

심해용 압력용기에 대한 붕괴해석

신 장 용* · 우 중 식*
(99년 10월 4일 접수)

Collapse Analysis for Deep Sea Pressure Vessel

Jang-Ryong Shin* · Jong-Sik Woo*

Key Words : AUV(무인자율잠수정), Collapse Analysis(붕괴해석), Weighted Residual Method(가중잔여법), Associated Legendre Function(유사 르장드르 함수)

Abstract

A deep sea vehicle must be designed to ensure its safety under ultra-high pressure circumstances. If a pressure housing of a deepsea vehicle is collapsed by ultra-high pressure, the deepsea vehicle may be lost.

The objective of this paper is to introduce a design collapse pressure for the deep sea pressure vessel which is composed of one cylinder and two hemispheres. Especially the collapse pressure of hemispherical shell with a hole at top is analyzed by a variational approach (weighted residual method). And for the purpose of design, the safty factor of collapse pressure is presented which is analyzed by interpolation method.

1. 서 론

심해저에는 높은 수압이 작용하는 곳인데 광물 개발, 생태계연구, 해양저 지질연구 등의 목적으로 해양장비를 투입하는 경우가 많아지고 있다.

대우중공업(주) 조선해양부문은 러시아 과학원 산하의 해양기술문제연구소(Institute of Marine Technology Problems)와 공동으로 1996년에 해저 6,000m까지 사용할 수 있는 AUV(Autonomous

Underwater Vehicle)를 개발하였는데, 옥포조선소가 위치한 옥포만에서 50여회 천해 기능시험, 독도 근해 2,300m 해저탐사, 서태평양 5,000m 심해저 기능시험을 통하여 해저면을 촬영하고 각종 자료를 수집하는데 성공함으로써 그 성능을 입증한 바 있다.

OKPO-6000이라고 명명된 이 AUV는 큰 하나의 압력용기 대신에 작은 여러 개의 압력용기(pressure housing)를 사용함으로써 해저 탐사 목

* 정희원, 대우중공업(주)

적에 따라 추가장비가 필요한 경우 해당 장비를 담은 마디(segment)를 쉽게 추가하여 사용할 수 있는 모듈(module)형 구조를 채택하고 있다.

높은 외압을 받는 압력용기는 좌굴에 의해서 붕괴가 발생하기 때문에, 좌굴 안전성 측면에서 설계된다. AUV의 압력용기에는 해수 중에 노출되어서는 안되는 전원 공급장치, 컴퓨터등 각종 전자장비들이 놓이기 때문에 압력용기의 붕괴는 결국 AUV의 총체적인 기능을 마비시키고, AUV를 잃어버리는 결과를 초래한다. 압력용기를 제외한 다른 프레임(frame)은 해수 중에 직접 노출되기 때문에 응력상태가 정적수압(hydrostatic)상태이므로 문제가 없다.

OKPO-6000은 수심 6000m에서 안전하게 작동해야하므로 압력 용기는 약 600bar의 압력을 지지해야 한다. 더욱이 오동작으로 인한 충돌, 온도변화에 의한 응력증가등 사전에 예측할 수 없는 돌발적인 사태 때문에 수심 6000m에서도 600bar 이상의 외력을 받을 수 있다. 이러한 돌발적인 요인들은 설계시 안전계수로서 고려되는데, OKPO-6000의 압력용기는 상온에서 700bar 이상의 정압력에 대해서 안전하도록 설계되었다.

압력용기의 붕괴압력을 예측하기 위해서 본 연구에서는 이론적 해석과 실험적 해석을 동시에 수행하였다. 원통형 셸(cylindrical shell)에 대해서는

von Mises's 붕괴공식을 이용하였고, 중앙에 구멍이 있는 반구형 셸(hemispherical shell)에 대해서는 본 논문에서 이론해석을 수행하였다. 그리고 실측 실험을 통해서 이론적 해석으로 예측한 붕괴압력을 검증하였다.

특히 본 연구에서는 에너지 공급용 구멍이 있는 반구의 붕괴압력에 대한 설계압력을 결정하는 데 주요안점을 두고 5절에서 타당한 설계공식을 유도하였다. 그리고 6절에서는 붕괴실험 결과를 소개했다.

그리고 본문에서는 가능한 수학적 이론의 전개를 피했고 물리적인 의미를 설명하는데 주력했다. 대신 본문에서 생략된 수식 전개과정은 부록에 서술하였다.

2. 무인잠수정의 구조

무인잠수정의 구조를 Fig. 1에 나타내었다. 이 잠수정은 일렬로 서로 연결된 13개의 마디(segment)로 구성되어 있는데, 압력용기가 위치한 각 마디들은 볼트로 연결되어 있다. Body frame과 압력용기 사이의 공간은 수압 600bar를 견디는 고강성 부력재로 채워져 있으며 압력용기들은 이 부력재에 의해 지지되고 있다. Table 1에 segment 목록을 나타내었다.

Table 1 Segment list

Ref. No.	Segment Identifier	Segment Equipment
1	Stern Segment	Four Thrusters
2	High Voltage Power Supply Unit Segment	High voltage power supply unit(HVPSU), Pressure compensator (PC), TV Camera Light, two pressure connectors
3	Transverse Frame	Rope clamp
4	Battery Segment	Eight LR-100 (LR-190) Cells battery
5	Battery Segment	Eight LR-100 (LR-190) Cells battery, two SSS Arrays
6	Still Camera Segment	Still camera
7	Void Segment	Void for Equilibrium(Additional Buoyancy)
8	APS Transceiver Segment	APS Transceiver, two Pressure compensators
9	TV Recorder Segment	TV Recorder, Radio antenna releaser, TV Light
10	Autopilot Unit Segment	Autopilot Computer
11	Transverse Frame	Rope clamp
12	Light Radio Beacon(LRB) Segment	Electronic modules corresponding to the following units:SSS, LRB, OAS, Temperature/ Salinity sensors
13	Bow Segment	Velocity meter, Light beacon, Ballast electromagnets, OAS Transceivers, TV Camera

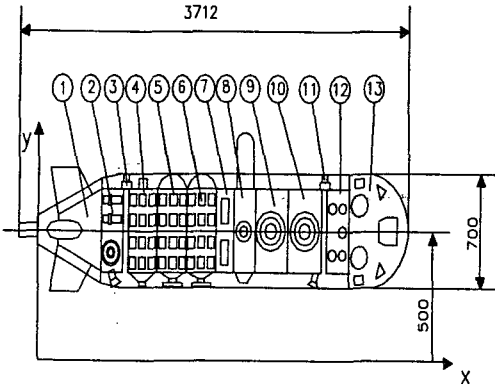


Fig. 1 OKPO-6000 AUV general view

3. 재료시험 결과

재료의 접선계수는 구성관계 $\sigma = \sigma(\epsilon)$ 곡선의 접선기울기로부터 결정되는데, 응력 σ 의 함수로서 $E_t = E_t(\sigma)$ 로 표현된다. Ramberg와 Osgood⁵⁾는 접선계수는 3개의 매개변수 u, w, σ_1 에 의해서 근사적으로 다음과 같이 표시됨을 보였는데, 항복현상을 보이지 않는 재료에 대해서 적합하다고 알려져 있다.

$$E_t = \frac{E}{1 + \frac{u(1-w)}{w} \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^{u-1}} \quad (1)$$

여기서 매개변수 u, w, σ_1, E 는 단축인장시험으로부터 결정된다. 잠수정의 경량화를 위해서, 압력용기는 알루미늄 합금 AL7075-T6으로 만들어졌는데, 단축인장 시험결과, 항복현상이 나타나지 않았기 때문에 접선계수는 (1)식에 의해서 표현될 수 있다.

Fig. 2는 단축 인장시험으로부터 결정된 접선계수를 보여준다. 점 \bullet 는 실험결과를 보여주고, 실선으로 나타낸 곡선은 Ramberg and Osgood curve를 보여주는데 설계의 안전을 위해서 내부곡선맞춤(internal curve fitting)을 했고, 그 결과는 다음과 같이 표시된다.

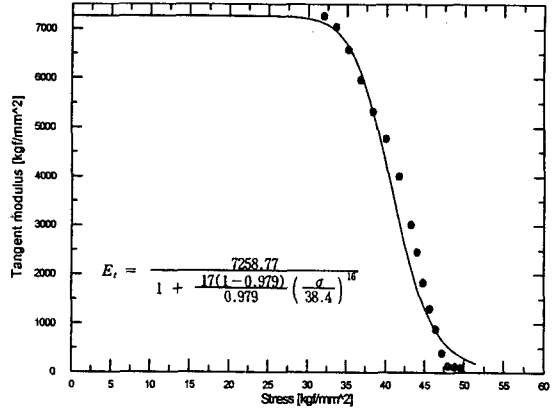


Fig. 2 Tangent modulus for AL7075-T6

$$E_t = \frac{7258.77}{1 + \frac{17(1-0.979)}{0.979} \left(\frac{\sigma}{38.4} \right)^{16}} \quad (2)$$

여기서 응력과 접선계수의 단위는 kgf/mm^2 이다.

4. 박판 원통의 붕괴압력

외부압력을 받는 원통의 붕괴압력은 von Mises에 의해서 다음과 같이 제시되었다^{6,7)}.

$$p_{cr} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left\{ \frac{(1-\nu^2)}{(n^2-1)(1+n^2L^2/\pi^2R^2)^2} + \frac{h^2}{12R^2} \left(n^2-1 + \frac{2n^2-1-\nu}{1+n^2L^2/\pi^2R^2} \right) \right\} \quad (3)$$

여기서 n 은 원주방향의 좌굴모드이고 기본 모드는 "2"이다. ν 는 포아손비를 의미하는데, 알루미늄 합금은 "0.33"을 가진다. R 은 원통의 평균반경을 의미하고, h 는 두께 그리고 L 은 원통의 축방향 길이를 의미한다. π 는 원주율이다.

5. 표면 중심에 구멍이 있는 반구형 셸(hemispherical shell)의 붕괴압력

5.1 지배방정식과 경계조건

완전한 압력용기를 구성하기 위해 앞서 기술한

원통의 좌우 끝단에 반구형의 덮개가 설치되고 수밀된다. 원통 내부와 외부의 통신을 위해서 반구의 상부 표면 중심에 원형구멍을 뚫을 수도 있다. 이 경우 구멍에는 상대적으로 강한 마개가 설치된다. Fig. 3은 OKPO-6000에 사용되는 덮개가 압력붕괴 시험에서 붕괴된 상태를 보여준다.

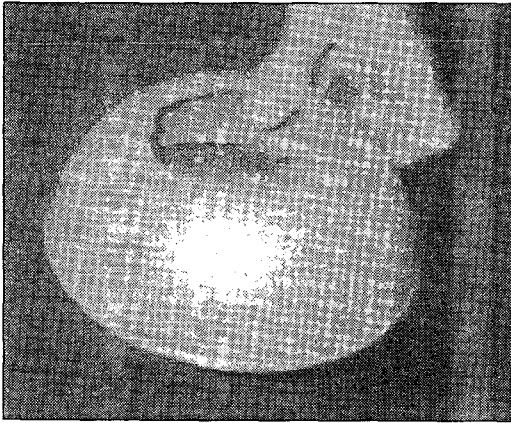


Fig. 3 The Collapse shape of a hemisphere

구가 대칭적으로 붕괴될 때 압력은 1915년에 Zoelly에 의해서 해석되었다⁸⁾. 그러나 많은 실험 결과는 이론적 해석결과보다 아주 낮은 압력에서 구의 붕괴가 발생한다는 것을 보였다.

이 차이는 구의 두께/반경 비에 의존하는 특성을 보이는데, 대략 69% 낮은 압력에서 붕괴가 발생한다⁷⁾. 더욱이 붕괴는 축대칭 균일 압력을 받는 경우에도 Fig. 3에 보여준 바와 같이 비대칭적이고 사전 징후없이 돌발적으로 발생한다. 이론과 실제 거동사이의 차이를 설명하기 위한 노력이 아직도 진행중인데 공학자들은 형상 불안전에 관심을 집중시키는 반면 수학자들은 지배방정식이 적절히 구의 좌굴거동을 묘사하지 못하는데 그 원인이 있다고 판단하였다. 실제로 쉘의 역학적 거동은 평판의 역학적 거동에 비해서 상대적으로 다양한 변수들의 영향을 받는다. 그러나 이러한 모든 변수들의 영향을 고려한 방정식을 해석하는 것은 불가능하다. 따라서 이 변수들 중에서 적절한 변수만을 취해서 방정식을 단순화 시킨다. 불행하게도 평판과는 달리 무시된 변수들의 영향이 상대적으로 작지

가 않다. 그래서 동일한 목적을 가진 다양한 방정식이 개발되어 왔고 지금도 그 노력은 계속되고 있다. 어쨌든 선형해석결과는 모든 방정식에서 동일한 결과를 준다. 이러한 노력의 연장선 상에 있는 것이 최근 수학자들의 관심을 집중시키는 특이점에서 분기현상이다.

구의 방정식들은 $\cot(t)$ 항을 포함하고 있는데, 이 함수는 $t=0$ 및 $t=\pi$ 에서 발산하는 특징을 가지고 있다. 따라서 구의 방정식들은 두 개의 특이점을 가지는데 이를 2-점 경계치 문제라 한다. 과거에는 이 특이점을 무시하고 붕괴압력이 계산되어 왔는데 최근 수학자들은 구의 비대칭 붕괴를 설명하기 위해서는 이 특이점을 고려해야 한다는 의견이 일치시키고 있다. 왜냐하면 이 특이점은 구에 있는 물리적인 위치가 아니고 수학적인 편의에 의해서 도입되는 좌표축에 의해서 결정되기 때문이다. 따라서 좌표축의 설정은 전적으로 임의이기 때문에 구의 전 표면이 특이점이라고 할 수 있다.

한편 1970년대에 Bauer, Reiss 및 Keller⁹⁾에 의해서 비대칭 붕괴를 해석하기 위한 방정식이 유도되었는데, 최근 Hermann¹⁰⁾ 등은 Bauer의 방정식이 Banach 공간¹¹⁾에서 정의된 미분연산자로 표현됨을 증명하였고, 이 미분방정식을 이용하여 특이점에서 거동을 수치적으로 해석했다. 그러나 지금까지도 구의 비대칭 붕괴가 완전히 규명된 것은 아니다.

본 연구에서는 대칭축을 따라서 상부에 구멍을 가진 반구의 붕괴압력에 관심을 가지고 있다. 이를 해석하기 위해서 다음과 같은 Bauer의 방정식을 사용하였다.

$$\begin{aligned}
 y_1'(t) &= (\nu-1) \cot(t)y_1(t) + y_2(t) \\
 &\quad + [k \cot^2(t) - \lambda]y_4(t) + \cot(t)y_2(t) y_4(t) \\
 y_2'(t) &= y_3(t) \\
 y_3'(t) &= [\cot^2(t) - \nu]y_2(t) - \cot(t)y_3(t) \\
 &\quad - y_4(t) - 0.5 \cot(t)y_2^2(t) \\
 y_4'(t) &= \beta y_1(t) - \nu \cot(t)y_4(t)
 \end{aligned} \tag{4}$$

방정식 (4)를 매개변수에 의존하는 비선형 2-점

경계치 문제(parameter-dependent nonlinear two point boundray value problem)라 한다. 여기서 Fig. 4를 참조하면 t 는 대칭축으로부터 측정한 위도(latitude)이고 $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ 는 각각 방사 방향의 굽힘모멘트(radial bending moment), 횡전단력(transversal shear) 및 원주방향의 막응력(circumferential membrane stress)에 비례한다.

그리고 $y_4(t)$ 는 반구의 바깥 표면을 따라 그은 자오선(meridian)에서 접선의 회전각에 비례한다. 그리고 균일한 두께 h 를 가진 구의 평균반경을 R 로 표시하면 매개변수 λ , k 및 β 는 각각 다음과 같이 정의된다. 이 치수들은 Fig. 4에 보여 주었다.

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \frac{pR}{2E_1 h} \\ k &\equiv \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \\ \beta &\equiv \frac{1-\nu^2}{k} \end{aligned} \quad (5)$$

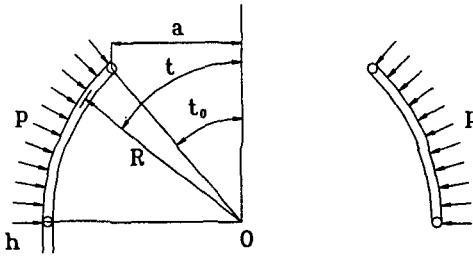


Fig. 4 The principle parameters of hemisphere with one hole

본 연구에서는 상부에 구멍이 있는 반구의 붕괴 압력에 관심을 가지기 때문에 경계조건은 다음과 같이 주어진다. 즉 상하의 구멍을 따라서 단순지지를 받는 것으로 가정했다.

$$y_2(t_0) = y_4(t_0) = y_2(\pi/2) = y_4(\pi/2) = 0 \quad (6)$$

여기서 상부에 있는 구멍의 반경을 a 로 표시하

면 t_0 는 다음과 같이 정의된다.

$$t_0 \equiv \sin^{-1} \left(\frac{a}{R} \right) \quad (7)$$

편의상 방정식 (4)와 경계조건 (6)을 (8) 및 (9)식으로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1''(t) + \cot(t)x_1'(t) \\ - [\cot^2(t) - \nu]x_1(t) + x_2(t) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} x_2''(t) + \cot(t)x_2'(t) - [\cot^2(t) + \nu]x_2(t) \\ - \beta[x_1(t) - \lambda x_2(t)] = 0 \end{aligned}$$

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_1(\pi/2) = x_2(\pi/2) = 0 \quad (9)$$

여기서 $x_1(t) = y_2(t)$, $x_2(t) = y_4(t)$, $y_1(t) = [y_4'(t) + \nu \cot(t)y_4(t)]/\beta$, $y_3(t) = y_2'(t)$ 이다. 단 방정식 (4)에서 두 개의 비선형 항은 무시했다.

5.2 가중 잔여법에 의한 해석해

구멍이 없는 구에 대해서 방정식 (8)식을 만족하는 유용해는 유사 르장드르 함수(associated Legendre function)으로 표현되고 최소 붕괴압력과 좌굴강도는 각각 다음과 같이 표시된다[8].

$$p_{cr} = \frac{2E_1 h}{R(1-\nu^2)} \left[\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \left(\frac{h}{R} \right) - \frac{\nu}{2} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{E_1}{(1-\nu^2)} \left(\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \frac{h}{R} - \frac{\nu h^2}{2R^2} \right) \quad (11)$$

그런데 구멍이 있는 경우에 유사 르장드르 함수는 경계조건 (9)를 만족하지 않기 때문에 방정식 (8)의 해가 될 수 없다. 즉 방정식 (8)과 경계조건 (9)를 동시에 만족하는 엄밀해를 얻는 것은 어렵기 때문에 본 연구에서는 가중 잔여법(Weighted

Residual Method)을 적용하였다. 즉 경계조건 (9)를 만족하는 적교 함수열 $\{\phi_n(t; t_0, n) | n \in \mathcal{N}\}$ 을 적당히 설정하면 근사해는 다음과 같이 표시된다.

$$x_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t; t_0, n) \quad (12)$$

$$x_2 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_n(t; t_0, n)$$

여기서 c_n 과 d_n 은 미정계수이다. (12)식의 근사해를 사용하여 방정식 (8)에 가중잔여법을 적용하면 다음과 같은 고유치를 얻을 수 있다.

$$\lambda(n) = \frac{\zeta(t_0; n) + \nu}{\beta} + \frac{1}{\zeta(t_0; n) - \nu} \quad (13)$$

여기서 ζ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\zeta(t_0; n) \equiv \frac{-I_1(t_0; n) - I_2(t_0; n) + I_3(t_0; n)}{I_4(t_0; n)} \quad (14)$$

그리고 $\{I_j(t_0; n) | j=1, 2, 3, 4\}$ 는 $t_0 \leq t \leq \pi/2$ 에 정의된 함수의 내적을 의미하는데 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I_1(t_0; n) &\equiv \langle \phi_n''(t; t_0, n), \phi_n(t; t_0, n) \rangle \\ I_2(t_0; n) &\equiv \langle \cot(t) \phi_n'(t; t_0, n), \phi_n(t; t_0, n) \rangle \\ I_3(t_0; n) &\equiv \langle \cot^2(t) \phi_n(t; t_0, n), \phi_n(t; t_0, n) \rangle \\ I_4(t_0; n) &\equiv \langle \phi_n(t; t_0, n), \phi_n(t; t_0, n) \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

임의의 n 에 대해서 (13)식을 사용하면 대응되는 외부압력을 얻을 수 있는데 좌굴이 발생하는 최소 붕괴압력을 찾기 위해서 $\zeta(t_0; n)$ 는 n 의 연속 함수로 취급해야 한다. (13)식은 $\zeta(t_0; n) = \sqrt{\beta} + \nu$ 에서 극소값을 가지고 $\zeta(t_0; n) = -\sqrt{\beta} + \nu$ 에서 극대값을 가지는데 $\zeta(t_0; n) > 0$ 이어야 하므로 후자는 의미가 없다.

한편 (13)식을 보면 $\zeta(t_0; n) = -\nu$ 에서 발산

하기 때문에 모든 $\zeta(t_0; n) > 0$ 에 대해서 (13)식은 양의 값을 가진다. 그러므로 극소값이 곧 최소값이 되고, $\zeta(t_0; n) = \sqrt{\beta} + \nu$ 를 방정식 (13)에 직접 대입하면 다음과 같은 최소 붕괴압력을 얻을 수 있다.

$$p_{cr} = \frac{2Eh}{R(1-\nu^2)} \left[\sqrt{\frac{(1-\nu^2)}{3}} \left(\frac{h}{R} \right) + \frac{\nu}{6} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \quad (16)$$

(16)식과 (10)식을 비교해보면 괄호 안의 첫 번째 항은 정확히 일치한다. 그리고 두께가 얇은 경우에 붕괴압력은 (10)식에서 괄호 안의 첫 번째 항만을 취하기 때문에 결론적으로 (10)식과 (16)식은 동일한 붕괴압력을 준다는 것을 알 수 있다. 그러므로 물리적으로 (16)식은 구멍이 없는 구의 붕괴압력을 지정함을 알 수 있다.

흥미로운 것은 (16)식으로 표현된 붕괴압력을 유도할 때까지 우리는 $\zeta(t_0; n)$, 더 정확히 말해서 $\phi_n(t; t_0, n)$ 에 대해서 어떤 구체화도 하지 않았다는 점이다. 더욱이 (13)식을 보면 $\lambda(n)$ 은 $\zeta(t_0; n) = \sqrt{\beta} + \nu$ 에서 최소 값을 가지기 때문에 어떠한 $\zeta(t_0; n)$ 에 대해서도 (13)식의 붕괴압력은 (16)식이 붕괴압력보다 작을 수 없다. 이것의 물리적인 의미는 구멍이 존재하는 반구의 붕괴압력은 완전한 구의 붕괴압력보다 크다는 것을 의미한다.

이는 경계조건 (9)를 보면 당연한 결과임을 알 수 있다. 경계조건 (9)를 보면 자오선을 따라서 두 경계점 사이의 길이는 구멍이 없는 완전한 구에서는 πR 인데 반해서 구멍이 있는 반구의 길이는 $(\pi/2 - t_0)R$ 이다. 즉 구멍이 있는 반구의 자오선 길이는 구멍이 없는 경우보다 항상 작다. 이는 좌굴길이가 그 만큼 작다는 것을 의미하므로 붕괴압력은 구멍이 없는 완전한 구에서 최소가 됨을 알 수 있다. 동일한 논의를 계속하면 구멍이 클수록 더 큰 압력에서 붕괴가 발생함을 알 수 있다. 그런데 방정식 (13)을 주의 깊게 관찰해 보면 이러한 직접적인 관계가 성립하지 않는다는 것을 알 수 있다. 구멍이 있는 반구의 붕괴압력이 완전한 구의 붕괴압력보다 항상 크지만 구멍의 크기에 직접 비

례하는 것은 아님을 알 수 있다.

Fig. 5는 이를 도식적으로 보여준다. Fig. 5는 경계조건 (9)를 만족하고 유사 르장드르 함수와 유사한 거동을 하는 함수열 $\phi_n = [\sin n(t - t_0) \cos nt]$ 에 대해서 방정식 (14)를 해석한 결과를 보여 주는데, $n=1$ 일 때이다. 종축은 $\zeta(t_0; 1)$ 을 나타내고 횡축 t_0 를 나타낸다. 그리고 $\zeta(t_0; 1) < \zeta(t_0; n)$ 이므로 $n > 1$ 인 경우는 의미가 없다. Fig. 5를 보면 $\zeta(t_0; n)$ 가 구멍의 크기 t_0 에 직접 비례하지 않는다는 것을 알 수 있다.

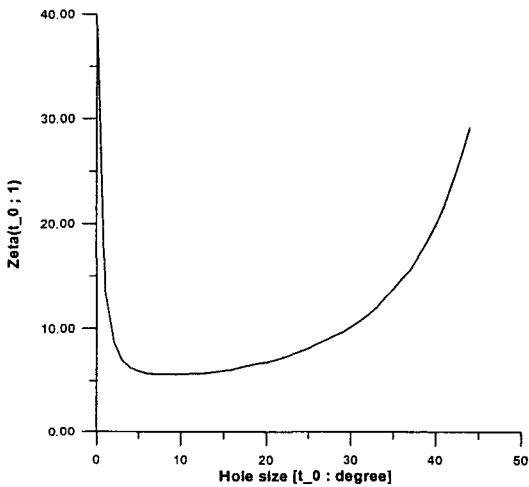


Fig. 5 Numerical integral result for $n=1$

경계조건 (9) 때문에 위와 같은 결론에 도달한 것이다. 그러나 실제조건에서 경계조건 (9)를 구현하기 위해서는 신중한 설계가 요구된다. 즉 구멍에는 구의 강성보다 상대적으로 강성이 큰 덮개가 설치되어야 하는데 이는 좌굴 뿐만 아니라 수밀 유지를 위해서도 필요하다. 따라서 실제 설계에서는 구멍이 있는 쪽의 두께는 다른 곳보다 상대적으로 크게 제작된다. 그리고 이 구멍을 채우는 마개는 수밀용 외에 보강재의 역할을 하도록 제작되어야 한다.

이러한 신중한 설계에도 불구하고 경계조건 (9)를 완전히 구현하는 것은 불가능하다. 어쨌든 실제 경계조건은 이상적인 경계조건 (9)보다 약하다. 따라서 붕괴압력은 (13)식으로 표현되는 것보다 작다.

동일조건에서 Spherical cap의 붕괴압력은 완전한 구의 붕괴압력보다 크다(7). 그러나 그 차이는 작기 때문에 이러한 셀에 대해서도 붕괴압력은 완전한 구의 붕괴압력을 사용한다. 그러므로 설계 목적상 반구의 상부에 구멍을 가지고 그 구멍을 따라서 단순지지를 받는다면 이 반구의 붕괴압력은 완전한 구의 붕괴압력과 같다고 보는 것이 합리적이다.

5.3 해석해의 분석 및 설계공식 유도

앞 절에서 구멍을 따라서 단순지지를 받는다면 구멍이 있는 경우가 구멍이 없는 경우보다도 더 높은 압력에서 붕괴가 발생함을 보였다. 그러나 Spherical cap(Fig. 6에서 상부에 구멍이 없는 것)에 대한 ASME의 설계공식을 보면 경계를 적절히 처리하지 않았을 때 반구는 구의 붕괴압력보다 작은 압력에서 붕괴가 될 수 있음을 알 수 있다. ASME에서는 이 영향을 "knock down factor" ψ_2 로 고려하는데 두께/반경 비와 개방각 t_2 의 함수로 정의한다. 즉 spherical cap의 붕괴압력은 완전한 구의 붕괴압력에 ψ_2 를 곱한 것으로 한다. 그러므로 본 연구에서도 이를 다음과 같이 고려했다.

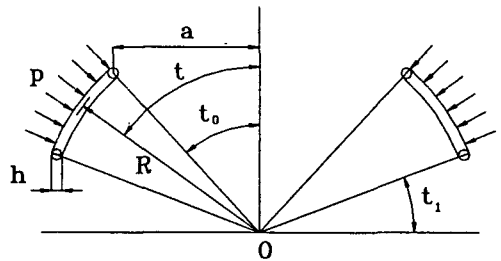


Fig. 6 The principle parameter of spherical caps with one hole

앞 절에서 언급한 바와 같이 (13)식으로 표현된 붕괴압력은 $\zeta(t_0; n)$ 에 관계없이 구의 붕괴압력보다 크다는 것을 보였다. 그러므로 적절한 보정계수 ξ 를 곱해서 붕괴압력을 다음과 같이 수정하였다.

$$\lambda(t_0) = \xi \left[\frac{\zeta(t_0)}{\beta} + \frac{1}{\zeta(t_0)} \right] \quad (17)$$

여기서 $\zeta(t_0; n)$ 는 $O(R/h)$ 이고 프아손비 ν 는 $[0.2, 0.5]$ 범위에 있기 때문에, 프아손비는 ζ 에 비해서 대단히 작다. 그래서 $\zeta \pm \nu$ 를 ζ 로 대치했다. 그리고 $\zeta(t_0; n)$ 는 더 이상 n 의 함수일 필요가 없으므로 오직 t_0 만의 함수로 나타냈다.

$t_0 = 0$ 이면 (17)식은 완전한 구의 붕괴압력 (16)식과 같아야 한다. 그리고 $t_0 \rightarrow \pi/2$ 이면 원주를 따라서 단순지지를 받는 원환(ring)으로 간주할 수 있다. 한편 (3)식으로 주어지는 원통에서 $L \rightarrow 0$ 이면 역시 원주를 따라서 단순지지를 받는 원환으로 간주할 수 있다. 그러므로 이러한 조건에서 (17)식의 붕괴압력과 (3)식의 붕괴압력은 같아야 한다. 이 두 조건을 사용하면 미지 상수 ξ 와 미지 함수 $\zeta(t_0)$ 를 결정할 수 있음을 알 수 있다. 논리전개의 편리를 위해서 (3)식의 원통의 붕괴압력과 (16)식의 완전한 구의 붕괴압력을 (17)식과 동일한 형태로 표시하는 것이 좋다. 즉 원통의 붕괴압력을 λ_c , 완전한 구의 붕괴압력을 λ_s 로 표기하면 다음과 같다.

$$\lambda_s = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \quad (18)$$

$$\lambda_c = \frac{1}{6} + \frac{5}{\beta} \quad \text{for } L=0 \quad (19)$$

(16)식에서 우변의 두 번째 항은 무시하였다. 그리고 앞서 언급한 두 가지 연속조건을 수식화 하면 다음과 같다.

$$\lambda(0) = \lambda_s \quad (20)$$

$$\lambda(\pi/2) = \lambda_c \quad (21)$$

연속조건은 두 개인데 반해서 결정해야 할 미지수는 ξ , $\zeta(0)$ 및 $\zeta(\pi/2)$ 3개가 존재한다. 그러므로 방정식이 수가 하나 부족하다. 그런데 방정식 (17)식과 (19)식을 비교해 보면 β 에 대해서 동일한 함수로 표현되어 있음을 알 수 있다. 따라서 (21)식은 β 에 대한 항등식으로 간주할 수 있다.

그러면 부족한 방정식이 보충된다. 즉 방정식 (20)식과 항등식 (21)식으로부터 다음을 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= \theta\sqrt{\beta} \\ \zeta(\pi/2) &= \sqrt{30} \\ \xi &= \sqrt{5/6} \\ \theta &= (\sqrt{6} \pm 1)/\sqrt{5} \end{aligned} \quad (22)$$

이제 (22)식을 사용하여 미지함수 $\zeta(t_0)$ 를 결정하는데, 이를 위해서 먼저 $\zeta(t_0)$ 의 함수형태를 파악해야 한다. (22)식의 첫 번째 조건식을 보면 $\zeta(t_0)$ 는 β 를 매개변수로 가져야 함을 알 수 있다. 또한 두 번째 조건식에는 β 가 없기 때문에 $\zeta(t_0)$ 는 t_0 의 멱함수로 표현되어야 함을 알 수 있다. 이는 이론해석 결과인 Fig. 5로부터도 예측할 수 있다. 그리고 기지조건이 두 가지 뿐이기 때문에 멱지수는 t_0 의 일차함수로 표현할 수 밖에 없다. 즉 $\zeta(t_0)$ 를 미정계수 γ , j 두 개를 포함한 다음과 같은 함수로 설정되어야 한다.

$$\zeta(t_0) = \sqrt{30} \left(\frac{\theta\sqrt{\beta}}{\sqrt{30}} \right)^{(\gamma + jt_0)} \quad (23)$$

그리고 (22)식의 첫 두 개의 조건식으로부터 $\gamma = 1$ 및 $j = -2/\pi$ 를 얻을 수 있다. (23)식을 (17)식에 대입하면 붕괴압력을 얻을 수 있는데, 이 붕괴압력에 ASME에서 정의하는 knock down factor ψ_2 를 더 곱해서 다음을 얻을 수 있다.

$$\lambda_{cr} = \psi_2 \psi_1(t_0, \beta) \frac{2}{\sqrt{\beta}} \quad (24)$$

여기서 ψ_2 를 제외하면 (24)식은 (23)식을 (17)식에 대입하여 얻어진다. (24)과 (18)식을 비교해 보면 (24)식은 완전한 구의 붕괴압력에 ψ_1 , ψ_2 가 곱해진 것임을 알 수 있다. 그러므로 ψ_1 는 상부에

있는 구멍의 영향으로 인한 붕괴압력 감소계수로 정의할 수 있다.

$$\psi_1(t_0, \beta) = \sqrt{\frac{5}{24}} \left[\frac{\theta}{\left(\frac{\theta^2}{30}\beta\right)^{\frac{t_0}{\pi}}} + \frac{\left(\frac{\theta^2}{30}\beta\right)^{\frac{t_0}{\pi}}}{\theta} \right] \quad (25)$$

(22)식을 보면 매개변수 θ 는 두 가지 값으로 정의 되었다. 이 두 값 모두 연속조건을 만족한다. 즉 두 개의 붕괴압력이 존재한다. 그러나 붕괴압력은 최소 값만이 유효하므로 각 경우에 대해서 압력 감소계수를 작게 설정해 주는 θ 값을 취해야 한다.

한편 반구이기 때문에 하부에도 구멍이 존재한다. ASME를 보면 이 하부에 있는 구멍의 영향을 보정한 계수가 정의되어 있는데 이것이 앞서 언급한 ψ_2 이다. ψ_2 는 ASME의 공식을 그대로 사용한다. 그러면 (24)식은 상부에 구멍이 있는 Spherical cap에 대해서 일반화시킨 것이 된다. 구체적으로 말해서 (24)식은 Fig. 6과 같이 구멍의 치수에 관계없이 구의 대칭축을 따라서 상하에 각각 1개의 구멍이 있는 구의 붕괴압력에 대한 설계공식이다. ψ_2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_2 &= 0.627 \text{ for } 2t_1\sqrt{R/h} < 1.5 \\ &= 0.837 - 0.1 \cdot 2t_1\sqrt{R/h} \\ &\quad \text{for } 2t_1\sqrt{R/h} \in [1.5, 1.73] \\ &= 0.862 / (2t_1\sqrt{R/h})^{0.6} \\ &\quad \text{for } 2t_1\sqrt{R/h} \in [1.73, 23.6] \quad (26) \\ &= 0.124 \text{ for } 2t_1\sqrt{R/h} \geq 23.6 \end{aligned}$$

Fig. 7은 구멍이 있는 반구의 붕괴압력을 나타내는데 t_0 가 0도, 10도, 20도, 30도 및 40도에 대한 압력감소계수 ψ_1 을 나타낸다. 횡좌표는 β 를 나타내고, 종좌표는 ψ_1 를 나타낸다. 0도는 완전한 구에 대한 것이기 때문에 압력감소계수는 "1"

이다. (24)식을 보면 압력감소계수는 완전한 구의 붕괴압력에 대한 구멍이 있는 반구의 붕괴압력 비로서 정의할 수 있다. 따라서 압력감소계수가 "1"보다 작다는 것은 붕괴압력이 완전한 구의 붕괴압력보다 작다는 것을 의미한다. 반대로 "1"보다 크다는 것은 붕괴압력이 완전한 구의 붕괴압력보다 크다는 것을 의미한다.

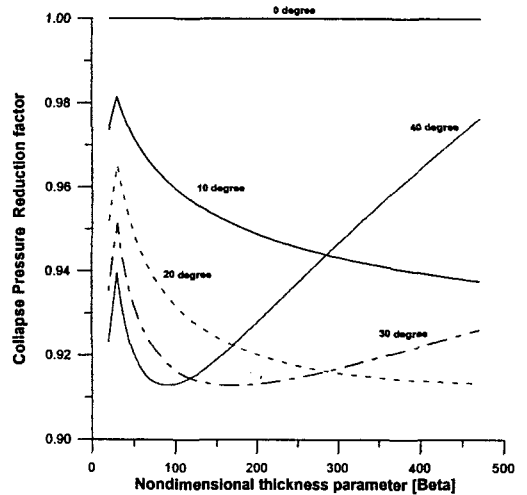


Fig. 7 Collapse pressure reduction factor $\psi_1(t_0, \beta)$ for hole size 10, 20, 30, 40 deg.

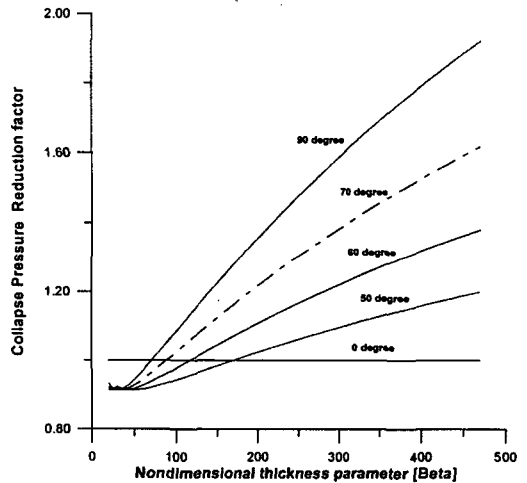


Fig. 8 Collapse pressure reduction factor $\psi_1(t_0, \beta)$ for hole size 50, 60, 70, 90 deg.

그러므로 구멍의 치수가 작을수록 구의 두께에 관계없이 붕괴압력은 완전한 구의 붕괴압력보다 작다는 것을 알 수 있다. 그러나 구멍의 치수가 40도를 넘어서면 판 두께가 얇아질 경우에 완전한 구의 붕괴압력보다 커짐을 알 수 있다. Fig. 8을 보면 이 사실을 명확히 알 수 있는데, t_0 가 50도, 60도, 70도, 80도 및 90도에 대한 압력감소계수를 보여준다. 후판 셀의 경우는 완전한 구의 붕괴압력보다 작지만 박판인 경우에는 완전한 구의 붕괴압력보다 크다는 것을 알 수 있다. 그리고 보편적으로 구멍의 크기가 클수록 붕괴압력은 증가함을 알 수 있다. 이는 구멍의 치수가 클수록 원환에 가까워지기 때문에 나타나는 결과이다.

6. 붕괴시험 결과

압력용기의 붕괴 시험은 AUV에 사용되는 실제의 압력용기를 사용하였다. Fig. 10, Fig. 11 및 Fig. 12는 붕괴된 압력용기를 보여준다. 붕괴단면은 최대 전단응력이 작용하는 반경방향의 45도 면을 따라서 파단되었음을 알 수 있다. 그리고 Fig. 11은 원주방향의 좌굴모드를 보여주는데, 원통형각의 기본좌굴모드에 해당하는 2차 모드($n=2$)로 붕괴됨을 보여준다. 또한 Fig. 12는 길이방향의 좌굴모드를 보여주는데, 1차 모드로 붕괴된 것을 알 수 있다. Fig. 3에 보여준 반구의 붕괴양식과 달리 원통의 붕괴양식은 대칭적임을 알 수 있다. 즉 이론치와 실제 실험치의 차는 구처럼 크지가 않다. 구의 비대칭적인 붕괴 특성 때문에 AUV에서 압력용기의 상하부에 설치된 반구는 원통보다 높은 압력에서 붕괴가 발생하도록 설계된다. 실험결과도 반구형의 덮개가 먼저 붕괴된 적이 없었다.

실험결과는 table 2에 나타났다. 표에서 보는 것과 같이 붕괴압력은 최소 711 bar에서 최고 916 bar이므로 OKPO-6000은 정압력만을 받는다면 수심 약 7000m에서도 안전하도록 제작되어 있다. 표에서 F 는 압력용기의 치수에 의해서만 결정되는 무차원 매개변수로서 알루미늄 합금 AL7075-T6에 대해서 다음과 같이 정의된다.

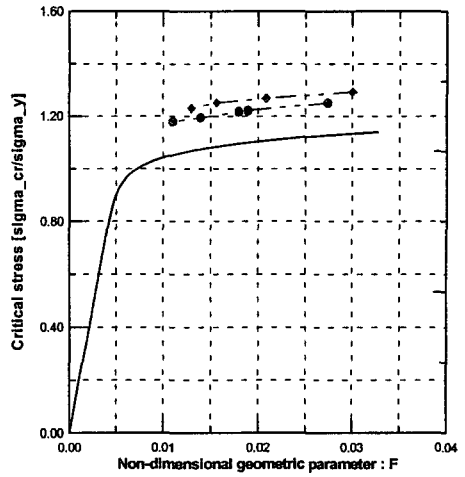


Fig. 9 Critical Stress

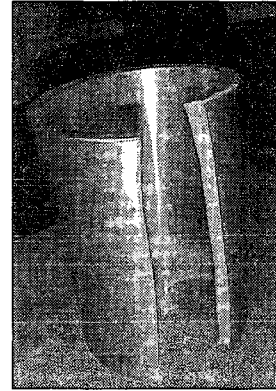


Fig. 10 The overall view of collapsed section

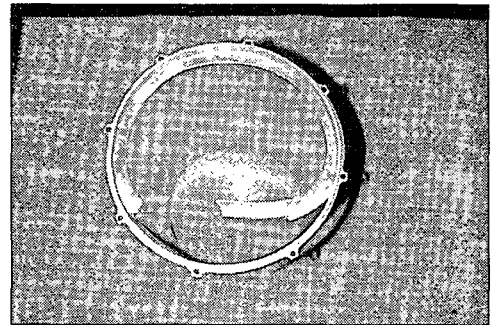


Fig. 11 The circumferential buckling mode

$$F = \left\{ \frac{1}{3[1 + 0.4057(t/R)^2]} + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \left(0.281 + \frac{0.624}{1 + 0.4057(t/R)^2} \right) \right\} \quad (27)$$

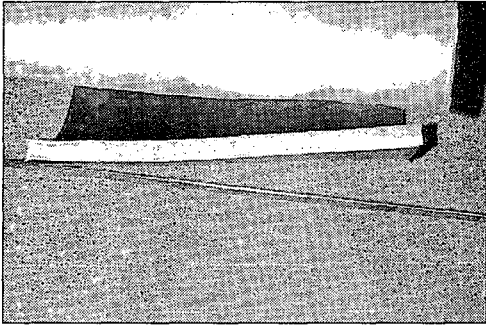


Fig. 12 Longitudinal buckling mode

그리고 이를 (3)식에 적용하면 원통의 붕괴압력은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$P_{cr} = \frac{E_i h}{R} F \quad (28)$$

그리고 원통의 좌굴강도는 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_{cr} = E_i \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{R} \right) F \quad (29)$$

Fig. 9는 실험결과를 도식적으로 보여준다. 횡축은 F 를 나타내고 종축은 σ_{cr}/σ_y 를 나타낸다. 그림에서 solid line은 이론적 해석결과인 (29)식을 보여주고, 표점 ●, ◆는 실험결과를 보여준다. 이 결과를 보면 실험결과는 이론해석 결과보다 약간 큰 값을 주는데, 이는 단축인장 실험에 사용된 재료의 항복점과 붕괴실험에 사용된 용기의 항복점이 서

로 다르기 때문에 발생한 차이로 사료된다. Fig. 9를 보면 압력용기는 구성조건(constitutive relation)이 다른 2가지로 구분 됨을 알 수 있다. 이는 제작과정 중에 용기는 이미 초기 항복을 경험했기 때문에 발생하는 변형경화 특성이라고 판단된다. 그러므로 이 그림으로부터 알 수 있는 바와 같이 이론에 의한 해석결과는 압력용기의 안정성에 신뢰할 만한 결과를 준다는 것을 알 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서는 심해 무인잠수정 OKPO-6000의 안전한 운용을 위해 가장 중요한 변수인 압력용기의 붕괴압력을 설명하였다. 특히 상부에 구멍이 있는 반구의 붕괴에 대한 이론해석과 설계공식을 유도했다. 해석결과에 의하면 이론해석은 매우 신뢰할 만한 결과를 줌을 알 수 있었고, 또한 OKPO-6000은 수심 6000m에서 안전하게 작동되기 위한 충분한 여유강도를 가지고 있음을 보여준다.

통상 압력용기를 내재한 잠수정의 경우 하나의 압력용기가 수중에서 붕괴되는 순간 심해저의 높은 압력의 영향으로 이웃한 압력용기들이 연속 붕괴하여 잠수정이 부력을 완전히 잃어버리는 사례가 있는 만큼 엄밀한 이론해석과 실험은 필수적이라 하겠다. OKPO-6000은 이러한 목적에서 실험실에서의 고압 안전도실험과 별도로 1998년 8월 서태평양 마셜군도 해역에서 수심 4870m까지 정상적으로 잠수함으로써 심해저에서도 구조적으로 안전함을 확인하였다.

Table 2 Collapse test result

Radius	Thickness	Length	F	Collapse Pressure	Critical Stress	
mm	mm	mm		kgf/cm ²	kgf/mm ²	
125	22	380	0.03	802	49.60	1.29
55	11	235	0.02	885	48.70	1.27
82	15	400	0.02	805	48.05	1.25
66	13	620	0.01	851	47.45	1.24
125	20	380	0.03	711	48.00	1.25
39.2	8.5	220	0.02	916	46.90	1.22
55	10	235	0.02	779	46.75	1.22
82	14	400	0.01	722	45.90	1.20
66	12	620	0.01	755	45.30	1.18

참고문헌

- 1) 이판목, 이종무, 전봉환, 임용곤, 박종원, "해양 탐사와 모니터링을 위한 자율무인 잠수정 VORAM의 시스템 설계", 한국해양공학회 추계학술대회는문집, 1997
- 2) 장휴정, 우종식, "OKPO-6000 AUV (무인자율 심해탐사정) 소개", 수중과학기술지, 제1권 1호, 1997
- 3) 이판목, 전봉환, 이종식, 오준호, 김도현, "AUV의 운동계측을 위한 스트랩-다운형 관성계측

- 장치(IMU)의 개발”, 한국해양공학회지, 제 11권 1호, 1997
- 4) 이판목, 전봉환, 정성욱, “자율무인잠수정(AUV)의 모의 실험을 위한 테스트베드의 개발-하드웨어와 소프트웨어”, 한국해양공학회지, 제 11권 1호, 1997
 - 5) Ramberg, W. and W. R. Osgood, "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters, NACA TN 902, 1943
 - 6) 本間康之, 石田忍, "Shell Buckling of Circular Cylindrical Shells With Initial Deflection", 日本造船學會論文集 第 158号, 昭和 60年
 - 7) 이재신, 선박 및 해양 구조물-좌굴강도학, 세종출판사, 부산, 1995
 - 8) Timoshenko, S. P., Gere, J. M., Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill book Company, Inc., New York, 1961
 - 9) Bauer, L., Reiss, E. L., Keller, H. B., "Axisymmetric buckling of hollow spheres and hemispheres", Communications on Pure and Applied Mathematics, 23, pp 529-568, 1970
 - 10) Hermann, M., Kaiser D., Schrder M., Theoretical and Numerical Studies of the Shell Equations of Bauer, Reiss and Keller, Part I: Mathematical Theory, Thuringian Ministry of Science report B501-96076, 1998
 - 11) Royden, H. L., Real Analysis, 3th Ed., Macmillan publishing company, New York, 1989

부 록

1. 가중잔여법에 의한 해석

1.1. 선형화된 Bauer Equation

편의상 다음과 같은 선형 미분 연산자를 정의했다.

$$L \equiv \frac{d^2}{dt^2} + \cot(t) \frac{d}{dt} - \cot^2(t) \quad (30)$$

이를 이용하면 방정식 (8)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} L[x_1(t)] + \nu x_1(t) + x_2(t) &= 0 \\ -\beta x_1(t) + L[x_2(t)] + (\beta\lambda - \nu)x_2(t) &= 0 \quad (31) \end{aligned}$$

이는 다시 다음과 같은 index notation으로 간략하게 쓸 수 있다.

$$D_{ij} x_j(t) = 0 \text{ for } i, j = 1, 2 \quad (32)$$

여기서 j 는 summation index인데 이후의 논의에서 중복 첨자는 summation index를 나타낸다. 즉 summation convention을 적용한다. 그리고 D_{ij} 는 다음과 같이 정의되는 second order tensor이다.

$$[D_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} L + \nu & 1 \\ -\beta & L + (\beta\lambda - \nu) \end{bmatrix} \quad (33)$$

1.2. 변분적 접근

미분방정식 (32)에 임의의 가상변위 δx_i 을 취하여 양변에 내적을 취하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\langle D_{ij} \{x_j(t)\}, \delta x_i \rangle = 0 \quad (34)$$

여기서 정의영역 $t_0 \leq t \leq \pi/2$ 에서 정의된 임의의 두 함수 $f(t)$, $g(t)$ 에 대해서 함수의 내적은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle f(t), g(t) \rangle \equiv \int_{t_0}^{\pi/2} f(t)g(t) dt \quad (35)$$

방정식 (34)는 일반적으로 만족되지 않는다. 그러나 적당한 임의의 가상변위에 대해서 (34)식을 만족하도록 할 수 있다. 즉 (34)식을 만족하는 근사해를 다음과 같다고 하자.

$$x_i = c_n^i \phi_n(t; t_0, n) \text{ for } n \in N \quad (36)$$

여기서 N 은 자연수 집합이고 c_n^i 는 미정계수

이다. $\phi_n(t; t_0, n)$ 는 주어진 경계조건 (9)를 만족하도록 설정된 기지함수인데 t 를 독립변수로 하고 t_0 및 n 을 매개변수로 한다. (36)식은 (12)식을 tensor로 표현한 것이다. 즉 같은 식이다. 그리고 기지함수의 변분은 "0"이기 때문에 x_i 의 변분은 다음과 같다.

$$\delta x_i = \phi_n(t; t_0, n) \delta c_n^i \quad (37)$$

(36)식과 (37)식을 (34)식에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\langle D_{ij}[\phi_n(t; t_0, n)] c_n^j, \phi_n \delta c_n^i \rangle = 0 \quad (38)$$

여기서 δc_n^j 는 "0"이 아닌 임의의 상수이므로 위식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\langle D_{ij}[\phi_n(t; t_0, n)], \phi_n \rangle c_n^j = 0 \quad (39)$$

이는 c_n^j 에 대한 연립방정식이다. 즉 미분방정식 (32)식은 미정계수 c_n^j 을 결정하기 위한 연립 대수 방정식 (39)로 대치되었다. 이 대수 방정식으로부터 미정계수 c_n^j 이 결정되면 미분방정식 (32)의 근사해는 (36)식으로부터 결정된다.

방정식 (39)은 제차 방정식이다. 그러므로 유효해를 얻기 위해서는 $c_n^j \neq 0$ 이어야 한다. 이는 다음과 같은 조건하에서 얻어진다.

$$\det \langle D_{ij}[\phi_n(t; t_0, n)], \phi_n(t; t_0, n) \rangle = 0 \quad (40)$$

여기서 편의상 다음과 같은 매개변수를 도입하자.

$$\begin{aligned} I_1(t_0; n) &\equiv \langle \phi_n''(t; t_0, n), \phi_n(t; t_0, n) \rangle \\ I_2(t_0; n) &\equiv \langle \cot(t) \phi_n'(t; t_0, n), \phi_n(t; t_0, n) \rangle \\ I_3(t_0; n) &\equiv \langle \cot^2(t) \phi_n(t; t_0, n), \phi_n(t; t_0, n) \rangle \\ I_4(t_0; n) &\equiv \langle \phi_n(t; t_0, n), \phi_n(t; t_0, n) \rangle \end{aligned} \quad (41)$$

이를 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\langle L[\phi_n(t; t_0, n)], \phi_n(t; t_0, n) \rangle \\ &= I_1(t_0; n) + I_2(t_0; n) - I_3(t_0; n) \end{aligned} \quad (42)$$

(41)식과 (42)식을 이용하면 (40)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\det \begin{pmatrix} I_1 + I_2 - I_3 + \nu I_4 & I_4 \\ -\beta I_4 & I_1 + I_2 - I_3 + (\beta\lambda - \nu) I_4 \end{pmatrix} = 0$$

이를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\beta\lambda [I_4(I_1 + I_2 - I_3) + \nu I_4 I_4] \\ &= -\beta I_4 I_4 - (I_1 + I_2 - I_3)^2 + \nu^2 I_4 I_4 \end{aligned}$$

그러므로 위 방정식으로부터 붕괴압력은 다음과 같다.

$$\beta\lambda = \frac{\beta I_4}{-I_1 - I_2 + I_3 - \nu I_4} + \frac{-I_1 - I_2 + I_3 + \nu I_4}{I_4} \quad (43)$$

여기서 다음과 같은 매개변수를 도입하자.

$$\zeta(t_0; n) \equiv \frac{-I_1(t_0; n) - I_2(t_0; n) + I_3(t_0; n)}{I_4(t_0; n)} \quad (44)$$

그러면 (43)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lambda(\zeta, \nu, \beta) = \frac{1}{\zeta(t_0; n) - \nu} + \frac{\zeta(t_0; n) + \nu}{\beta} \quad (45)$$

아직은 $\zeta(t_0; n)$ 가 미지함수인데 이를 결정하면 붕괴압력은 (45)식으로부터 결정된다. (36)식을 보면 고유벡터 x_i 는 좌굴모드 $\phi_n(t; t_0, n)$ 로 결정되는데 이 좌굴모드는 주어진 경계조건을 만족하도록 설정해야 한다. 보다 정확한 해를 얻기 위해서는 실제 실험을 통해서 좌굴모드 $\phi_n(t; t_0, n)$ 를

결정하고 이로부터 $\zeta(t_0; n)$ 를 결정하면 (45)식으로 붕괴압력을 결정할 수 있다.

1.3 최소붕괴압력

(45)식에서 $\zeta(t_0; n)$ 은 미지함수이다. 만약 엄밀해를 $\phi_n(t_0; n)$ 으로 설정했다면 (45)은 정확히 상부에 구멍이 있는 반구의 붕괴압력을 지정해 준다. 본 연구와 같은 고유치 문제에서는 고유치 λ 와 그에 대응하는 고유벡터를 찾는 것이 목적인데 고유 좌굴 모드는 경계조건으로부터 추론 가능하다. 보다 정확히 추론하기 위해서는 실제 실험을 통해서 결정하는 것이 좋다. 즉 고유벡터 x_i 는 추론된 좌굴 모드 $\phi_n(t_0; n)$ 에 어떤 상수 c_n^j 를 곱하여 (36)식과 같이 설정 할 수 있다. 그러므로 고유벡터가 추론되었으므로 λ 에만 관심을 가진다. 그런데 (45)식을 보면 고유치 λ 는 $\zeta(t_0; n)$ 만을 독립변수로 하는 단일변수 함수임을 알 수 있다. 따라서 (45)식으로부터 $\phi_n(t_0; n)$ 를 설정하기에 앞서 고유치의 범위를 결정할 수 있다. (45)식으로부터 $\zeta(t_0; n)$ 에 대한 1계 및 2계 도함수는 각각 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} = -\frac{1}{[\zeta(t_0; n) - \nu]^2} + \frac{1}{\beta} \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \zeta^2} = \frac{2}{[\zeta(t_0; n) - \nu]^3} \quad (47)$$

(46)식으로부터 고유치 λ 는 다음과 같은 점에서 극값을 가짐을 알 수 있다.

$$\zeta(t_0; n) = \nu \pm \sqrt{\beta} \quad (48)$$

또한 (47)식으로부터 $\zeta(t_0; n) = \nu + \sqrt{\beta}$ 에서 2계 도함수는 양의 값을 가지고 $\zeta(t_0; n) = \nu - \sqrt{\beta}$ 에서 2계 도함수는 음의 값을 가짐을 알 수 있다. 그러므로 λ 는 $\zeta(t_0; n) = \nu + \sqrt{\beta}$ 에서 극소값을

가지고 $\zeta(t_0; n) = \nu - \sqrt{\beta}$ 에서 극대값을 가지는데 λ 는 양의 값만이 의미가 있기 때문에 $\zeta(t_0; n) > \nu$ 이어야 한다. 그러므로 극대값은 물리적으로 의미가 없고 $\zeta(t_0; n) > \nu$ 에 대해서 $\zeta(t_0; n) = \nu + \sqrt{\beta}$ 에서 λ 는 최소값을 가짐을 알 수 있다.

$\zeta(t_0; n) = \nu + \sqrt{\beta}$ 를 (45)식에 대입하면 그 최소값은 다음과 같다.

$$\lambda_{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{2\nu}{\beta} \quad (49)$$

따라서 $\phi_n(t_0; n)$ 를 어떻게 설정하든 붕괴압력은 이 값보다 작을 수 없다. 이 붕괴압력의 물리적인 의미를 분석하기 위해서 (5)식을 사용하면 (49)식은 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p_{\sigma} = \frac{2E\mu}{R(1-\nu^2)} \left[\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \left(\frac{h}{R} \right) + \frac{\nu}{6} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \quad (50)$$

(50)식과 (10)식을 비교해 보면 이는 결함이 없는 구의 붕괴압력임을 알 수 있다. 구멍이 있는 반구의 경우에는 일반적으로 $\zeta(t_0; n) \neq \nu + \sqrt{\beta}$ 이어야 하므로 붕괴압력은 (50)식보다 커야 함을 알 수 있다. 그러므로 구멍이 있는 반구의 붕괴압력은 결함이 없는 구의 붕괴압력보다 항상 크다는 결론을 내릴 수 있다. 이는 실제 현상과 대립된다. 따라서 앞서 기술한 해석방법으로 계속 이론을 전개하는 것은 의미가 없고 다른 접근방법을 사용해서 붕괴압력을 결정해야 한다.

2. 해석해의 분석 및 설계공식

2.1 해석해의 분석

앞서 구멍이 있는 반구의 붕괴압력은 구체적으로 계산하지 않았지만, 붕괴압력은 구의 붕괴압력보다 크다는 것을 증명하였다. 그런데 이는 이상적인 경계조건을 구현할 수 있을 때에 한해서 만족되

고 실제 설계에서는 이를 구현하는 것이 거의 불가능하다. 따라서 설계를 위해서 우리는 위의 붕괴압력을 조정할 필요가 있고, 방정식 (32)의 엄밀해를 푸는 것은 더 이상 의미가 없다.

어쨌든 Bauer 이론이 어느 정도 타당성을 가진다면 구멍이 있는 반구의 실제 붕괴압력은 (45)식으로 계산된 이론적인 붕괴압력과 유사한 형태로 될 것이다. 그러므로 구의 붕괴압력보다 작게 하기 위해서 위의 해석해에 "1"보다 작은 상수 ξ 를 곱하여 다음과 같은 공식을 설계공식으로 선택할 수 있다.

$$\lambda = \xi \left[\frac{1}{\zeta(t_0; n) - \nu} + \frac{\zeta(t_0; n) + \nu}{\beta} \right]$$

여기서 $\zeta(t_0; n) \gg \nu$ 이므로 우변의 괄호안의 $\zeta \pm \nu$ 를 ζ 로 써도 무방하다.

$$\lambda(t_0) = \xi \left[\frac{1}{\zeta(t_0)} + \frac{\zeta(t_0)}{\beta} \right] \quad (51)$$

여기서 $\zeta(t_0)$ 는 더 이상 n 의 함수일 필요가 없다. 그리고 ξ 는 이상적인 경계조건을 구현할 수 없는 제작상의 오차를 보정하기 위한 일종의 안전 계수이다.

2.2 설계공식

(51)은 구 뿐만 아니라 구멍이 존재하는 반구의 붕괴압력을 지정해 준다. 즉 $t_0 = 0$ 이면 (51)식은 구멍이 없는 반구에 대한 붕괴압력이어야 하고 $t = \pi/2$ 이면 (51)식은 원주를 따라서 단순지지를 받는 원환의 붕괴압력이 되어야 한다. 이 두 조건으로부터 ξ 와 $\zeta(t_0)$ 를 결정할 수 있는데, 이 두 조건은 각각 다음과 같다.

$$\xi \left[\frac{1}{\zeta(0)} + \frac{\zeta(0)}{\beta} \right] = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \quad (52)$$

그리고

$$\xi \left[\frac{1}{\zeta(\pi/2)} + \frac{\zeta(\pi/2)}{\beta} \right] = \frac{1}{6} + \frac{5}{\beta} \quad (53)$$

결정해야 할 미지수는 ξ , $\zeta(t_0)$ 및 $\zeta(\pi/2)$ 3 개인데 반해서 방정식의 수는 2개이므로 방정식의 수가 1개 부족하다. 그런데 (53)을 보면 좌변과 우변이 β 에 대해서 동일한 함수로 주어져 있음을 알 수 있다. 그러므로 (53)식을 β 에 대한 항등식으로 취급하면 부족한 방정식을 보충할 수 있다. 즉 (53)식은 β 에 대한 항등식이어야 하므로 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{\xi}{\zeta(\pi/2)} = \frac{1}{6} \quad (54)$$

$$\xi \zeta(\pi/2) = 5 \quad (55)$$

(54)식과 (55)식을 곱하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\xi = \sqrt{\frac{5}{6}} \quad (56)$$

그러므로 "1"보다 작다는 가정을 만족한다. 이를 (55)식에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\zeta(\pi/2) = \sqrt{30} \quad (57)$$

그리고 (56)식을 방정식 (52)에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{\zeta(0)} + \frac{\zeta(0)}{\beta} = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\frac{6}{5}}$$

그리고 위 방정식의 양변에 $\beta \zeta(0)$ 를 곱하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\zeta^2(0) - 2\sqrt{\frac{6}{5}}\sqrt{\beta}\zeta(0) + \beta = 0 \quad (58)$$

방정식 (58)식을 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$\zeta(0) = \theta \sqrt{\beta} \quad (59)$$

여기서

$$\theta \equiv \frac{\sqrt{6} \pm 1}{\sqrt{5}} \quad (60)$$

그리고 본문에서 $\zeta(t_0)$ 가 다음과 같은 함수형태를 취해야 함을 설명하였다.

$$\zeta(t_0) = \sqrt{30} \left(\frac{\theta \sqrt{\beta}}{\sqrt{30}} \right)^{\gamma + j t_0} \quad (61)$$

그러면 (57)식과 (59)식으로부터 $\gamma = 1$, $j = -2/\pi$ 를 얻을 수 있다. 즉

$$\begin{aligned} \zeta(t_0) &= \sqrt{30} \left(\frac{\theta \sqrt{\beta}}{\sqrt{30}} \right)^{1 - 2t_0/\pi} \\ &= \sqrt{30} \left(\frac{\theta^2 \beta}{30} \right)^{1/2 - t_0/\pi} \end{aligned} \quad (62)$$

(56)식과 (62)식을 (51)식에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\lambda(t_0) = \psi_1 \frac{2}{\sqrt{\beta}} \quad (63)$$

여기서

$$\psi_1 \equiv \sqrt{\frac{5}{24}} \left[\frac{\theta}{\left(\frac{\theta^2 \beta}{30} \right)^{t_0/\pi}} + \frac{\left(\frac{\theta^2 \beta}{30} \right)^{t_0/\pi}}{\theta} \right] \quad (64)$$

3. 원주방향으로 단순지지를 받는 원환의 붕괴압력

원주는 축방향 길이가 "0"인 원통이라고 할 수 있기 때문에 원주방향으로 단순지지를 받고 원주를 따라서 균일한 외압을 받는 원환의 붕괴압력은 방정식 (3)에서 $L=0$ 으로 대치시키면 얻을 수 있다. 즉 방정식 (3)으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$p_{cr} = \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \left[\frac{1-\nu^2}{n^2-1} + \frac{h^2}{12R^2} (3n^2-2-\nu) \right] \quad (65)$$

$n=2$ 이고 $\nu \in [0.3, 0.5]$ 이므로 $3n^2-2-\nu$ 를 $3n^2-2$ 로 써도 무방하다. 그러면 다음과 같은 붕괴압력을 얻을 수 있다.

$$p_{cr} = \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \left[\frac{1-\nu^2}{3} + \frac{10}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \quad (66)$$

(66)식의 양변에 $\frac{R}{2Eh}$ 를 곱하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{Rp_{cr}}{2Eh} = \frac{1}{6} + \frac{5(h/R)^2}{12(1-\nu^2)}$$

여기서 (5)식의 무차원 변수를 사용하면 위식은 다음과 같다.

$$\lambda_c = \frac{1}{6} + \frac{5}{\beta} \quad (67)$$

이 식은 무차원화된 원환의 붕괴압력을 나타낸다.

4. 구멍이 없는 구의 붕괴압력

구멍이 없는 구의 붕괴압력은 방정식 (10)식 또는 (16)식에서 우변의 두 번째 항을 약해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p_{cr} = \frac{2Eh}{R(1-\nu^2)} \left[\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \left(\frac{h}{R} \right) \right] \quad (68)$$

양변에 $\frac{R}{2Eh}$ 을 곱하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{Rp_{cr}}{2Eh} = 2\sqrt{\frac{(h/R)^2}{12(1-\nu^2)}}$$

여기서 (5)식의 무차원 변수를 사용하면 위식은 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\beta}}$$