

LMI 기법을 이용한 시간지연 대규모 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성

論 文
48A - 10 - 16

Robust Stability of Uncertain Linear Large-scale Systems with Time-delay via LMI Approach

李 喜 松* · 金 鎮 勳**
(Hee-Song Lee* · Jin-Hoon Kim**)

Abstract - In large-scale systems, we frequently encounter the time-delay and the uncertainty, and these should be considered in the design of controller because these are the source of the degradation of the system performance and instability of system. In this paper, we consider the robust stability of the linear large scale systems with the uncertainties and the time-delays. The considered uncertainties are both structured uncertainty and the unstructured uncertainty. Also, the considered time-delays are time-varying having finite time derivative limits. Based on the Lyapunov theorem and the linear matrix inequality(LMI) technique, we present two sufficient conditions that guarantee the robust stability of the system. The conditions are expressed as the LMI forms which can be easily checked their feasibility by using the well-known LMI control toolbox. Finally, we show by two examples that our results are less conservative than the previous results.

Key Words : Large-scale system, Time-delay, Uncertainty, Lyapunov theorem, Linear matrix inequality(LMI)

1. 서 론

설계된 시스템과 실제 시스템간에는 피할 수 없는 차이가 발생하는데 이러한 차이의 대표적인 원인으로 불확정성과 시간지연이 있다. 이러한 불확정성과 시간지연의 존재는 시스템의 성능저하 뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하는 경우가 일반적이다. 시스템에 불확정성이 포함되어더라도 시스템의 안정성이 보장되는 성질을 강인 안정성이라 하며, 시스템의 안정성을 보장하는 불확정성의 최대 허용 범위를 찾아내는 것을 강인 안정성 해석이라 한다[1, 2].

산업 공정시스템이나 네트워크, 전력, 교통망 시스템에서 흔히 접할 수 있는 대규모 시스템의 경우, 시스템의 내부 구조가 크고 복잡하며 변수가 많은 시스템으로 연관되어 있는 다수의 보조 시스템(subsystems)으로 이루어져 있다. 특히 이들 보조 시스템간의 데이터 교환 시에는 전송시간에 따른 시간지연이 존재하게 된다. 또한 시스템의 변화, 시스템 모델링시의 근사화, 그리고 외부 노이즈 및 외란 등에 의한 불확정성은 피할 수 없다. 따라서 이러한 시간지연 및 불확정성을 갖는 대규모 시스템의 강인 안정성 해석과 설계에 관한 연구는 매우 중요하며 현재 매우 활발히 연구가 진행되고 있다[3]-[10].

시간 지연을 갖는 대규모 시스템에 관한 연구로는 Mori 등[3]이 comparison 이론과 M-행렬을 이용한 시스템의 안정성

을 보장하는 조건을 제시함으로써 시작되었다. 이후 Lee 등[4]과 Trinh 등[5]은 행렬 Riccati 방정식의 해를 이용하여 대규모 시간지연 시스템의 제어기 설계를 다루었고, Xuf[6]은 Razumikhin 이론과 M-행렬을 적용하여 안정성을 보장하는 충분조건을 제시하였다. 근래에는 시간지연 뿐만 아니라 불확정성도 포함된 대규모 시스템의 강인 안정성에 관한 연구가 진행되어지고 있다. 대표적으로 Tsay 등[7]은 matrix measure를 이용해 시스템의 안정성을 보장하는 시간 지연의 바운드를 구하는 조건을 제시하였고, Wang 등[8]은 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한값(upper bound)을 구하는 조건을 제시하였다. 또한, Wang 등[8]의 결과를 향상시킨 Schoen[9]과 Xu[10]의 연구가 발표되었다.

최근에는 Boyd 등[11]이 제시하여 많은 각광을 받고 있는 LMI(Linear matrix inequality) 기법을 이용하여 시스템의 설계나 해석을 하고 있다[12][13]. LMI는 효과적인 알고리즘을 이용해 원하는 파라미터와 해를 구할 수 있을 뿐만 아니라, 여러 가지 선형 제약조건들(constraints)을 쉽게 다룰 수 있다는 장점을 이용해 많은 선형 시스템 문제에서 이용되고 있지만 시스템의 변수가 많고 복잡하며 연관되어 있는 대규모 시간지연 시스템에 적용된 경우는 찾아보기 힘든 것이 사실이다.

본 논문에서는 시변 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 시스템의 강인 안정성을 다룬다. 고려된 불확정성은 노음 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성과 불확정성의 구조가 알려진 구조적 불확정성이고, 또한 시간지연은 시변이며 이의 미분의 상한은 알려진 경우이다. 주요결과에서는 Lyapunov 안정성 이론과 LMI 기법을 이용하여 시변 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 시스템의 강인 안정성을 보장하는 새로운 충분조건을 제시한다. 제시된 조건은 LMI 형태이어서 이의 만

* 正 會 員 : 忠 北 大 大 學 院 電 氣 工 學 科 博 士 課 程
** 正 會 員 : 忠 北 大 工 大 電 氣 電 子 工 學 部 助 教 授 · 工 博
接 受 日 字 : 1999 年 5 月 24 日
最 終 完 了 : 1999 年 9 月 10 日

족 여부를 쉽게 확인할 수 있다는 장점이 있다. 마지막으로 수치 예제에서는 기존의 결과들과의 비교를 통하여 새로이 제시된 강인 안정성 조건이 기존의 결과들보다 우수함을 보인다.

이 논문에서는 $(\cdot)^T$ 는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고, 대칭(symmetric)행렬 $V, W \in R^{n \times n}$ 에 대하여 $V > W$ 또는 $V \geq W$ 는 각각 행렬 $V - W$ 가 양확정(positive definite) 또는 준양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 그리고 $\|\cdot\|$ 는 Euclidean 벡터 노름 또는 이의 유사(induced) 행렬 노름을 말하며, 끝으로, I_n 은 $n \times n$ 항등(identity)행렬이다.

2. 문제 기술

연관된 N 개의 보조시스템 $S_i, i=1, 2, \dots, N$ 로 이루어져 있는 시변 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 시스템 S 를 고려하자. 그리고 각각의 보조 시스템이 다음으로 기술된다 고 하자[8]-[10].

$$S_i : \dot{x}_i(t) = (A_i + E_i(t))x_i(t) + \sum_{j=1}^N A_{ij}x_j(t - \tau_{ij}(t))$$

$$i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

여기서 $x_i(t) \in R^{n_i}$ 는 보조시스템 S_i 의 상태이고 A_i 는 안정한 행렬이며 $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$ 는 보조 시스템간의 연관된 상수 행렬이다. 그리고 시변 시간지연 $\tau_{ij}(t)$ 는 유한하며, 즉, $0 \leq \tau_{ij}(t) < \infty, i, j=1, 2, \dots, N$, 이의 시간 미분은 다음을 만족한다.

$$\max(\dot{\tau}_{ij}(t)) = h_{ij} < 1, \quad \forall i, j=1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

그리고 $E_i(t) \in R^{n_i \times n_i}$ 은 시변 불확정성 행렬로 다음 식(3)을 만족하는 비구조적 불확정성과

$$\|E_i(t)\| \leq \eta_i, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

다음 식(4)를 만족하는 구조적 불확정성을

$$E_i(t) = \sum_{p=1}^M k_{ip}(t)E_{ip}, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

대상으로 한다. 여기서 η_i 는 양의 상수이고, $E_{ip} \in R^{n_i \times n_i}$ 는 알려진 상수 행렬이며 $k_{ip}(t)$ 는 시변 파라미터이다.

본 논문에서는 시변 시간지연을 갖는 대규모 시스템(1)에서 불확정성이 (3)또는 (4)로 주어진 경우 이 시스템의 강인 안정성을 만족하는 조건을 선형 행렬 부등식 형태로 제시한다. 다음은 다음에 제시되는 주요결과의 증명에 이용되는

보조정리들이다.

보조정리 1[14] : 임의의 행렬 X, Y 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\|XY\| \leq \|X\| \cdot \|Y\|.$$

보조정리 2[14] : 임의의 두 행렬 X, Y 와 양의 스칼라 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음이 성립한다

$$X^T Y + Y^T X \leq \epsilon X^T X + \frac{1}{\epsilon} Y^T Y.$$

보조정리 3[11] : 임의의 대칭 행렬 Q, R 에 대하여 다음의 두 선형 행렬 부등식은 동치(equivalent)이다.

$$i) \quad Q + S^T R^{-1} S < 0, \quad R > 0,$$

$$ii) \quad \begin{bmatrix} Q & S^T \\ S & -R \end{bmatrix} < 0.$$

3. 주요 결과

주요 결과는 다음의 정리 1과 정리 2로 기술된다. 먼저 정리 1은 비구조적 불확정성(3)의 경우이고, 정리 2는 구조적 불확정성(4)의 경우 대규모 시간지연 불확정성 선형 시스템(1)의 강인 안정성을 보장하는 조건이다.

정리 1 : 시간지연 (2)를 만족하고 불확정성 (3)을 갖는 대규모 시스템(1)을 생각하자. 그리고 $h_{ij}, (i, j=1, 2, \dots, N)$ 는 (2)를 만족한다고 하자. 만약 다음에 오는 선형 행렬 부등식을 만족하는 양의 대칭행렬 $P_i, Q_{ij}, (i, j=1, 2, \dots, N)$ 와 양의 스칼라 $\gamma_i > 0 (i=1, 2, \dots, N)$ 가 존재하면

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N Q_{ji} + \gamma_i \eta_i^2 I_n & P_i & M_i \\ P_i & -\gamma_i I_n & 0 \\ M_i^T & 0 & -\Lambda_i \end{bmatrix} < 0,$$

$$i=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

시간지연(2)를 만족하는 비구조적 불확정성(3)을 갖는 대규모 시스템(1)은 점근적으로 안정하다. 여기서 행렬 $M_i \in R^{n \times (nN)}$ 과 Λ_i 는 다음으로 주어진다.

$$M_i = [P_i A_{i1} : P_i A_{i2} : \dots : P_i A_{iN}],$$

$$\Lambda_i = \text{Diag}((1 - h_{i1})Q_{i1}, (1 - h_{i2})Q_{i2}, \dots, (1 - h_{iN})Q_{iN}).$$

증명: 먼저, $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ 라하고, $V(x)$ 를 다음으

로 정의한다.

$$V(x) = \sum_{i=1}^N V_i(x)$$

$$V_i(x) = x_i^T(t) P_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t x_j^T(s) Q_{ij} x_j(s) ds$$

여기서 $P_i, Q_{ij} > 0, i=1, 2, \dots, N$ 는 조건(5)를 만족하는 양행렬이다. 다음으로 시스템 (1)의 궤적에 따른 V_i 의 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq x_i^T(t) [A_i^T P_i + P_i A_i] x_i(t) + 2x_i^T(t) P_i E_i x_i(t) \\ &\quad + 2x_i^T(t) P_i \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j(t - \tau_{ij}(t)) + \sum_{j=1}^N [x_j^T(t) Q_{ij} x_j(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau}_{ij}(t)) x_j^T(t - \tau_{ij}(t)) Q_{ij} x_j(t - \tau_{ij}(t))] \\ &= x_i^T(t) [A_i^T P_i + P_i A_i] x_i(t) + 2x_i^T(t) P_i E_i x_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N [2x_i^T(t) P_i A_{ij} Q_{ij}^{-\frac{1}{2}} Q_{ij}^{\frac{1}{2}} x_j(t - \tau_{ij}(t))] \\ &\quad + \sum_{j=1}^N [x_j^T(t) Q_{ij} x_j(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau}_{ij}(t)) x_j^T(t - \tau_{ij}(t)) Q_{ij} x_j(t - \tau_{ij}(t))] \end{aligned} \quad (6)$$

그리고 보조정리2를 이용하여 위 식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq x_i^T(t) \left[A_i^T P_i + P_i A_i + \frac{1}{\gamma_i} P_i P_i + \gamma_i \eta_i^2 I_n \right] x_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \frac{1}{1-h_{ij}} x_i^T(t) P_i A_{ij} Q_{ij}^{-1} A_{ij}^T P_i x_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N (1-h_{ij}) x_j^T(t - \tau_{ij}(t)) Q_{ij} x_j(t - \tau_{ij}(t)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N [x_j^T(t) Q_{ij} x_j(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau}_{ij}(t)) x_j^T(t - \tau_{ij}(t)) Q_{ij} x_j(t - \tau_{ij}(t))] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\leq x_i^T(t) \left[A_i^T P_i + P_i A_i + \frac{1}{\gamma_i} P_i P_i + \gamma_i \eta_i^2 I_n \right] x_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \frac{1}{1-h_{ij}} x_i^T(t) P_i A_{ij} Q_{ij}^{-1} A_{ij}^T P_i x_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N x_j^T(t) Q_{ij} x_j(t). \end{aligned}$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^N \dot{V}_i(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \left[A_i^T P_i + P_i A_i + \frac{1}{\gamma_i} P_i P_i + \gamma_i \eta_i^2 I_n \right] x_i(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{1-h_{ij}} x_i^T(t) P_i A_{ij} Q_{ij}^{-1} A_{ij}^T P_i x_i(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j^T(t) Q_{ij} x_j(t) \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \left[A_i^T P_i + P_i A_i + \frac{1}{\gamma_i} P_i P_i + \gamma_i \eta_i^2 I_n \right] x_i(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{1-h_{ij}} P_i A_{ij} Q_{ij}^{-1} A_{ij}^T P_i \right] x_i(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \left[\sum_{j=1}^N Q_{ij} \right] x_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \left[A_i^T P_i + P_i A_i + \frac{1}{\gamma_i} P_i P_i + \gamma_i \eta_i^2 I_n \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \frac{1}{1-h_{ij}} P_i A_{ij} Q_{ij}^{-1} A_{ij}^T P_i + \sum_{j=1}^N Q_{ij} \right] x_i(t). \end{aligned}$$

따라서 조건(5)와 보조정리 3에 의하여 모든 $x_i(i=1, 2, \dots, N)$ 가 영벡터가 아닌한 $\dot{V}(x) < 0$ 이다. 따라서 Lyapunov 안정성 정리에 의하여 시스템 (1)은 안정하다. ▲▲▲

다음에 오는 정리 2는 구조적 형태의 불확정성(4)를 갖는 대규모 시간지연 선형 시스템(1)의 강인 안정성 조건이다.

정리 2: 시간지연(2)를 만족하고 불확정성 (4)를 갖는 대규모 시스템(1)을 생각하자. 그리고 $h_{ij}(i, j=1, 2, \dots, N)$ 는 (2)를 만족한다고 하자. 만약 다음에 오는 선형 행렬 부등식을 만족하는 양의 대칭행렬 $P_i, Q_{ij}(i, j=1, 2, \dots, N)$ 와 양의 스칼라 $\gamma_i > 0(i, j=1, 2, \dots, N)$ 가 존재하면

$$\begin{bmatrix} H_i & P_i & M_i \\ P_i & -\gamma_i I_n & 0 \\ M_i^T & 0 & -\Lambda_i \end{bmatrix} < 0, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

구조적 불확정성(4)가 존재하는 대규모 시스템(1)은 점근적으로 안정하다. 여기서 행렬 $M_i \in R^{n \times (nM)}$ 과 Λ_i 은 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned} H_i &= A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N Q_{ij} + \gamma_i \sum_{\beta=1}^M k_{i\beta}^2(t) \sum_{\beta=1}^M (E_{i\beta}^T E_{i\beta}), \\ M_i &= [P_i A_{i1} : P_i A_{i2} : \dots : P_i A_{iN}], \\ \Lambda_i &= \text{Diag}((1-h_{i1})Q_{i1}, (1-h_{i2})Q_{i2}, \dots, (1-h_{iN})Q_{iN}). \end{aligned}$$

증명: 증명은 정리1의 증명과 같은 방법으로 하면 된다. 단지, 정리 1의 증명에서는 수식 (6)에서 (7)로 넘어 가는 과정에 다음의 부등식이 이용되었다.

$$2x_i^T(t) P_i E_i x_i(t) \leq x_i^T(t) \left(\frac{1}{\gamma_i} P_i P_i + \gamma_i \eta_i^2 I_n \right) x_i(t).$$

그러나 구조적 불확정성인 경우에는 다음이 성립하므로

$$\begin{aligned}
 2x_i^T(t)P_iE_ix_i(t) &= 2x_i^T(t)P_i\left(\sum_{p=1}^M k_{ip}(t)E_{ip}\right)x_i(t) \\
 &\leq x_i^T(t)\left(\frac{1}{\gamma_i}P_iP_i + \gamma_i\left(\sum_{p=1}^M k_{ip}(t)E_{ip}\right)\left(\sum_{p=1}^M k_{ip}(t)E_{ip}\right)\right)x_i(t) \\
 &\leq x_i^T(t)\left(\frac{1}{\gamma_i}P_iP_i + \gamma_i\left(\sum_{p=1}^M k_{ip}^2(t)\right)\left(\sum_{p=1}^M E_{ip}^TE_{ip}\right)\right)x_i(t).
 \end{aligned}$$

이를 이용하여 정리 1의 증명 과정을 거치면 조건(8)을 쉽게 얻을 수 있으므로 자세한 것은 생략한다. ▲▲▲

4. 수치 예 제

위의 제시된 결과들을 기존에 제시된 결과와 비교함으로써 이의 유용성을 보이기 위해 기존에 사용된 다음과 같은 시간 지연을 갖는 대규모 불확정성 시스템을 고려한다[8]-[10].

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= \left(\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} + E_1(t)\right)x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}x_1(t-\tau_{11}) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}x_2(t-\tau_{12}) + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}x_3(t-\tau_{13}) \\
 \dot{x}_2(t) &= \left(\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} + E_2(t)\right)x_2(t) + \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}x_1(t-\tau_{21}) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}x_2(t-\tau_{22}) + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}x_3(t-\tau_{23}) \\
 \dot{x}_3(t) &= \left(\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + E_3(t)\right)x_3(t) + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}x_1(t-\tau_{31}) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}x_2(t-\tau_{32}) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}x_3(t-\tau_{33}). \quad (9)
 \end{aligned}$$

먼저 불확정성 $E_i(t)$ 가 노음 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성(3)이라 하자. 여기서 불확정성 파라미터가 3개이므로 이들의 허용 범위는 공간상의 폐 공간이다. 정리 1을 이용하여 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 허용 범위를 구하자.

먼저 $h_{ij}=0.1, i, j=1, 2, 3$ 이라 가정하고 강인 안정성의 범위를 구해보자. 불확정성 파라미터 η_1, η_2, η_3 가 3개이므로 쉽게 $\eta = \max(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 라하고 η 의 최대 허용치를 구하면 다음의 불확정성 허용 범위를 얻는다.

$$\max(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \leq 1.4431.$$

이는 공간상에서 정6면체이다. 그러나 기존의 결과는 시간 지연이 시불변인 경우이므로, 이와 비교하기 위하여 $h_{ij}=0, i, j=1, 2, 3$ 라하고 위와 같은 방법으로 구하면 다음의 불확정성 허용 범위를 얻는다.

$$\max(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \leq 1.5888.$$

표 1에는 기존의 결과들과 본 논문에서 얻어진 η_1, η_2, η_3 를 각각 제시하였다. 비교를 위하여 기존의 결과 중 가장 좋은 결과인 Xu[10]의 결과에서 두 개 파라미터는 같게 하고

다른 하나 파라미터의 최대허용치를 구한 것을 제시하였다. 불확정성 파라미터가 3개이므로 이들을 공간에 표시하면 6각형의 내부가 된다. 따라서 새로이 제시되는 불확정성의 허용 범위는 표1에 있는 새로운 결과 4개의 6각형 내부가 된다. 불확정성이 4개의 6각형 중 하나에라도 속하면 강인 안정성을 만족하므로 제시된 강인 안정성을 보장하는 불확정성은 4개의 6각형의 합집합(Union set)이 되는 것이다. 이 강인 안정성을 만족하는 불확정성의 최대 허용 범위를 공간에 그린 것이 다음의 그림 1에 있다. 그림 1에서 진한 부분이 기존의 강인 안정성 범위이고, 연한 부분이 새로이 제시된 강인 안정성 범위이다. 그리고 쉽게 새로이 제시된 결과는 기존의 결과를 포함하는 더 큰 공간임을 알 수 있다.

표 1 강인 안정성 보장 비구조적 불확정성 범위
Table 1 Robustness bounds for systems with unstructured uncertainty

	η_1	η_2	η_3
Wang et al. [8]	0.3117	0.5833	0.3117
Schoen and Geering [9]	0.6336	0.6700	0.2850
Xu et al. [10]	0.9802	1.4222	1.0549
새로운 결과 (정리1)	1.5888	1.5888	1.5888
	1.8693	1.4222	1.0549
	0.9802	3.5730	1.0549
	0.9802	1.4222	1.9614

다음으로 불확정성 $E_i(t)$ 가 다음과 같이 기술되는 구조적 불확정성이라 하자[8][10].

$$\begin{aligned}
 E_1(t) &= \sum_{p=1}^3 k_{1p}(t)E_{1p} \\
 &= k_{11}(t)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + k_{12}(t)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + k_{13}(t)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 E_2(t) &= \sum_{p=1}^3 k_{2p}(t)E_{2p} \\
 &= k_{21}(t)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + k_{22}(t)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_{23}(t)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 E_3(t) &= \sum_{p=1}^3 k_{3p}(t)E_{3p} \\
 &= k_{31}(t)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_{32}(t)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + k_{33}(t)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서 구하고자하는 불확정성 파라미터 $\sum_{p=1}^3 k_{1p}^2, \sum_{p=1}^3 k_{2p}^2, \sum_{p=1}^3 k_{3p}^2$ 3개이므로 이들의 허용 범위는 공간상의 폐 공간이

다. 정리 2를 이용하여 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 허용 범위를 구해보자. 앞에서 구해본 비구조적 불확정성일 때의 경우와 같은 방법으로 먼저 $h_{ij}=0.1, i, j=1, 2, 3$ 이라고 하고 강인 안정성의 범위를 구하면 다음을 얻는다.

$$\max \left(\sum_{\beta=1}^3 k_{1\beta}^2, \sum_{\beta=1}^3 k_{2\beta}^2, \sum_{\beta=1}^3 k_{3\beta}^2 \right) \leq 0.1158.$$

그러나 기존의 결과는 시간지연이 시불변이므로 비교를 위하여 $h_{ij}=0, i, j=1, 2, 3$ 이라 가정하면 다음을 얻는다.

$$\max \left(\sum_{\beta=1}^3 k_{1\beta}^2, \sum_{\beta=1}^3 k_{2\beta}^2, \sum_{\beta=1}^3 k_{3\beta}^2 \right) \leq 0.1471.$$

표 2에는 기존의 결과들과 얻어진 $\sum_{\beta=1}^3 k_{1\beta}^2, \sum_{\beta=1}^3 k_{2\beta}^2, \sum_{\beta=1}^3 k_{3\beta}^2$ 의 최대 허용치를 제시하였다. 앞에서와 마찬가지로 비교를 위하여 가장 좋은 결과인 Xu[10]의 결과에서 두 개 파라미터는 같게 하고 다른 하나 파라미터의 최대 허용치를 구한 것을 표 2에 제시하였다. 불확정성 파라미터가 3개이므로 이들을 공간에 표시하면 6각형의 내부가 된다. 따라서 새로이 제시되는 불확정성의 허용 범위는 표2에 있는 새로운 결과의 4개의 6각형 내부가 된다. 불확정성이 4개의 6각형 중 하나에라도 속하면 강인 안정성을 만족하므로 제시된 강인 안정성을 보장하는 불확정성은 4개의 6각형의 합집합(Union set)이 되는 것이다. 이 강인 안정성을 만족하는 불확정성의 최대 허용 범위를 공간에 그린 것이 다음의 그림 2에 있다. 그림 2에서 진한 부분이 기존의 강인 안정성 범위이고, 연한 부분이 새로이 제시된 강인 안정성 범위이다. 그리고 제시된 결과는 기존의 결과를 포함하는 더 큰 공간임을 알 수 있다.

표 2 강인 안정성 보장 구조적 불확정성 범위
Table 2 Robustness bounds for systems with structured uncertainty

	$\sum_{\beta=1}^3 k_{1\beta}^2$	$\sum_{\beta=1}^3 k_{2\beta}^2$	$\sum_{\beta=1}^3 k_{3\beta}^2$
Wang et al.[8]	0.0091	0.0432	0.0092
Xu et al. [10]	0.0611	0.1644	0.0803
새로운 결과 (정리2)	0.1471	0.1471	0.1471
	0.1641	0.1644	0.0803
	0.0611	2.2543	0.0803
	0.0611	0.1644	0.8576

그림 1, 그림 2에서 알 수 있듯이 본 논문에서 제시된 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 허용 범위는 기존의 모든 결과를 포함하면서 기존의 허용 범위 보다 큼을 알 수 있다. 참고로 새로이 제시되는 결과를 이용하여 강인 안정성을 보

장하는 불확정성에 대한 범위를 보이기 위해서는 불확정성 파라미터가 3개이므로 이들을 3차원 상의 원점을 포함하는 연속인 폐 공간(closed space)을 구하면 된다. 그리고 주어진 불확정성의 상한이 강인 안정성을 보장하는 지 여부는 정리 1과 정리 2의 LMI의 만족 여부로 쉽게 확인할 수 있다. 위의 수치예제 계산은 잘 알려진 MATLAB™의 LMI 제어 툴[11]을 이용하였다.

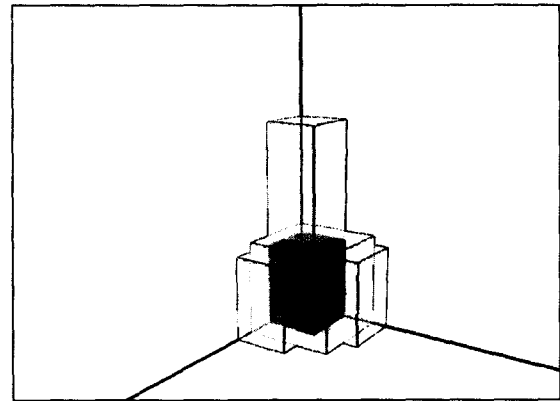


그림 1 3D 공간에서의 비구조적 불확정성 범위 비교
Fig. 1 Comparison of unstructured uncertainty bounds in 3D space

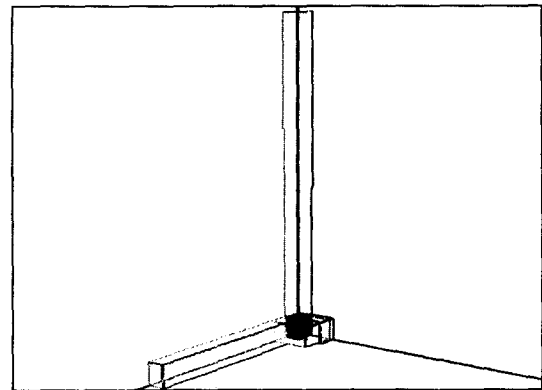


그림 2 3D 공간에서의 구조적 불확정성 범위 비교
Fig. 2 Comparison of structured uncertainty bounds in 3D space

5. 결론

이 논문에서는 Lyapunov 안정성 이론과 선형 행렬 부등식(LMI) 기법을 이용해 시변 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 선형시스템의 안정성을 보장하는 강인 안정성 조건을 제시하였다. 고려된 불확정성은 노음 바운드만이 알려진 경우 비구조적 불확정성과 불확정성의 구조가 알려진 구조적 불확정성에 대해 각각 해석하였고 시간지연은 이의 시간 미분값의 상한이 알려져 있는 시변 시간지연을 고려하였다. 제시된 조건은 LMI로 나타내지는 충분조건으로 효과적인 알고리즘을 이용하여 원하는 파라미터를 쉽게 구할 수 있다. 마지막으로 수치예제를 통해 주어진 결과의 유용성을 보였다.

참 고 문 헌

[1]R. K. Yedavalli, "Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Models", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.30, pp.577-579, 1985.

[2]E. Cheres, Z. J. Plmor and S. Gutman, "Quantitative Measure of Robustness for Systems Including Delayed Perturbations", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.34, pp.1203-1204, 1989.

[3]T. Mori, N. Fukuma and M. Kuwahar, "Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delays", *Int. J. Control*, vol.32, no.6, pp.1175-1184, 1981.

[4]T. N. Lee and U. L. Radovic, "Decentralized stabilization of linear continuous and discrete-time systems with delays in interconnections", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.33, no.8, pp.757-761, 1988.

[5]H. Trinh and M. Aldeen, "A comment on Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.40, no.5, pp.914-916, 1995.

[6]B. Xu, "On delay-independent stability of large-scale systems with time delay", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.40, no.5, pp.930-933, 1995.

[7]J.-T. Tsay, P.-L. Liu and T.-J. Su, "Robust stability for perturbed large-scale time-delay systems", *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 143, no.3, pp.233-236, 1996.

[8]W. J. Wang, C. C. Song and C. C. Kao, "Robustness bounds for large-scale time-delay systems with structured and unstructured uncertainties", *Int. J. Systems Science*, vol. 22, no.1, pp.209-216, 1991.

[9]G. M. Schoen and H. P. Geering, "A note robustness bounds for large-scale time-delay systems", *Int. J. Systems Science*, vol. 26, no.12, pp.2441-2444, 1995.

[10]B. Xu, Y. Fu and L. Bai, "Further results on robust bounds for large-scale time-delay systems with structured and unstructured uncertainties", *Int. J. Systems Science*, vol. 27, no.12, pp.1491-1495, 1996.

[11]S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[12]E. T. Jeung, D. C. Oh, J. H. Kim and H. B. Park, "Robust controller design for uncertain systems with time delays:LMI Approach", *Automatica*, vol.32, no.8, pp.1229-1231, 1996.

[13]P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math works Inc., Natick, MA, 1995.

[14]A. Wienmann, *Uncertain Models and Robust Control*, Springer-Verlag, 1991.

저 자 소 개



이 희 승 (李 喜 松)

1974년 10월 20일생. 1997년 대전산업대 제어계측공학과 졸업. 1999년 충북대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동 대학원 전기공학과 박사과정.

Tel : (0431) 261-2387, Fax : (0431) 268-2386
E-mail : heeslee@trut.chungbuk.ac.kr



김 진 훈 (金 鎭 勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985-1987년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공학). 1993-1994년 경상대

공대 제어계측공학과 전임강사. 현재 충북대 공대 전기전자공학부 조교수.

Tel : (0431) 261-2387, Fax : (0431) 268-2386
E-mail : jinhkim@cbucc.chungbuk.ac.kr