韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 8집, 1999. 1. 17-32.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 8, Jan. 1999. 17-32.

Cabri II를 이용한 증명 교수학습 방법에 관한 연구

류 희 찬 (한국교원대학교)
조 완 영 (청주농업고등학교)

본 논문의 목적은 Cabri II를 이용하여 형식적이고 연역적인 증명수업 방법의 대안을 찾는 데 있다. 형식적인 증명을 하기 전에 탐구와 추측을 통한 발견과 그 결과에 대한 비형식적인 증명 활동을 강조한다. 역동적인 기하소프트웨어인 Cabri II는 작도가 편리하고 다양한 예를 제공하여 추측과 탐구 그리고 그 결과의 확인을 위한 풍부한 환경을 제공할 수 있으며, 끌기 기능을 이용한 삼각형의 변화과정에서 관찰할 수 있는 불변의 성질이 형식적인 증명에 중요한 역할을 한다. 또한 도형에 기호를 붙이는 활동은 형식적인 증명을 어렵게 만드는 요인 중의 하나인 명제나 정리의 기호적 표현을 보다 자연스럽게 할 수 있게 해 준다. 그러나, 학생들이 증명은 더 이상 필요 없으며, 실험을 통한 확인만으로도 추측의 정당성을 보장받을 수 있다는 그릇된 인식을 심어줄 수도 있다. 따라서 모든 경우에 성립하는 지를 실험과 실측으로 확인할 수는 없다는 점을 강조하여 학생들에게 형식적인 증명의 중요성과 필요성을 인식시킬 필요가 있다. 본 연구에 대한 다음과 같은 후속연구가 필요하다. 첫째, Cabri II를 이용한 증명 수업이 학생들의 증명 수행 능력 또는 증명에 대한 이해에 어떤 영향을 끼치는지 특히, van Hiele의 기하학습 수준이론에 어떻게 작용하는 지를 연구할 필요가 있다. 둘째, 본 연구에서 제시한 Cabri II를 이용한 증명 교수학습 방법에 대한 구체적인 사례연구가 요구되며, 특히 탐구, 추측을 통한 비형식적인 증명에서 형식적 증명으로의 전이 과정에서 나타날 수 있는 학생들의 반응에 대한 조사연구가 필요하다.

I. 연구의 필요성 및 목적

중등학교 기하교육은 논리적 사고 능력을 발달시키고 실세계의 공간에 대한 직관력을 향상시키는 데 있다. 수학에 의미를 주고 수학하는 힘의 근원이 되는 것은 추론능력이며, 수학교육의 주요 목적 중의 하나는 발견의 논리인 귀납과 유추에 의한 개연적 추론 능력과 함께 강력한 정당화의 논리인 연역적 추론능력을 개발하는 것이라 할 수 있다(우정호, 1998). NCTM 2000에서도 추론과 증명을 수학을 이해하는 중요한 요소로 보고, 학생들이 추론과 증명을 수학의 본질적이고 강력한 부분으로 인식하고, 수학적으로 추측하고 탐구하며, 수학적 논증을 개발하고 평가하고, 여러 가지 유형의 추론과 증명 방법을 선택·이용할 수 있어야 한다고 규정하고 있다(NCTM, 1998).

그러나 오늘날 중등학교의 기하교육은 정의, 공리, 공준, 정리를 수학의 논리적 존재

론적 기초로 하여 그로부터 수학적 지식을 연역적으로 증명해 가는 Euclid 원론의 전통을 이어받아 발견의 논리인 분석이 감추어진 채로 제시되고 있다(우정호, 1998). 중등학교의 증명 지도는 Euclid 기하의 엄밀하고 선형적으로 전개되는 공리적 특성에 따라 엄밀한 증명의 모방과 기억 중심의 형식적인 증명 지도로 일관하고 있으며, 이로 인해 학생들은 증명의 중요성과 필요성을 인식하지 못하고 오히려 증명을 어려워하고 기피하고 있다.

사실, Euclid 원론에 나오는 여러 가지 수학적 정리는 Euclid 자신이 새롭게 증명한 것이 아니라 그 동안 밝혀진 정리를 연역적 체계로 집대성한 것에 지나지 않는 것이다. 즉, Euclid 원론의 내용들은 우연의 결과가 아니라 무수한 탐구와 시행착오의 과정을 거쳐 어떤 순간적인 직관을 통해 이루어진 것이며, 이러한 기하학적 직관력은 체계적인 탐구활동을 통해 얻어지는 정신 능력이라 할 수 있다. 현재의 학교 논증기하 교육의 문제는 연역적이고 형식적인 증명에 치중하고 탐구와 추측의 재발명 과정이 소홀히 취급되고 있다는 데 있다. 수학은 연역적인 형식과학이자 동시에 경험 곧 관찰과 실험을 통한 추측으로 시작되는 귀납적인 과학이다. 관찰과 귀납에 의해 수학적 발견 또는 발명이 이루어지고 연역적 사고에 의해 체계화되고 확립된다(우정호, 1998). 증명 지도에서의 문제는 수학의 연역적인 측면만을 강조한 데서 비롯된 것이며, 따라서 문제의 해결책은 연역적이고 형식적인 증명 못지 않게 탐구하고 추측하며 기하학적 아이디어를 추론하는 과정을 강조하는 데서 찾을 수 있다.

비형식적인 탐구활동은 물론, 도형을 작도하고 측정하며 시각화하고 비교, 변환, 분류하는 활동을 통하여 공간감각을 기르고, 귀납추론과 연역추론을 포함한 추론능력을 개발하며 추측을 정당화하며 기하학적 대상을 분류하고 정의하는 활동 또한 중요하다. 이런 과정에서 정의, 정리, 증명의 필요성과 성질을 이해하게 되고 형식적인 추론과 증명에 이르게 되어(NCTM, 1998), 합리적이고 생산적인 기하학적 사고를 기를 수 있다. Freudenthal(1973)도 기하 학습은 공간에 대한 경험을 조직화하는 수학화 활동이어야 하며, 기하가 기성의 논리체계로서 학생들에게 부과될 것이 아니라 연역적 구성과정의 재발명을 통해 이루어져야 한다고 주장한다.

신동선과 류희찬(1998)은 기하교육의 문제를 개선하기 위한 방안으로 실험실 활동과 역동적인 소프트웨어의 활용을 제안하고 있다. 그들에 따르면, 과학 실험실 활동과 마찬가지로 수학교육에서도 학생들이 실험실에서 관찰하고 토의하는 활동이 필요하다. 수학을 행하는 수학자들처럼 학생들은 특별한 경우에 이루어진 관찰과 탐구를 통해 규칙성을 일반화함으로써 가설을 설정하고, 다시 논리적인 증명이나 반례를 찾음으로써 그 가설을 검증하는 활동이 동시에 이루어질 필요가 있다. 이러한 실험실 활동이 지필환경에서는 이루어지기 어려우며 여기서 컴퓨터의 도입이 요구된다.

형식적이고 연역적인 증명을 지도하기 이전에 관찰과 조작활동을 통한 탐구와 추측을 하고 가설을 형성하는 활동이 필요한 바, 역동적인 기하소프트웨어는 증명의 지도에서도 중요한 역할을 할 수 있다. 역동적인 기하소프트웨어인 Cabri II는 평면도형과 공간도형에 대한 학생들의 경험을 강화시킬 수 있으며, 다양한 예를 쉽게 만들어 주고, 도형의 중요한 요소를 잃지 않으면서 도형을 자유 자재로 변형시킬 수 있고 이로 인해 탐구와 추측을 강조하는 기하수업이 용이해진다. 또한 작도 과정에 대한 탐구는 추론과 증명과정에서 중요한 역할을 한다.

본 논문은 컴퓨터를 이용한 수학교육론의 이론적인 체제와 실제에 대한 연구의 일환으로, 역동적인 기하 소프트웨어 Cabri II를 이용하여 학생들의 탐구와 추측활동, 가설형성 과정을 강조한 증명 수업 방법을 제안하는 데 있다. 이러한 목적을 달성하기 위해 II장에서는 이론적인 배경으로 1절에서는 증명의 성격을 증명의 사회적 성격과 학교수학에서의 증명으로 나누어 논의하고, 2절에서는 van Hiele의 기하학습 수준이론을 증명의 관점에서 논의하며, III장에서는 II장에서 논의한 이론적인 입장을 토대로 Cabri II를 이용한 증명수업 방법과 중학교 2학년의 기하 단원 내용을 중심으로 Cabri II를 이용한 증명 수업의 실제를 제시한다.

II. 이론적 배경

1. 증명의 성격

가. 사회적 과정으로서의 증명

유클리드 기하의 영향을 받은 학교기하에서의 증명지도는 탐구, 추측, 가설형성이라는 발견 또는 발명의 과정이 생략된 채, 다른 사람이 해 놓은 증명을 연역적으로 제시하여 학생들은 단지 증명 단계 또는 증명과정을 암기 이해하는 데 치중하는 경향을 보이고 있다. 1960년대 수학교육 현대화 운동에 이르러 수학적 개념에 대한 엄밀한 형식적 논리와 연역적 체계를 강조함으로써 중등 수학교육과정은 학문으로서의 수학의 기반이 더 확고해질 수 있다는 신념을 갖게 되었다. 이러한 신념에는 현대 수학에는 수학적 증명의 타당성에 대한 일반적으로 인정되는 기준이 있으며, 그 기준이 바로 엄밀한 증명이라는 가정을 암묵적으로 포함되어 있으며 학교에서의 증명 교수학습은 더욱 더 형식화되어 갔다(류성림, 1998). 이로 인해 학생이나 교사들은 증명을 싫어하고 기피하고 있으며, 증명능력이 떨어짐은 물론 증명은 수학적 능력이 뛰어난 사람들이나 할 수 있는 것이라는 잘못된 인식이 고착화되었다.

그러나, 증명이 절대적인 확실성을 갖는 것은 아니며, 따라서 증명의 성격은 정적인 것이 아니라는 주장이 제기되어 왔다. 즉, 증명을 수용하는 아이디어가 상황에 따라 다를 수 있고, 증명의 타당성은 사회의 수학적 사조를 반영해야 한다는 증명의 사회적

과정이 강조되고 있다. 수학에는 형식적인 체계 이상의 그 무엇이 존재하며, 증명의 내용에는 관계없이 형식적으로만 타당하면 증명을 이해하기 어려우며 증명 당사자조차 확신할 수 없다는 아이러니를 대부분의 수학자들도 인정하고 있다(Hanna, 1991).

Bell(1976)은 증명을 가상의 의심자를 대상으로 확신에 이르게 하는 본질적으로 공적인 성격으로서의 활동으로 보고 있다. 증명은 일반화의 발달을 수반하는 내적 검증, 수용, 또는 기각으로부터 성장하게 된다. 이러한 내적인 과정이 점차 외면화되는 바, 자신의 일반화를 타인의 비판에 노출시키게 되는 데, 처음에는 말을 통해서 그 다음에는 일반화와 함께 타당성을 위한 증명 형태의 쓰기 형식으로 제시하게 된다는 것이다.

Alibert & Thomas(1991)도 수학자들의 연구활동에는 탐구과정을 통한 추측의 형성과 증명개발이라는 두 가지 기본적인 요소가 포함되어 있다고 주장한다. 수학적 상황을 탐구하여 수학적 사실을 발견하고 창조해 가는 추측의 과정은 주로 귀납적 사고에 의해 이루어지고, 자신의 추측을 입증하는 과정으로서의 증명은 주로 연역적인 사고에 의해 정리된다. 이러한 추측과 증명은 두 가지 특징을 갖고 있다. 첫째, 개인적인 측면으로 자신이 이해하게 된 논리를 분명히 표현하는 것이고, 둘째, 집단적인 측면으로 아직 확실치는 않지만 자신의 추측을 학계에 제출하여 의사소통을 통해 다른 사람들이 생각해 보도록 추측과 증명을 제안하는 것이다. 따라서 증명은 다른 사람들을 확신시키려는 노력임과 동시에 자신을 확신시키는 수단이 되기도 한다.

오류주의 수리철학을 주장하는 Lakatos(1976)는 수학이 비록 경험 과학은 아니지만 그 방법은 경험과학의 방법들과 매우 유사하다고 주장하면서 준경험으로서의 수학을 선호하였다. 그에 따르면, 수학은 "고찰과 비판, 증명과 반박의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선"을 통하여 발달하게 된다는 것이다. 따라서 어떠한 증명도 끝난 것은 없으며, 실제로 증명은 시작부터 형식적 준거를 적용한다기 보다는 의미를 타협하는 사회적 과정인 바, 의미의 타협을 통하여 증명을 개선하고 증명의 결과를 수용하게 된다.

Tymoczko(1986)도 영구불변의 확실한 지식을 생성하기 위해 형식적인 연역 절차만 따르면 된다고 생각하는 것은 불합리하다고 주장하면서, 수학을 가르치는 일은 물론 어떤 정리를 증명하는 것까지도 공적인 활동으로 보고 있다. 그는 Lakatos의 증명관과 입장을 같이하고 있는데 수학적 증명은 일반적으로 열림성과 유연성을 가지고 있고, 다양한 방법들로 바꾸어 말하거나 재진술될 수 있으므로 어떤 특별한 형식적 체계에 연연할 필요는 없으며, 때로는 비형식적 증명이 설득력이 있고 그로 인해 새로운 것을 발견할 수도 있음을 주장하고 있다.

위의 주장들은 수학에는 형식적인 증명 그 이상의 것이 존재하며, 정리를 수용하는 과정에서의 증명의 역할을 수학적 아이디어를 발견 또는 발명하는 과정에서의 증명의 역할과 유사한 것으로 보고 있다. 수학적 아이디어는 형식적 논리와 직접적인 관련이

없는 창조 활동을 통하여 발견되고 발명된다. 수학적 아이디어는 추론되거나 연역되는 것이 아니라, 비형식적인 직관에 의해 기성 수학에서의 의미와 장차 또 다른 아이디어를 산출할 가능성을 인식하는 과정에서 개발된다. 이러한 아이디어가 정리로 발표되기 위해 증명이 필요하며, 이때의 증명이 엄밀하거나 완전할 필요는 없다. 실제로 아이디어를 이해시키고 확신시킨다는 점에서, 형식적 타당성보다는 증명의 개관이나 아이디어의 전체적인 전달이 더욱 중요하다(Hanna, 1983).

사회적 과정으로서의 증명의 역할을 강조하는 철학적 입장에서 보면 학교에서의 증명 교수학습에서도 형식적인 증명 형식만을 강조할 것이 아니라 아이디어의 의미나 목적이 강조되어야 한다. 탐구 활동을 통하여 추론의 중요성을 인식하고 세밀한 분석으로 가설을 형성하는 과정이 형식적인 증명지도와 병행되어야 한다. 즉, 연역적이고 형식적인 증명 전에 증명할 내용에 대한 작도, 탐구 정리의 추측 등 분석과정을 통해 증명의 필요성과 증명 방법을 예측해 보는 활동이 요구된다.

나. 학교수학에서의 증명

현재 중등 교육과정에서의 기하교육 특히 논증 부분은 공리-연역적 방법을 중시하는 Euclid 원론의 영향에서 벗어나지 못하고 있다. 중학교 2, 3학년에서 다루어지고 있는 평면 논증기하는 Euclid 원론의 내용을 초등화한 것으로 도형의 몇 가지 성질을 받아들이고 삼각형의 합동조건, 닮음조건 및 보조선 방법을 이용하여 연역적으로 추론하는 Euclid 기하의 틀을 그대로 유지하고 있다(우정호, 1998).

6차 교육과정의 중학교 수학교과서를 보면, 8종의 수학교과서 중 4종(구광조 외 1인(1996), 김응태 외 3인(1996), 김호우 외 3인(1996), 오병승(1996))의 교과서에서 "주어진 명제가 참임을 밝히기 위하여 가정에서 출발하여 이미 알고 있는 사실을 이용하여 결론으로 이끌어 나가는 것이 증명이다."라고 하여 연역적인 증명이 왜 필요한가에 대한 설명 없이 연역적 증명을 도입하고 있으며, 3 종의 교과서(김연식 외 1인(1996), 박두일 외 2인(1996), 최용준 외 1인(1996))에서는 실험이나 측정으로 어떤 성질을 확인해 보던가 예측해 볼 수는 있지만 이것만으로는 어떤 성질이 항상 옳다고 단정할 수 없다는 보기와 예에 대한 설명을 한 후, "실측이나 실험에 의하지 않고 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들을 근거로 이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다."고 정의하여 연역적 증명의 필요성을 형식적으로나마 설명하고 있다(김홍기, 1998). 그러나 위에 열거된 모든 교과서가 Euclid 기하의 형식적이고 연역적인 증명 방법을 따르고 있다.

그러나 Euclid 기하의 엄밀하고 형식적인 전개 방식에 대한 비판이 꾸준히 제기되어 왔으며, 진정한 논리적 사고 능력의 함양과 수학적 이해 및 의사소통을 위한 수단으로서의 증명의 역할에 대한 반성과 더불어 실험이나 귀납을 통한 도형의 성질의 발견과

직관적 이해 및 역사 발생적인 전개와 같은 지도방법에 대한 주장들이 대부분이었다. Lakatos는 증명은 정리가 참임을 밝히는 수단이 아니라 발견과 개선을 위한 수단이자 사고실험이라고 주장하고 있다. 그는 원시적인 추측, 증명, 판례에 의한 반박, 증명 분석, 추측의 개선에 따라 수학적 발견이 이루어지고 있다고 주장하고 있다.

앞에서 논의한 증명의 사회적 성격을 고려할 때, 교사들이 요구하는 형식적인 필연성 또는 학생들이 하지도 않은 질문에 교사들 스스로가 제시하는 답으로서의 증명이 아니라 조사 연구, 추측 등과 같은 탐구활동과 더불어 과학적인 과정에 필요한 단계로 증명을 이해할 필요가 있다. 의미를 타협해 가는 사회적 과정으로 보는 증명 관에 따르면 증명의 의미는 증명이 이루어지는 사회적 상황이나 증명을 하는 나이에 따라 그 의미가 다양하게 나타날 수 있다. NCTM의 2000년을 위한 교육과정의 원리와 규준에서도 추론과 증명을 엄밀성의 정도는 다르지만 K-12 학년 전과정에서 다루어져야 한다고 강조하고 있다. 다양한 현상을 탐구하고 추측하는 가운데 비형식적인 증명을 경험하고 사회적 상호작용을 통해 학습자가 능동적으로 증명을 구성해 가는 증명 수업이 요구된다.

2. van Hiele 모델과 증명 지도

van Hiele는 학생들이 기하 개념을 이해해 나가는 과정을 기하학적 사고 수준 또는 인지 발달 단계를 다섯 가지 수준으로 나누어 제시하고 있다(류성림, 1998). 제 0 수준인 시각적 수준(visualization)은 학생 자신의 주변에 있는 어떤 '물체'가 학습의 대상이 되어 단순히 시각적으로 외형적인 형태로만 인식하는 단계이고, 제 1 수준인 분석적 수준(analysis/description)은 주변 대상의 정리 수단이던 '도형'이 사고의 대상이 되어 도형의 구성 요소와 '성질'에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악하는 수준이다.

제 2 수준인 추상적 수준(abstraction/relation)은 도형을 어떤 물체가 가지는 형태를 떠나 순수한 도형의 입장에서 그것을 정의하고, 그 '성질'을 파악하며, 또 도형과 도형 사이의 관계를 수학적인 언어 도구인 '명제'를 수단으로 정리할 수 있다. 예를 들면, 앞 수준에서 '삼각형이란 세 개의 선분을 둘러싸인 도형이다' 라고 정의한 기계적인 이해에서 관계적 이해(Skemp, 1987)로 전환되는 단계이기 때문에, 이 수학적인 문장을 이론적으로 정리된 하나의 명제로 인식하게 된다. 이렇게 이해된 정의 위에서 '삼각형의 세 내각의 합은 얼마인가?'라는 의문을 하게 되며, 이러한 의문을 귀납적 추론의 방법으로 풀어서 결국 '삼각형의 세 내각의 합은 180° 이다'라는 하나의 정리를 유도할 수 있다. 이 수준에서는 간단한 성질은 규명할 줄 알고 도형과 그 성질들 사이의 논리적인 관계가 정의를 통해 확립되지만, 연역의 완전한 관계는 이해하지 못한다. 즉 간단한 추론은 가능하지만 아직 연역적 추론으로서의 증명은 할 수 없다.

제 3 수준인 연역적 수준(formal deduction)은 '명제'가 사고의 대상이 되며, 명제들

사이의 '논리'적 관계가 정리 수단이 되어 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 사이의 논리적인 차이점을 인식하고, 증명의 의미와 역할을 이해하고 기하의 연역 체계를 파악한다. 하나의 명제로부터 다른 명제로의 연역을 위해 일련의 명제 체계를 구성하여 성질을 규명하는 단계이다. 또한 이 수준에 도달한 학생은 기하학적 사고의 전개와 형성 수단으로서의 연역의 의미를 이해하며, 생소한 정의로부터도 연역적 사고를 할 수 있다. 예를 들면, '두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라 한다'라는 정의를 이용하여 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다'를 증명할 수 있다.

그러나 3 수준에서의 학생들은 명제의 추론 과정에서 엄밀성이 얼마나 필요한지를 깨닫지 못할 뿐 아니라, 어떤 한 연역 체계에서 다른 연역 체계로 넘어갈 때의 사고의 이행 관계도 이해하지 못한다. 예컨대, '직선 밖의 한 점을 지나고 이 직선에 평행인 직선은 존재하며 단 하나 존재한다'는 평행선 공리를 사실 그대로 인식을 해야 하는 것인지, 아니면 증명을 해야 하는 것인지를 알지 못한다. 이러한 것은 제 4 수준인 엄밀화 수준(rigor/metamathematical)에서나 가능하다.

van Hiele 이론의 핵심은 학생들의 수준 또는 발달 단계에 알맞은 기하의 학습 지도가 이루어져야 한다는 데 있다. 특히, van Hiele은 기하 교수에서의 주된 문제를 교사의 기대치와 학생들의 준비 상태의 차이 때문으로 파악하였다. 즉 교사는 자신의 수준에서 학생들에게 설명하는데, 학생들은 교사의 사고 수준보다 낮은 수준에서 사고하기 때문에 교사의 설명을 이해할 수 없다는 것이다. 그러므로 교사는 학생들의 수준을 파악하고 그들의 수준에서 풍부한 사고를 유발하도록 학습을 준비해야 하며, 학습은 학생들이 다음 수준으로의 전이가 이루어지도록 구성해야 한다는 것이 van Hiele의 주장이다.

van Hiele의 수준 이론이 증명지도에 주는 시사점은 van Hiele 모델이 증명의 성공 여부를 예측할 수 있는 통찰력을 제공한다는 데 있다. 예컨대, 삼각형과 그 성질을 이해하지 못한 학생들은 삼각형의 성질을 포함한 증명을 하기가 어렵다. 각 수준은 위계적이며 수준의 비약은 일어나기 어렵다는 것이 van Hiele 모델의 특징 중의 하나다. 따라서 증명의 의미와 역할을 이해하고 형식적인 증명 능력은 3수준에서나 가능하기 때문에 이 수준에 도달하지 못한 학생들에게 증명을 가르치는 것은 문제가 있다.

Senk(1985, 1989)는 학생들의 van Hiele 수준, 기하 지식, 증명 성취도에 대한 연구를 통해 학생들이 기하의 증명 문제를 합리적으로 해결할 가능성을 갖도록 하려면 최소한 수준 2 이상에 속하도록 해야 한다고 보고하고 있다. 그는 증명 능력은 일반 기하에서의 성취도와 관련이 있음을 확인하면서, 도형을 인식하지 못한 0수준의 학생들은 고등학교에서의 기하 과정에서 증명을 학습할 수 없었으며, 도형의 성질을 이해하지 못한 1수준의 학생들은 단순한 증명을 할 수는 있었지만 완성도가 30%에 머물렀다

고 밝히고 있다. 반면 2수준의 학생들은 50% 정도의 증명 능력을 보였으며, 수준 3에 도달한 학생들은 증명 성취도가 상당히 높은 것으로 나타났다. 이러한 Senk의 연구결과는 형식적인 증명이 3수준에서나 가능하다는 van Hiele 수준 이론을 뒷받침하면서 수준 2의 학생들에 대한 증명 수행 가능성을 시사하고 있어 주목된다.

학생들의 증명능력 향상을 위한 대안적인 수업 방법에 대한 많은 연구들이 있다. Bell(1976)은 학생들이 협동학습으로 추측을 하고 논증과 증거에 의해 갈등을 해결하는 수업을 통해 학생들의 증명능력을 향상시킬 수 있다고 주장한다. Fawcett(1938)도 학생들이 자기 나름대로의 공리, 정의, 정리를 개발하고 자신들의 추측을 조사, 논의, 정당화하도록 설계한 2년간의 기하 실험수업에 대한 연구결과, 실험집단의 학생들이 전통적인 집단의 학생들보다 기하 성취도가 높았으며 특히, 실험집단의 학생들과 부모들 모두 학생들의 연역적 사고가 향상되었음을 주장했다고 밝혀 Bell의 연구를 뒷받침하고 있다. Human과 Nel(1989) 또한 van Hiele 모델에 근거한 연구에서 연역적이고 공리적인 사고를 점진적으로 도입하는 것이 바람직하다는 연구 결과를 제시하고 있다. 명백하지 않은 명제를 먼저 도입하여 학생들로 하여금 증명해야 할 가설을 세우도록 함으로써 가능한 증명을 의미 있게 만들어야 한다는 것이 그의 주장이다.

일반적으로 중등 기하교육의 목표는 학생들이 수준 3에 도달하게 하는 것, 즉 증명의 의미를 이해할 수 있도록 하는 것이라 할 수 있는데(한태식, 1995), 학생들이 기하, 특히 증명에서 실패하는 가장 큰 이유는 아직 하위 수준에 있는 학생들에게 수준 3의 내용인 형식적 증명을 가르치기 때문이라 할 수 있다. 그러나 van Hiele의 이론이 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준에 도달하는 것은 아니며, 수준의 상승은 교수학습 방법의 적절성 여부에 따라 촉진 또는 지연될 수 있다(Clements & Battista, 1992)는 열린 이론이며, 이런 점에서 어떻게 증명을 가르칠 것이냐의 문제는 매우 중요하다. 또한 연역의 완전한 관계는 이해하지 못하지만 귀납적 추론 방법에 의해 비교적 간단한 성질을 명제로 인식할 수 있고 정의를 이용해 도형과 도형의 성질 사이의 논리적인 관계를 이해할 수 있는 2수준 학생들의 증명가능성의 문제도 주목할 만하다. 문제는 증명 교수학습 방법에 있으며, 형식적인 증명을 준비 없이 제시하는 것은 증명 교육의 실패를 가정하는 것이나 다름없다. 지금까지 논의된 연구 결과를 종합해 보면 탐구·추측하고 가설을 세우는 활동이 연역적인 증명 능력 향상에 도움이 될 수 있을 것이라는 주장이 설득력이 있다.

Ⅲ. Cabri Ⅱ를 이용한 증명 수업 방법

본 장에서는 6차교육과정 중학교 2학년에 나오는 기하 단원의 내용 중 두 가지 과제를 발췌하여 Cabri Ⅱ를 이용한 증명 수업 방법에 관하여 논의한다. 1절에서는 평행

사변형의 조건을 증명하는 문제를 대상으로 전체적인 증명과정의 개관을 논의하고 2절에서는 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다"라는 명제에 대한 증명 수업의 실제를 제시한다.

본 장에서 제시한 증명 수업 방법은 앞에서 논의한 이론적 배경과 연구자의 수학적 지식을 바탕으로 구성한 것으로, 실제로 학생들이 어떻게 사고하고 탐구할 것인지, 형식적인 증명 수행능력에 어느 정도 도움이 될 것인지에 대한 광범위한 사례연구를 해 볼 필요가 있다. 이러한 활동을 개별적으로 할 수도 있지만, 탐구 내용, 방법이 다양해지고 자신의 추론을 정당화할 기회가 많아진다는 면에서 두 명 또는 소집단으로 이루어지는 것이 더 바람직할 것이다. 또한 교사는 증명의 각 과정에 적절히 개입하여 학생들의 활동을 안내할 필요가 있다.

1. Cabri Ⅱ를 이용한 증명수업 방법

본 논문에서는 형식적인 증명은 물론, 정리를 발견 또는 재발명하는 귀납 추론이 중등학교에서의 증명지도에서 강조되어야 한다는 Ⅱ장에서의 이론적 배경을 토대로, 증명과정을 작도 및 탐구, 추측과 가설형성, 자신의 추측과 가설의 정당성을 일상언어나 수학적 언어로 의사소통하는 비형식적 증명, 형식적인 증명, 반성과 확장 등 여섯 단계로 구분하여 논의한다. 이러한 증명 수업 방법은 앞에서 논의한 이론적 배경과 연구자의 수학적 지식을 바탕으로 구성한 것으로, 절대적인 의미는 아니며 상황에 따라 수정될 수 있다. 또한 각 단계가 단순히 선형적인 것은 아니며, 각 단계에서 단계로의 피드백이 이루어질 수 있다. 예를 들어, 작도 과정에서 추측과 가설을 세울 수도 있고, 비형식적인 증명 단계에서 자신의 추측이나 가설을 정당화할 때 모순을 발견하면 작도와 탐구과정으로 되돌아가 점검할 수도 있다.

본 증명 수업방법의 특징으로는 첫째, 다른 사람들이 만들어 놓은 증명을 그대로 답습하는 증명이 아니라 자신들이 만든 정리(가설)를 증명하는 것이며, 자신의 주장의 정당성을 밝힌다는 의미에서의 증명임을 의식하게 하여 증명의 필요성을 인식시키고, 둘째, 비형식적인 탐구와 추측, 정당화를 강조하며, 셋째, 비형식적인 증명에서 형식적인 증명으로의 전이과정에 초점을 두고 있고, 넷째, 앞에서의 전과정에서 역동적인 기하 소프트웨어인 Cabri Ⅱ를 통합적인 관점에서 이용한다는 점을 들 수 있다. 또한 본 논문에서는 논의하지 않았지만, 협동학습을 통한 상호작용과 학생들의 능동적인 증명의 이해와 구성을 중요한 이론적 배경으로 하고 있다.

역동적인 기하 소프트웨어인 Cabri Ⅱ는 평면도형과 공간도형에 대한 학생들의 경험을 강화시킬 수 있으며. dragging 기능을 이용하여 도형의 특징을 잃지 않으면서 도형을 자유 자재로 변화시킬 수 있다. 또한 다양한 예를 제공해 줌으로써 탐구와 추측을 지원해 주고, 실측 기능을 이용하여 형식적인 증명 이전의 실측과 실험 활동을 강화해

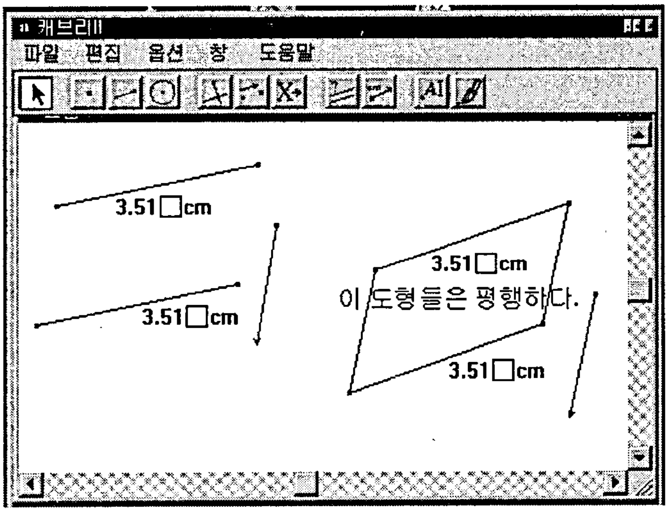
줄 수 있다. 도형을 작도한 후에 필요한 도형의 성분에 이름을 붙이는 Cabri Ⅱ의 기능도 형식적인 증명을 어렵게 만드는 요인 중의 하나인 기호 표현의 문제를 해결하는 데 도움이 될 수 있다. 이러한 Cabri Ⅱ의 기능들은 지필 환경에서는 쉽지 않은 기능으로, 실험실 활동을 통한 기하교육 특히, 발견과정으로서의 귀납 추론과 형식적인 연역추론 사이의 연결에 도움이 될 수 있다.

6차 교육과정 중학교 2학년의 평행사변형에 관한 단원 중 "한 쌍의 대변의 길이가 같고 평행인 사각형은 평행사변형이다"를 예로 각 단계별 활동 내용을 정리해 본다. Cabri Ⅱ를 이용한 증명 수업에서 증명은 작도로부터 시작된다.

① 작도 및 탐구과정: 작도 과정과 작도과정에서의 타구활동은 형식적 증명에 상당한 역할을 한다. 적절한 발문을 이용하여 학생들의 작도 순서, 탐구 결과를 반성해 보아야 한다. 지필 환경에서는 하나의 평행사변형은 그저 평행사변형일 뿐이다. 그러나, Cabri Ⅱ에서는 그렇지 않다. 먼저 한 쌍의 대변의 길이가 같고 평행인 사각형을 작도한 다음(<그림 1>), 자신들이 작도한 사각형이 평행사변형이 되는지를 눈으로 추측해 보게 한다. 다음에는 dragging 기능을 이용하여 평행사변형을 변형하면서 불변인 것이 무엇인지를 탐색하도록 적절한 질문을 한다. 앞에서의 추측이 달라지지 않는지를 조사한다. 교사는 작도과정에서의 조건은 무엇인지(가정), 평행사변형이 되기 위한 추가 조건은 무엇인지(결론), 여러 가지 평행사변형의 경우 불변의 것이 무엇인지 등의 질문을 통해 학생들의 탐구활동을 안내한다.

② 추측과 가설형성: 변이나 각 등을 측정하여 자신들의 추측을 수정하는 과정을 거쳐 추측을 언어나 기호로 기술한다. 탐구와 추측을 통해 가설을 세움으로써 학생들은 정리를 재발명하는 경험을 할 수 있다. 기호로 표현하는 과정에서는 교사의 개입이 요구된다.

③ 비형식적 증명 : 가설이 타당한지를 작도, 정의, 실측, 실험을 이용하여 확인한다. 또한 '평행사변형을 변형하는 과정에서 주어진 정리가 성립한다는 것을 어떻게 보장할 것인가?'라는 질문을 통해 학생들로 하여금 증명의 필요성을 인식시키고 형식적인 증명에 대비한다.



<그림 1> 한 쌍의 대변이 평행하고 길이가 같은 사각형

④ 형식적 증명 : 비형식적 증명 단계까지의 활동이 형식적 증명에 도움이 된다. 예를 들어, 작도과정에서의 작도 조건(가정)과 작도한 사각형이 평행사변형이 되기 위한 추가 조건(결론)을 가정과 결론(밝혀야 할 대상)으로 정리할 수 있다. 탐구, 추측 단계에서 관찰한 불변의 것을 인식하는 활동을 통해 증명방법을 통찰할 수 있다. 그러나 비형식적인 증명 단계에서 형식적인 증명으로 넘어가는 단계에서 학생들은 여러 가지 인지적 장애가 발생할 수 있으며 교사의 보다 적극적인 안내가 요구된다.

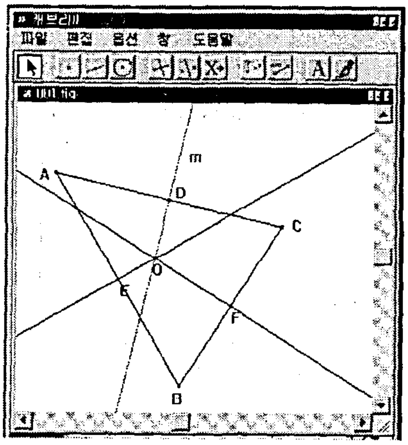
⑤ 반성과 확장 : 증명과정을 설명하고 정리하는 기회를 제공하여 학생들의 반성활동을 촉진하고 더 좋은 증명방법이 없는지를 조사해 본다. 증명과정에서 발생한 여러 가지 의문을 토대로 새로운 정의, 정리, 다른 증명방법 등을 생각할 수 있다. 예를 들어, 직사각형, 정사각형, 마름모의 경우는 어떻게 되는가? 평행사변형의 다른 성질을 만족하는 사각형들도 평행사변형이 되는가? (예를 들어, 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형인가?) 다른 증명 방법은 없는가? 등의 문제를 생각해 볼 필요가 있다.

2. Cabri Ⅱ를 이용한 증명수업의 실제

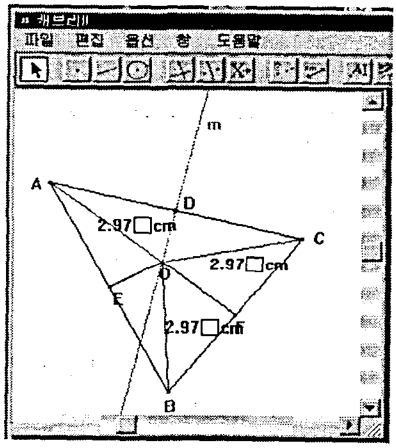
중학교 2학년 삼각형의 외심과 내심에 관한 단원에 나오는 "삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다."를 증명하는 과정을 1절에서 논의한 증명 단계에 따라 학습지도안 형식으로 구성하였다. 귀납추론 과정에서의 탐구, 추측 활동을 형식적인 증명에 연결시키려고 노력하였다.

삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

단계	교사활동	학생활동	비고
작도와 탐구	① 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 확인하는 방법은 무엇인가? ③ 변AC의 수직이등분선이 점 O를 지나겠는가?	① 두 변의 수직이등분선이 나머지 한 변의 수직이등분선이 점 O를 지난다는 것을 보이면 된다. ② Cabri II 그림 파일에 △ABC를 작도한 후 변AB와 변BC의 수직이등분선을 작도한다. ③ *추측을 한다. *변 AC의 수직이등분선을 작도하여 확인한다. 변AC의 수직이등분선(m)과 AC의 교점을 D라 한다. 점 B를 끌어 삼각형을 변화시켜도 점 O는 항상 m위에 있음을 관찰한다.	① 형식적 증명을 할 때 도움이 된다. ②변AB, 변BC와 각각의 수직이등분선의 교점을 E, F, 두 수직이등분선의 교점을 O라 하자.) ③ *각 자의 추측을 의사소통하고, * 에니메이션 기능을 이용하면 좋다.
추측과 가설설정	④ 직선 m을 제외한 나머지 두 수직이등분선은 감춘 다음, 다시 $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$와 $\overline{EO}$, 를 작도한 후 다시 한 번 점 B를 끌어 보아라. ⑤ 가설을 어떻게 보장받을 수 있는가?	④ 점 O가 변 AC의 수직이등분선 m 위에 있음을 확인한다. 이 때 필요한 변의 길이를 측정하고 직각 표시를 할 수도 있다. 가설: 어떤 삼각형이라도 세 변의 수직이등분선은 항상 한 점에서 만난다. ⑤ 가설은 참이며 증명할 필요도 없다고 생각할 수 있다.	④ dragging 기능과 에니메이션 기능의 활용 ⑤ 모든 경우를 다 실험할 수 없음을 설명하고 형식적인 증명의 필요성과 중요성을 인식시킨다 :교사의 적절한 개입
비형식적 증명	⑥ 점 O가 변 AC의 수직이등분선 m 위에 항상 있다는 것이 어떤 뜻인가? ⑦ 왜 그런가? ⑧삼각형의 세 변의 수직이등분선이 항상 한 점에서 만난다는 가설을 어떻게 설명하겠는가?	⑥세 수직선이 한 점에서 만난다. $\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$ △AOD ≡ △COD ⑦ 선분의 수직이등분선에 관한 정리를 상기하면, $\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{AD}=\overline{CD}$ $\angle ADO=\angle CDO=90^\circ$ 임을 확인할 수 있다. ⑧ 수직이등분선 m이 교점 O를 지난다. . $\overline{OD}$ 가 $\overline{AC}$를 수직이등분한다. $\overline{OD}\perp\overline{AC}$ 이면 $\overline{AD}=\overline{CD}$이다. (이해하기가 쉽지 않다. 교사의 적극적인 개입과 탐구, 추측 단계로의 피드백이 필요)	⑥, ⑦ 자신의 주장을 일상언어로 설명하기도 하고 기호를 이용하기도 한다. * 작도시 명칭을 부여하는 활동이 기호 표현에 도움이 된다, * 삼각형을 변형시키는 활동에서 불변의 것들에 주목한다.



<그림 2> 삼각형의 외심 1



<그림 3> 삼각형의 외심 2

⑨ 형식적 증명을 수학적 기호를 이용하여 쓰는 단계로 "삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다."라는 명제를 증명하려면 어떻게 해야겠는가라는 질문을 통해 무엇을 해야 할 것인지를 통찰하게 한다.

학생들은 $\overline{OD}\perp\overline{AC}$ 이면 $\overline{AD}=\overline{CD}$을 보이면 된다는 것을 생각해 내고 가정과 결론을 구분해 본 다음, 다음과 같이 형식적인 증명을 마무리 할 수 있다.

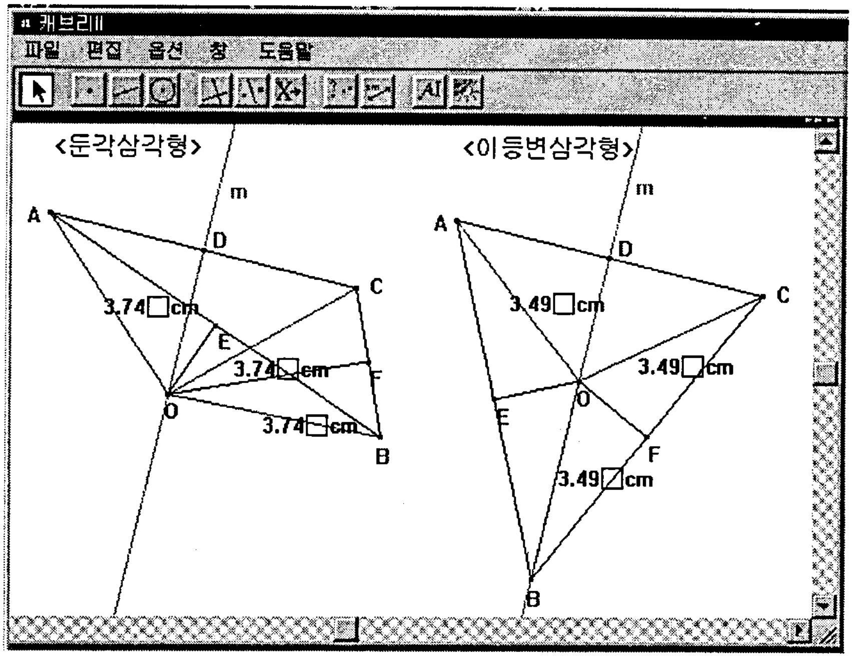
$\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{OD}$는 공통, $\angle ADO=\angle CDO=90^\circ$

그러므로, $\triangle AOD\equiv\triangle COD$

다른 사람들이 만들어 놓은 증명을 그대로 답습하는 증명이 아니라 자신들이 만든 정리(가설)이며 자신의 주장의 정당성을 밝힌다는 의미에서의 증명임을 의식하게 하여 증명의 필요성을 인식할 수 있다. 다만, 탐구, 가설 형성과정과 증명방법 탐색 및 증명 쓰기 과정의 연결이 문제로 이 과정에서의 학생들의 인지적 장애나 반응에 대한 조사 연구가 요구된다. 교사의 적절한 안내가 필요하다.)

⑩ 반성과 확장의 단계로, $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$ 는 무엇을 의미하는 가라는 발문을 이용하여 학생들이 점 O를 중심으로 하고 $\overline{AO}$를 반지름으로 하는 원임을 쉽게 추측할 수 있으며, 원을 작도하여 원이 삼각형의 세 꼭지점을 지나감을 확인한다. 외접원과 외접원의 중심 즉 외심이라는 이름을 학생들이 직접 지어보게 한다.

정삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형, 이등변삼각형의 경우에 외심은 어디에 있겠는가를 <그림 3>의 파일로 돌아가 탐구, 확인할 수 있으며 그 일부가 <그림 4>에 제시되어 있다.



<그림 4> 여러 가지 삼각형에서의 외심

삼각형에 내접하는 원 즉, 내접원과 연결이 자연스럽게 이루어진다. 내접원의 경우와 반대로 추적해 갈 수 있다. 즉, "내접원의 중심을 구하려면 어떻게 해야하는가?"에서 시작하여 세 각의 이등분선의 교점이 내심임을 추측해 보는 활동이 필요하다. 과제로 제시할 수도 있다. 과제는 증명 결과만을 요구하는 것이 아니라 형식적인 증명을 하기까지의 사고 과정을 정리해 오는 활동이어야 한다.

Ⅳ. 결론 및 제언

수학적 추론과 증명은 문제해결과 더불어 수학을 알고 행하는 데 중요한 요소로, 엄밀성의 정도는 다르겠지만 학교수학의 모든 수준에서 강조되어야 한다. 그러나, 현재의 중등학교에서의 증명지도는 탐구와 발견의 과정을 생략한 채 연역적이고 형식적인 방식으로 제시되고 있어 대부분의 학생과 교사들이 증명하기를 기피하는 경향이 있다. 형식적인 증명은 물론, 정리를 발견 또는 재발명하는 귀납 추론이 중등학교에서의 증명지도에서 강조되어야 한다. 지필환경에서는 작도하고 탐구하며 추측하는 활동을 하는 데 어려움이 있으며, 역동적인 기하소프트웨어가 이러한 문제를 해결할 수 있는 도구가 될 수 있다(신동선 · 류희찬, 1998).

용이한 작도 과정과 다양한 예를 제공할 수 있는 기하 소프트웨어의 기능은 추측과

탐구 그리고 그 결과의 확인을 위한 풍부한 환경을 제공할 수 있으며, 끌기 기능을 이용한 삼각형의 변화과정에서 관찰할 수 있는 불변의 성질이 형식적인 증명에 중요한 역할을 한다. 또한 도형에 기호를 붙이는 활동은 형식적인 증명을 어렵게 만드는 요인 중의 하나인 명제나 정리의 기호적 표현(류성림, 1998)을 보다 자연스럽게 할 수 있게 해 준다.

그러나, 추측을 검사하는 데 유용한 Cabri Ⅱ가 증명 교수학습에서도 강력한 도구로 작용하기도 하지만, 학생들이 증명은 더 이상 필요 없으며, 실험을 통한 확인만으로도 추측의 정당성을 보장받을 수 있다는 그릇된 인식을 심어줄 수도 있다. 따라서 모든 경우에 성립하는 지를 실험과 실측으로 확인할 수는 없다는 점을 강조하여 학생들에게 형식적인 증명의 중요성과 필요성을 인식시킬 필요가 있다(NCTM, 1998).

본 연구에서 Cabri Ⅱ를 이용하여 정리의 발견 또는 재발명의 과정을 강조한 증명 수업 방법을 제안하였지만 그 효과를 검증하기 위해 다음과 같은 후속연구가 필요하다.

첫째, Cabri Ⅱ를 이용한 증명 수업이 학생들의 증명 수행 능력 또는 증명에 대한 이해에 어떤 영향을 끼치는지 특히, van Hiele의 기하학습 수준이론에 어떻게 작용하는 지를 연구할 필요가 있다.

둘째, 본 연구에서 제시한 Cabri Ⅱ를 이용한 증명 교수학습 방법에 대한 구체적인 사례연구가 요구되며, 특히 탐구, 추측을 통한 비형식적인 증명에서 형식적 증명으로의 전이 과정에서 나타날 수 있는 학생들의 반응을 조사해 볼 필요가 있다.

참 고 문 헌

김홍기 (1998). 중학교 수학에서 증명지도에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A *<수학교육>* 제 37권 제 1호, pp.55-72.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색, 한국교원대학교 박사학위논문.

신동선 · 류희찬 (1998). *수학교육과 컴퓨터,* 서울: 경문사.

우정호 (1998). *학교수학의 교육적 기초,* 서울대학교 출판부.

한태식 (1995). van Hiele 이론에 근거한 대표적 연구의 비교, *대한수학교육학회 논문집* 제5권 제1호, pp.29-37.

Aliebert, D. & Thomas, M. (1991). Research on Mathematical Proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordchet: KAP, pp.215-230.

Bell, A.W. (1976). A Study of Pupil's Proof-Explanations in Mathematical Situations, *Educational Studies in Mathematics*, 7, pp.23-40.

Clements, D.F. & Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning, In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* New York: Macmilan. pp.420-464.

Fawcett, H.P. (1938). *The nature of proof,* New York, NY: Teachers of College.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as Educational Task, D Reidel Publishing Company.

Hanna, G. (1991). Mathematical Proof, In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordchet: KAP, pp.54-61.

Human, P.G., & Nel, J.H. (1989). Alternative teaching strategies for geometry education: A theoretical and empirical study. *RUMEUS curriculum materials series NO. 11,* University of Stellenbosch.

Lakatos, I.M. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery,* Cambridge University Press, Cambridge.

NCTM (1998). Principles and Standards for School Mathematics: *Discussion Draft. Reston,* VA: The Council.

Skemp, R.R. (1987). *The Psycholoigy of Learning Mathematics,* Lawrence Erlbaum Accociates, Inc.

Tymoczko, T. (1986). Making room for mathematicians in a philosophy of mathematics, *The mathematical Intelligencer,* 8(3), pp.44-50.