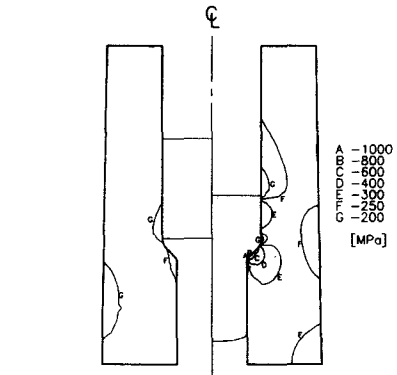


Fig. 12 Distribution of mean stress for case 2. (left: after shrink fit, right: during extrusion)

4.2 보강링이 두 개인 경우의 응력해석

보강링이 두 개인 경우, 금형재질은 Table 2 에 나타낸다. 일반적인 설계방법⁽¹⁴⁾에 따라 금형을 설계하였다. 다이 인서트와 첫 번째 보강링과의 간섭량은 0.2358mm, 두 번째 보강링과 첫 번째 조강링과의 간섭량은 0.1477mm 로 하였고, Dm1 은 67.62mm, Dm2 는 118.34mm 로 하였다. 경사각은 1° 로 하였다.

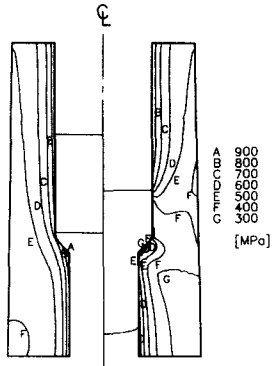
Table 2 Material properties of the dies with two stress rings.

Dies	Mat.	HrC	v	E(MPa)	S _y (MPa)
Insert	SKH9	64	0.3	220000.0	2350.0
Stress Ring 1	SKD11	60	0.3	209000.0	1950.0
Stress Ring 2	SCM4	35	0.3	204000.0	900.0

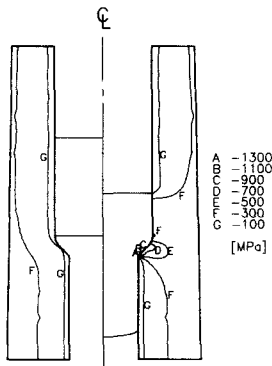
Fig. 13(a)는 등가응력 분포를 보인다. 다이 인서트의 최대응력값이 항복응력을 넘지 않으므로 안전한 금형이라 생각된다. Fig. 13(b)와 (c)에, 반경 방향응력과 원주 방향응력을 나타낸다.

다이 인서트의 재질이 초경이며 보강링을 한 개인 경우 1, 경우 2 를 비교하면 보강링이 두 개인 경우, 모든 응력이 낮은 값을 나타낸다. 이는 설계자가 보다 낮은 응력분포를 얻기 위해, 보강

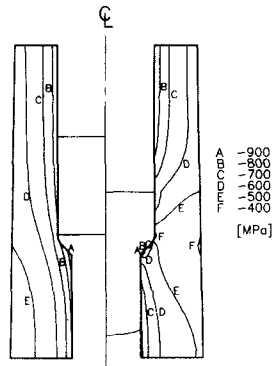
링을 두 개로 하여 설계할 것인지, 보강링을 한 개로 하여 정밀도와 제작비용의 절감을 할 것인지 선택하여야 함을 알 수 있다.



(a) effective stress



(b) radial stress



(c) hoop stress

Fig. 13 Distribution of stress (two stress ring).
(left: after shrink fit, right: during extrusion)

5. 결론

본 연구에서는 예압된 금형을 효과적으로 해석하는 방법을 제안하였다. 다이 인서트는 유한요소법을 이용하여 해석하고 보강링은 Lamé 식을 이용하여 해석하였다. 보강링과 다이 인서트사이의 접촉압력을 근사적으로 계산하는 방법을 제안하였다. 간단한 검증 문제에 대해 적용하고 상용 프로그램인 ANSYS 를 이용하여 해석하고 비교하였다. 그 결과 다이 인서트의 응력분포가 잘 일치함을 알 수 있었다. 제안된 방법으로 보강링이 한 개 및 두 개인 냉간압출 금형을 해석하여 제안한 방법의 적용성을 보였다.

이와 같이 제안한 방법으로 예압된 금형을 해석하면 간단하고 빠르게 금형의 응력해석을 비교적 정확하게 할 수 있다.

참고문헌

1. A. C. Ugural, S. K. Fenster, *Advanced Strength and Applied Elasticity, Second SI Edition*, 1975.
2. 김태형, 김병민, 최재찬, "냉간단조의 정밀도 향상을 위한 금형해석 기법," 한국정밀공학회지, 제 12 권, 제 1 호, pp. 29~37, 1995.
3. 이낙규, 3 차원 강소성 유한요소법을 이용한 치차 단조공정 및 금형해석에 관한 연구, 한국과학기술원, 박사학위논문, 1992.
4. 최종용, 조해용, 박운수, 최재찬, "유한요소법을 이용한 비축대칭 부품의 단조 금형설계," 한국정밀공학회 '98 년도 춘계학술대회논문집, pp. 579~582, 1998.
5. 서대운, 류찬호, 이민철, 전만수, "예압된 냉간 단조 금형 세트의 유한요소해석," 대한기계학회 1998 년도 춘계학술대회논문집 A, pp. 791~795, 1998.
6. 여흥태, 최영, 허관도, "예압된 금형의 유한요소해석," 대한기계학회부산지부 1998 년도춘계학술대회논문집, pp. 228-232, 1998.
7. ANSYS User's Manual, Revision 5.1
8. J. H. Yoon, N. K. Lee, D. Y. Yang, "Treatment of Contact Traction at the Die-Workpiece Interface for the Elastic Analysis of Die Deformation," *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 34, No. 9, pp. 689-702, 1992.
9. Tirupathi R. Chandrupatla and Ashok D. Belegundu,

- Introduction to Finite Elements in Engineering, Prentice Hall, Inc., 1991.
10. S. Kobayashi, S. I. Oh, T. Altan, Metal Forming and the Finite-Element Method, Oxford University Press, 1989.
 11. C. C. Chen and S. Kobayashi, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Ring Compression," Application of Numerical Methods to Forming Process, ASME, AMD, Vol. 28, pp. 163-174, 1978
 12. 김태형, "냉간 금속성형제품의 정밀도 향상을 위한 유한요소법의 활용," 부산대학교 대학원 박사학위논문, pp. 62~64, 1997.
 13. 김태형, 김동진, 김병민, 최재찬, "축대칭 단조 공정에서 최종제품의 탄성회복에 관한 해석," 한국정밀공학회지, 제 13 권 제 9 호, pp. 165~173, 1996.
 14. K. Lange, HandBook of Metal Forming, pp. 15.80-15.90, 1985.