韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 8집, 1999. 1. 45-63.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 8, Jan. 1999. 45-63.

초등수학교육에 있어서의 추론 방법

남 승 인 (대구교육대학교)

학교 수학의 궁극적인 목표는 "수학적 능력과 태도를 육성하는데 있다." 이러한 목표를 달성하기 위해서는 수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하는 일과 수학적으로 사고하는 능력을 기르는 일이 뒷받침되어야 할 것이다. 수학적 사고는 학교수학에서 지도되는 내용 그 자체에 관련된 것이 아니라 이들 수학을 수학내용을 이해하고 지식으로 획득하는 과정에서 행하여지는 수학적인 활동과 관련이 있다고 하겠다. 본고에서는 수학적인 활동의 방법적인 측면에서 귀납 추론, 연역 추론, 유비 추론에 대해서 개괄적으로 알아보고, 귀납 추론의 필요성 및 특성과 구체적인 적용 사례에 대해서 알아보고자 한다.

Ⅰ. 서 론

수학교육의 궁극적인 목표는 "수학적 능력과 태도를 육성하는데 있다." 이러한 목표를 달성하기 위해서는 수학의 기본적인 지식과 기능을 터득하는 일과 수학적으로 사고하는 능력을 기르는 일이 뒷받침되어야 할 것이다. 최근에 이르기까지 학교 수학에서 주된 관심거리의 하나는 수학적 사고력을 신장시키는 일이지만 수학적 사고력은 수학을 접했을 때만 작용하는 것이 아니기 때문에 수학적 사고는 수학에서 다루는 내용 그 자체보다는 이들 수학 내용을 이해하고 지식으로 터득하는 과정에서 행하여지는 수학적인 활동과 관련이 깊다고 하겠다.

특히 수학교육에 대한 질적 개선을 위한 최근의 연구 동향은 수학에서 취급하는 학습 내용보다는 수학적 지식의 터득 과정에 초점이 모아지고 있다. 수학적 사고는 저절로 길러지는 것이 아니므로 수업의 풍토를 개선하여 학생들에게 수학적 사고력 자체에 대한 경험의 기회를 제공해야 한다. 즉 어떠한 수업 전략을 통하여 수학적 사고력을 신장시킬 수 있는가 하는 문제를 고려해 보아야 할 것이다.

NCTM(1989)에서는 "수학을 알고 행하는(knowing and doing) 근본은 추론이다"고 지적하고, 학생이 세상의 의미를 이해하는 강력한 수단으로서 수학을 이해하고 접근하도록 하기 위해서는 수학적 활동의 기초가 되는 추론을 강조하는 것이 필수적이라고 보고 있다. 또한 Schwarts & Yerushalmy(1987)는 "학생들이 결코 새로운 수학을 만들어내지 못할 것이라고 예상하고 수학을 가르치는 것은 잘못된 생각"이라고 지적하고 학생들에게 추론의 기회 제공을 통하여 그들 스스로 수학에서의 새로운 의미를 발견하도록 해야 한다고 주장하고 있다.

추론으로의 수학은 구체적인 내용에 관한 것이라기보다는 수학을 가르치는 하나의 접근 방법이며 교사가 학생들에게 전달하는 태도에 관한 것이다(Kutz, 1991). 학생들은 추론을 통하여 수학을 배우고 나아가 수학을 가지고 추론할 수 있어야 유의미한 상황 속에서 수학에 참여하게 되고 수학의 가치와 유용성 및 자신의 능력을 신뢰할 수 있을 것이다.

그러나 현재 학교의 수학학습 실태의 한 측면을 살펴보면 다음과 같다.

① 추론할 수 있는 기회의 부족으로 인해 학생들은 수학 학습에 능동적인 참여자가 되지 못하고 수동적 입장에서 학습을 함으로써 수학학습을 기억에 의존하는 경향이다.

② 추론의 역할과 중요성에 대한 교사의 이해 부족으로 인해 절대주의적 수학관에 입각하여 교사 자신의 입장에서 수학을 해석하고 만들어진 수학을 전수하는데 비중을 두고 있다.

③ 교과서 내용 구성면에서 학생들의 활동이 제한적이다. 즉 새로운 수학적 사실을 학생 스스로의 활동을 통해서 의미를 부여하고 터득하기보다는 해설식으로 구성되어 있으며 계산 기능 위주의 학습에 대한 비중이 높다.

④ 평가 내용이나 방법이 경직되어 있다. 즉 수학적 활동 과정에 대한 평가보다는 활동 결과에 대한 평가에 더 많은 비중을 두고 있으며, 관찰이나 면담보다는 지필에 의존하는 경향이 높다.

⑤ 학습자료가 단편적이다. 초등학생의 수학학습에서는 다양한 자료를 활용한 구체적 조작의 경험에 근거한 수학화 과정이 뒷받침이 되어야 하지만 제한적인 자료의 활용으로 인해 추론 및 통계적 훈련의 기회가 부족하다.

본고에서는 수학학습에서 주로 적용되는 귀납적 추론, 유비 추론, 연역적 추론에 대해서 개괄적으로 알아보고, 초등 학교 수학교육에서 특히 비중을 두어야 할 귀납적 추론의 역할과 추론 과정에 대해서 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 초등 수학교육에서의 추론

Polya(1958)는 추론을 논증적 추론과 개연적 추론으로 나누며, 논증적 추론을 완전한 것으로 추론 결과에 대한 시비의 여지가 없으며 최종적인 것인데 비해 개연적 추론은 위태롭고 논쟁의 여지가 있으며 잠정적인 것이라고 주장하고, 논증적 추론은 본질적으로 새로운 지식을 만들어 내지 못하기 때문에 우리가 실세계에서 배우는 새로운 내용은 어떤 것이나 개연적 추론의 경험에 포함되어야 한다고 보고 있다. 또한 그는 수학은 분명히 논증적 과학이며 수학자의 창조적인 활동의 산물은 논증적 추론에 의존하지만 이는 개연적 추론 능력이 뒷받침되어야 한다고 주장하고, 이 두 가지 추론이 상보적인 관계를 유지할 때 수학학습이 의미와 가치가 있다고 주장하고 있다.

수학에서의 추론은 여러 가지 아이디어와 그들이 어떻게 관련되어 있는가 대하여 타당한 결론을 도출하거나 일반화시키는 수학적 사고의 한 부분으로서 귀납적 추론, 연역적 추론, 유비적 추론으로 나눌 수 있다.

1. 歸納 推論

귀납적 추론은 어떤 집합에서 몇 개의 원소에 대한 정보를 이용하여 그 집합의 다른 원소 또는 모든 원소에 대한 일반화를 형성하는 추론, 즉 부분적이거나 특수한 사실로부터 전체적이고 보편적인 사실 또는 다수의 연속적인 변화에서 일반적인 법칙을 이끌어내는 추론 방법이다. 따라서, 귀납 추론은 단 하나 또는 제한적인 대상에 대한 추론에는 적용될 수 없고, 여러 개의 대상에 통합하여 그들의 공통적인 속성으로부터 일반적인 원리나 법칙을 발견하는 것을 뜻한다.

(1) 귀납 추론의 형식

귀납에는 어떤 류(class)에 속하는 모든 사례에서 규칙성을 찾아내는 완전 귀납과 수집한 자료에서 알아낸 규칙이 그 자료를 포함하는 보다 넓은 류에서도 성립할 것이라는 불완전 귀납이 있다(이용률, 1997).

완전 귀납은 추론의 결론이 포함할 모든 사례를 소전제에서 남김없이 열거하여 그들 사이에 어떤 관계가 있는지를 파악하는 것, 즉 주어진 모든 대상을 관찰, 실험, 실측, 조작 등을 통해 그들 사이에 어떠한 규칙성이 있는지를 찾아내는 것으로써 이는 주어진 여러 가지 사실을 간단한 명제로 개괄·정리하는 편의성(便宜性)은 있으나 논리적인 가치는 적으므로 J.S.Mill(1843, 재인용)은 이와 같은 추론은 "이미 알려진 사실의 단순한 기록"에 지나지 않으므로 새로운 법칙의 발견에는 이르지 못한다고 하였다(류성림, 1995; 임병수, 1990).

불완전 귀납은 전체에 대한 부분의 열거가 헤아릴 수 없이 많을 경우 그것을 일일이 다 열거할 수 없으므로 그 일부만 열거하여 이들 사이에 성립하는 규칙성으로부터 보편적이고 일반적 결론을 얻어내는 방법이다. 추론 대상의 전체를 모두 경험하여 이들 모두 열거한다는 것은 사실상 불가능하다. 즉 주어진 모든 대상을 관찰, 실험, 실측, 조작하는 경험을 갖는다는 것은 수학학습에서뿐만 아니라 타학문 연구나 일상생활에서도 불가능한 일이다. 제한된 대상에 의한 추론은 결론에 대한 신뢰성이 낮을 수 있으나 우리는 오직 경험할 수 있는 범위 내에서 경험한 것, 즉 부분적으로 '참'인 것을 확장하여 전체에 관해서도 참인 것으로 승인하는 경우가 많으며, 경우에 따라서는 불과 한 두 가지의 경험을 토대로 하여 정확한 추론을 할 수도 있다.

초등학교 수학교육에서는 이 두 가지를 모두 취급하지만 불완전 귀납에 더 많은 비중을 두어야 할 것이다. 이런 의미에서 불완전 귀납을 참된 귀납적 추론이라고 하며, 일반적으로 '귀납법'이라는 용어의 사용은 불완전 귀납을 지칭한다. 일반적으로 귀납을

형식화하면 다음과 같다.

<완전 귀납>	<불완전 귀납>
(대전제) A, B, C, D는 P이다.	(대전제) A, B, C, D는 P이다.
(소전제) A, B, C, D는 전부 S이다.	(소전제) A, B, C, D는 S이다.
∴ 모든 S는 P이다.	∴ S는 P이다.

(2) 귀납 추론의 예

최근 초등학교 수학교육에서 강조하는 문제 해결 전략으로써 '규칙성(pattern)을 찾아서 해결하는 전략, 표(table)를 만들어서 해결하는 전략' 등은 귀납적 추론을 이용한 문제 해결의 좋은 본보기이다. 특히 구성주의적 관점에서의 수학교육은 수학을 이미 만들어진 계통적인 연역과학으로 대할 것이 아니라, 만들어 가는 수학, 즉 실험적인 귀납과학으로부터 출발하여 계통적 연역과학으로 확립시켜야 한다고 볼 때, 초등학교 수준에서 취급하는 수학적 개념, 원리, 법칙 등의 학습은 학년이나 영역의 구별없이 대부분의 내용은 귀납적 추론이 강조되어야 할 것이다. 초등학교 수학학습에서 귀납을 이용한 예를 살펴보자.

① $2+2=2\times\mathbf{2}=4$.

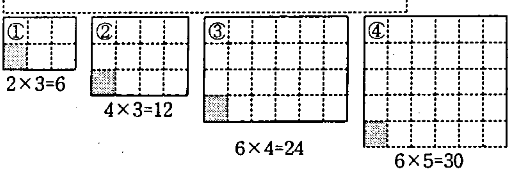
② $2+2+2=2\times\mathbf{3}=6$. (+2)

③ $2+2+2+2=2\times\mathbf{4}=8$. (+2)

④ $2+2+2+2+2=2\times\mathbf{5}=10$ (+2)

⑤ $2+2+2+2+2+2=2\times\mathbf{?}=\mathbf{?}$ (+2)

[예 1] 2학년에서 곱곱구구를 공부할 경우 ①~④에서 2를 두 번, 세 번, 네 번, … 더할 경우 그 횟수만큼 승수가 1씩 증가하며, 곱은 2씩 증가한다는 사실을 아는 것을 '완전 귀납' 이라고 한다면, ①~④에서 관찰된 규칙성을 이용하여 ⑤에서 '?'이 얼마인지를 아는 것은 '불완전 귀납'이라고 할 수 있다.



[예 2] 직사각형의 넓이 구하는 공식을 알아볼 경우 색칠한 부분의 넓이를 $1cm^2$라면 각 직사각형의 넓이는 단위 넓이의 몇 배인가?로 유도한다.

①은 3씩 2이므로 2×3=6, ②는 4씩 3이므로 4×3=12, ③은 6씩 4이므로 6×4=24, ④는 6씩 5이므로 6×5=30, … 등에서 (가로의 길이)×(세로의 길이)=(직사각형의 넓이)라는 공식을 이끌어 낼 수 있을 것이다.

(3) 귀납 추론 지도에서 유의할 점

① 귀납적으로 생각하는 것이 간편하다는 것을 느끼게 해야 한다. 즉 귀납적 추론이 유효한 장면에서 추론해 보는 기회와 환경을 제공해야 한다. 예컨대 문제 해결에서 시행착오를 거치면서 해결하는 장면이 아닌 구체적인 장면에서 '규칙성을 이용하던가, 표(table)를 만들어 정리된 자료에서 규칙성을 찾아 문제를 해결하는 경험'을 통하여 귀

납적 추론의 유용성을 인식하도록 해야 한다.

② 모든 추론이 귀납만으로는 잘 해결되지 않는다는 것을 경험시킬 필요가 있다. 즉 귀납에 의해 얻어진 결과는 항상 '참'이라고 할 수 없으므로 새로운 대상에 대해 확인해 보는 태도를 갖게 해야 한다.

2. 類比 推論

두 대상 사이에 존재하는 몇 개의 유사성에 착안하여 한 쪽 대상에서 성립하는 성질과 유사한 성질이 다른 쪽의 대상에 대해서도 성립한다고 하는 추론 방법을 유비적 추론(analogical inference 혹은 유추(analogy)이라고 한다. 유비의 그리이스 언어인 'analogia'는 '비례'라는 의미가 있는 것으로 이 추론은 두 대상 P와 Q를 유사한 대상, P'와 Q'를 유사한 결론이라고 할 때, 비례식 P : P'= Q : Q'에 있어서 P, P', Q를 기지(旣知)로 해서 Q'를 유도하는 추론이라고 할 수 있다(平林一榮, 石田忠男,1988). 귀납적 추론은 개별적인 사례로부터 일반적인 원리를 추론하는데 비하여 유추는 개별적인 사례 상호간의 유사 관계를 추정하는 방법이다(임병수, 1990). 즉 유추는 둘 또는 그 이상의 현상들을 비교하는 것으로부터 출발한다.

(1) 유비 추론의 형식

가령, 대상 A에서 대상 B를 유추한다고 생각해 보자. 이 경우 우선 A, B 사이에는 몇 가지의 유사한 점이 존재하지 않으면 안된다. 여기서 유사점이란 단순히 비슷하게 생각되는 속성이 아닌 일정한 관점 및 수학적 사실에 근거하여 확신을 가질 수 있는 공통적인 속성을 말한다.

예컨대 '참'인 명제로서 기본 명제 A가 있고 '참'인가 '거짓'인가를 추론하려는 명제 B가 있다고 가정하자. A, B가 다같이 w, x, y라는 공통적인 성질을 갖고 있는데 A는 w, x, y 이외에 z라는 성질도 갖고 있을 경우, A, B는 성질 w, x, y를 갖고 있다는 점에서 유사하기 때문에 다른 점에 있어서도 유사할 것이라고 유추하여 B도 z라는 성질도 갖고 있을 것이라고 가정하게 된다. 일반적으로 유추를 형식화하면 ①과 같고 이를 삼단논법의 형식으로 고치면 ②와 같다.

① A는 w, x, y, z이다.	② A는 w, x, y, z이다.
<u>B는 w, x, y이다.</u>	<u>B는 w, x, y, z이다.</u>
∴ B도 z일 것이다.	∴ B도 A와 같을 것이다.

임병수(1990)는 유비 추론은 불완전한 귀납 추론으로서 대상 A에서 대상 B를 유추할 경우, A가 가지고 있는 성질을 모두 열거하여 그들이 합당하게 이끌어졌을 때 실질적으로 타당한 결론을 도출할 수 있으나 모든 성질을 완전히 열거한다는 것은 불가능하므로 결국 개연적인 결론을 이끌어 낼 수밖에 없다고 단정하고 유비 추론의 결론

의 개연성을 높이기 위해서는 ① 비교되는 유사점은 대상의 본질적이고 적극적인 성질이어야 하며, ② 비교될 유사점이 가급적 많아야 하며, ③ 추정될 결론을 파괴할 서로 다른 점이 있어서는 안된다고 보고 있다.

결국 유추는 어떤 특수한 것에서 다른 미지의 특수한 경우를 추론하는 것이며, 우리의 이해 밖의 사항을 이해할 수 있게 하는 매개 수단이라는 점에서 귀납 추론과 마찬가지로 우리의 경험밖에 있는 새로운 사실을 예측하는 창조와 이어지는 강력한 추론 방법이다.

(2) 유비 추론의 예

유추는 일종의 닮음이다. 어떤 서로 다른 대상에 대해 어떤 점에서 서로 일치하거나 유사하며, 어떤 점이 서로 다른지를 찾아 서로 유사한 성질을 이용하여 문제를 해결하는 방법으로 일상생활에서 부딪치는 여러 가지 문제 해결뿐만 아니라, 수학 등 교과 학습에도 자주 이용되는 방법이다. 일반적으로 수업의 과정에서 '전시 학습 내용을 상기시키는 일'이나 문제 해결 과정에서 적절한 전략이 생각나지 않을 경우 '이와 유사한 문제를 풀어 본 경험이 있는까?', '이 문제와 그 문제에서 같은 점은 무엇이고 다른 점은 무엇인가?' 등을 생각해 보게 하거나, 최근 초등학교 수학교육에서 강조하는 문제해결 전략으로써 '단순화하여 해결하기 전략'은 유비 추론을 이용한 문제 해결의 좋은 본보기이다. 초등학교 수학학습에서 유비를 이용한 예를 살펴보자.

[예 1] 문제 (가)의 해결 방법을 살펴본 후 문제 (나)를 해결하여 보자.

(가) 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55를 이용하여 '21+22+23+24+25+26+27+28+29+30'을 구하여라. 만일 A라는 학생은 위 문제를 (20×10)+55=255를 구하였다고 하자.

(나) 위의 학생 A가 구한 방법으로 '51+52+53+54+55+56+57+58+59+60'을 구하여라.

식 : ____________________ 답 ________

먼저 문제 (가)와 (나) 사이에서 유사점을 찾아보면, ① 두 문제는 10개의 연속된 자연수의 덧셈으로 되어 있다. ② 일의 자리에 있는 수는 같다. ③ 각각의 문제에서 십의 자리에 있는 수는 같다. 다음으로 다른 점을 찾아보면, ① 문제 (가)는 십의 자리의 수가 20이고, 문제 (나)는 십의 자리의 수가 50이다. 그러면 두 문제 사이의 유사한 점을 이용하여 문제 (나)를 풀어 보자.

문제 (나)도 문제 (가)에서 A라는 학생이 추론한 방법에 따라 해결할 수 있을 것이라고 예측하고 이를 실행에 옮기면,

이 문제의 경우 '참'인 결과를 얻었지만, 다른 문제의 유비 추리의 결과는 '참'인지 '거짓'인지 알 수 없으므로 유추에 의해 문제를 해결했을 경우는 항상 답에 대한 검증 과정을 거쳐야 한다. 위 (나)문제의 경우를 검증하는 방법의 하나는 51부터 60까지 차례대로 더하는 방법이 될 수 있다. 또다른 예를 들어보자.

(가)	(나)
$(21+22+23+24+25+26+27+28+29+30)$	$(51+52+53+54+55+56+57+58+59+60)$
$=(20+1)+(20+2)+\cdots+(20+9)+(20+10)$	$=(50+1)+(50+2)+\cdots+(50+9)+(50+10)$
$= 20\times 10+55$	$= 50\times 10+55$
$= 200+55$	$= 500+55$
$= 255$	$= 555$

[예 2] 자연수의 곱셈 형식으로부터 소수의 곱셈형식을 유도하는 경우, 예컨대 1m에 20원하는 비닐끈 2.3m의 값을 구하기 위해 (비닐끈 2m의 값)=20×2=40(원), (비닐끈 3m의 값)=20×3=60(원)으로부터 (비닐끈 2.3m의 값)=20×2.3=46(원)을 구한다.

(3) 유비 추론 지도에서 유의할 점

① 유추는 당면한 문제 해결 방법이 즉각 떠오르지 않거나 문제 해결이 복잡할 경우 해결 방법이나 결과에 대한 예상을 하는 일이 필요하다. 이를 위해 교사는 이 문제와 유사한 문제는 없는가? 그 문제와 같은 방법으로 해결할 수는 없겠는가? 그 문제와 공통적인 사실은 없는가? 와 같은 생각을 할 수 있도록 격려할 필요가 있다.

② 유추는 닮았다는 것에 근거하여 '같을 것이다'라고 추론하는 것이므로 유추한 후에는 반드시 확인해 보는 것이 필요하다. 즉 유추는 유효한 추론 -가정이 '참'일 때 결론도 반드시 '참'인 추론-이라고 할 수 없다. 예컨대 삼각형의 합동에서 '대응하는 세 변의 길이가 같으면 합동이다.'라는 것으로부터 사각형에서도 대응하는 네 변의 길이가 같다는 결론을 도출했다면 이는 가정은 바르지만 결론은 바르지 않다. 이와 같이 잘못된 유추는 오히려 사고를 불분명하게 흐려 놓거나 편견에 빠지게 할 수도 있다. 즉 유추는 수학학습에서 유용하고 가치 있는 추론이기는 하지만 증명을 대신하지 못하며, 연구되어야 할 가설을 제공할 뿐이라는 사실을 일깨워 주어야 한다(류성림, 1995).

3. 演繹 推論

연역 추론은 어떤 내용이 확실한 '참'인 사실을 유도하는 방법으로 전체에 대한 지식이나 보편적인 법칙에서 출발하여 부분에 관한 지식이나 특수 사례 등을 이끌어 내는 방법이다.

Inhelder와 Piaget(1958)는 구체적 조작기에 있는 초등학생들은 류(class)추론은 할 수 있으나 조건적(conditional)추론은 형식적 조작기(12세 이상)에 도달했을 때만 가능하다고 주장하고 있다. 그러나 또다른 연구에 의하면 연역적 추론 능력 및 타당하지 않은 논증을 찾아내는 능력은 일반적으로 나이가 들수록 향상되지만 6세 정도가 되면 전제 조건으로부터 연역된 타당한 결론을 인식할 수 있으며, 이러한 능력은 6세부터 8세까지 꾸준히 향상된다고 주장하고 있다(O'Daffer and Thornquist, 1993, 재인용). 이렇게 볼 때, 초등학교에서는 엄밀한 의미에서 형식화된 연역적 추론의 지도를 요구하는 것은 무리이므로 연역적 추론의 표지적 지도는 가능하리라고 생각된다. 즉 류

(class) 추론 및 주의 깊게 계획된 경험을 통하여 교사가 자연스럽게 'if-then' 형식의 추론이나 아이디어를 사용한 수업은 학생들의 연역적 추론 능력 신장에 긍정적인 영향을 미친다고 할 수 있을 것이다.

(1) 연역 추론의 형식

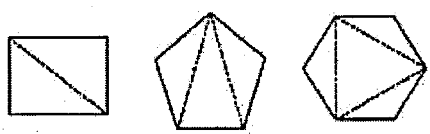
귀납은 '개개의 특수한 사실을 토대로 해서 그 사실이 포함되는 전체에 해당하는 원리를 이끌어내는 논리'임에 반하여 연역은 '일반적인 원리로부터 개개의 특수한 사실에 그 원리를 적용하는 논리'라고 볼 때, 이는 서로 반대되는 성질을 가졌다고 생각할 수 있다. 그러나 연역적 추론의 일반적인 원리인 대전제는 여러 경험으로부터 얻은 결과이거니와 그것은 귀납적 추론을 통해서 얻게 된다. 따라서 연역과 귀납은 상호의존적이다(임병수, 1990). 다만 연역적 추론의 결론은 항상 '참'이므로 연역적 추론의 방법에서는 논리적인 방법이 강조되고 형식에 치중하여 명확한 결론을 이끌어 내는데 큰 역할을 하는 반면 귀납적 추론의 결론은 항상 '참'이 보장될 수 없으며, 귀납적 추론의 방법에서는 실험, 실측, 관찰, 조작 등 구체적인 방법이 강조되고 사실에 치중하여 결론을 이끌어 내는데 큰 역할을 한다. 연역적 추론의 대표적인 형식은 삼단 논법으로 일반적으로 이를 형식화하면 다음과 같다.

(대전제) P이면 Q이다.	[예] 자연수이면 정수이다.
(소전제) Q이면 R이다.	정수이면 유리수이다.
∴ P이면 Q이다.	∴ 자연수이면 유리수이다.

(2) 연역 추론의 예

초등학교 수학 학습에서는 학년이 낮을수록 귀납과 유추에 의해 학습되어야 할 부분이 많으므로 일부 교사 및 기성인들은 연역적 추론의 필요성이나 그 적용에 대해 경시하는 경향이 있으나 이는 잘못된 생각이다. '연역적 추론은 자신이 판단한 어떤 사실이 옳다는 것을 주장하기 위하여 이미 알고 있는 사실을 토대로 하여 그 정당성을 밝히려는 생각이다(片桐重男, 1995)'이라고 볼 때, 수학적 개념, 원리, 법칙 등 수학적 지식을 터득하는 과정은 귀납이나 유추에 의해 얻어진 결과 의존하지만 이를 구체적이고 특수한 장면의 문제 해결에 활용하는 것은 연역이며, 연역적으로 추론하는 것이 간편한 경우가 많다.

초등학교 수학학습에서 연역을 이용한 예를 살펴보자.



[예 1] 사각형, 오각형, 육각형, … 등 다각형의 내각의 합을 구할 경우 왼쪽 그림처럼 각각의 도형을 몇 개의 삼각형으로 나누어 180°×(삼각형의 수)를 구하는 방법은 삼각형

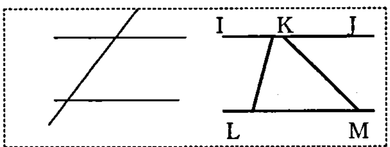
의 내각의 합이 180 °라는 사실, 사각형은 2개의 삼각형으로, 오각형은 3개의 삼각형으로, 육각형은 4개의 삼각형으로 나누어진다는 사실을 이용하여 내각의 합을 구하는 연역적 추론의 한 예이다. 또다른 예를 생각해 보자.

변의 수	3	4	5	…	n
삼각형의 수				…	(n-2)
내각의 합	180 °×1	180 °×2	180 °×3	…	180 °×n

[예 2] n각형의 내각의 합을 구하기 위해 위와 같이 한 꼭지점에서 대각선을 그어 몇 개의 삼각형으로 나눈 후, 변의 수와 나누어진 삼각형의 수와 내각의 합 사이의 관계를 다음과 같이 표로 나타내어 이 표에서 그들 사이의 규칙성. 즉 삼각형의 수는 변의 수보다 2가 적으며 내각의 합은 180 °×(삼각형의 수)라는 사실을 이용하여 (다각형의 내각의 합)=180 °×(n-2)라는 공식을 얻기까지의 과정은 귀납이다. 이와 같이 귀납적 추론을 통해 얻어진 사실을 또다른 다각형의 내각의 합을 구하는데 이용하는 것은 연역이다. 위의 [예 2]에 비추어 볼 때, 초등학교 수학의 전개 방식에 있어서도 연역적 추론에 의존하는 부분이 많이 있다. 그러나 이들이 귀납이나 유추의 방법을 따르지 않는 것은 아니고, 귀납이나 유추의 방법에 의하여 얻어진 결과는 연역적 추론에 의하여 확증되고 새로운 성질을 발견하거나 구체적이고 특수한 장면에 적용해 가는 것이다. 다음 [예 3]은 연역적 추론의 대표적인 형식인 삼단 논법에 의한 추론의 예이다.

[예 3] '삼각형의 내각의 합은 몇 도인가?'를 연역적 추론을 통해서 알아보자.

학습자는 어느 정도의 수학적 지식을 갖고 있어야 한다. 예를 들면, '평행인 두 직선이 제 3의 직선과 만날 때 엇각은 같다'는 사실과 '직선은 평각을 이루며, 평각은 180° 이다'라는 사실을 알고 있어야만 위의 진술을 증명할 수 있는 것이다.



삼각형 KLM의 꼭지점 K를 지나고 선분 LM과 평행인 선분 IJ를 그으면, ∠L=∠IKL, ∠M=∠JKM이다.

따라서, ∠K+∠L+∠M=∠LKM+∠IKL+∠JKM =∠IKJ=180° .

위의 증명 방법은 다음과 같은 삼단 논법에 의한 것이다.

제 1단 : 일반적으로 평행인 두 직선과 제 3의 직선이 만날 때 엇각은 같다(주어진 '참'인 명제). 직선은 평각을 이루며, 평각은 180° 이다.

제 2단 : 선분 LM과 선분 IJ는 평행이고, 두 선분 KL과 KM는 이들과 만나므로 ∠L=∠IKL, ∠M=∠JKM

제 3단 : 따라서 ∠K+∠L+∠M=180° 이다 (새로 만들어진 '참'인 명제).

위의 [예 3]에서 짐작할 수 있듯이 학생들의 사고 수준을 고려할 때, 초등학교 과정에서는 형식화된 연역적 추론의 지도를 요구하는 것이 무리인 경우도 있다. 다만 연역적 추론의 초보적인 지도 가능하다고 본다. 특히 이와 같은 지도에서 강조할 것은 추

론해 가는 과정에 있어서 '참'인 명제가 바탕이 되어 있다는 것과 추론하고 있는 내용의 대상은 특수한 사례이지만 이를 대표적인 것으로 보고, 이 대표적인 내용이 성립할 때에는 이에 속한 모든 내용은 모두 성립할 수 있다고 보는 지도법이 중요하다.

(3) 연역 추론 지도에서 유의할 점

① 먼저 연역 추론의 필요성이나 좋은 점을 알게 하는 것이 중요하다. 먼저 학생 스스로의 귀납이나 유추를 통해서 얻어진 결론에 대해서 증명하고 싶은 마음을 갖게 하는 것이다.

② 연역적으로 생각할 때에는 근거가 되는 기지(既知)의 성질이 무엇인가를 파악하려는 태도가 중요하다. 따라서 '이런 것은 알고 있지', '어떤 것을 쓸 수 있는가?'와 같은 생각을 갖게 해야 한다.

③ 연역적으로 생각할 때에는 알고 있는 것을 기초로 하여 '그것으로부터 어떤 것을 말할 수 있겠는가?'라고 가정해서 결론을 이끌어 가는 분석적인 사고와 '그 사실로부터 말할 수 있는 것은 무엇인가?'와 같은 결론으로부터 가정을 생각해 나아가는 종합적인 사고를 할 수 있는 기회가 필요하다.

④ 연역적 추론 과정에서 전제조건에 어떤 새로운 항목이 추가하던가 그 항목 대신에 다른 항목을 사용할 경우 흔히 생기는 오차를 줄이기 위해 'if~then'과 같은 추론 언어를 자주 사용할 필요가 있다.

이상에서 살펴 본 수학 학습에서의 추론 방법을 요약하면, 귀납적 추론은 개별적인 사례로부터 일반적인 사례를 도출하는 방법이며, 연역은 일반적인 사례로부터 특수한 사례를 도출하는 방법이고, 유추는 개별적인 사례 상호간에 유사성을 이용하여 추론하는 방법이다.

앞으로의 학교 수학은 교사 자신이 알고 있는 지식이나 교과서를 통해 단순히 지식을 전달하고 학생은 이를 전수 받는 수동적인 방식의 수업에서 탈피하여 수학적 원리, 개념, 법칙 등을 구성하고 적용함에 있어서 학생들의 능동적인 참여와 활동을 기회 및 환경을 조성해 주어야 할 것이다. 즉 학습에서 학생들이 활동의 기회가 많은 귀납적 추론, 유비 추론을 통해 능동적으로 수학적 지식을 구성하고, 이를 확인・적용하는 연역적 추론의 기회를 확대함으로써 생동감 있는 수학수업이 보장될 것이다.

Ⅲ. 數學 教育에서의 歸納

귀납(induction)이란 어원은 아리스토텔레스의 Epagoge - 특수한 사례로부터 일반화로 나아가는 과정 - 라는 라틴어에 그 기원을 둔 것으로, 귀납은 우리의 축적된 경험을 초월한 정보나 불완전한 정보에 직면했을 때 생기는 의문을 해결할 수 있는 탐구의 확장적 방법론인 동시에 도구이다(Rescher, 우정규 역, 1992).

역사적으로 중세에는 스콜라 철학자들에 의해 아리스토텔레스의 연역적 논리에 치중해 왔으나, 근세 초기에 이르러 자연과학이 발달함에 따라 자연과학의 방법이 형식적인 연역적 논리에 의존해서 이미 알고 있는 지식은 증명할 수 있으나 새로운 지식을 발견하기는 불가능하다는 문제점이 제기되기 시작하였다. 이러한 문제점이 제기됨에 따라 새로운 시대에 부응하여 Bacon에 의해 경험 과학의 방법으로써 자연과학의 연구에 알맞은 귀납적 논리가 창도(唱導)되었다. 그에 의해 이끌어진 귀납법은 관찰과 실험에 의하여 수집된 자연의 제사실로부터 일반적인 원리를 도출하는 방법으로써 새로운 과학의 연구에 활용되어 자연 과학의 발전에 크게 공헌하였다. 그 후 Mill은 베이컨의 미비한 귀납적 방법을 보완함으로써 귀납 논리학을 하나의 학문 체계로 완성하였다. 경험에 근거한 모든 개별적인 사실을 망라하여 이로부터 보편적인 원리를 이끌어낸다는 것과 귀납된 진리를 미래의 사실에까지 적용한다는 것은 납득하기 어려운 이론이다. 그러나 Mill은 자연에 있어서는 과거에 일정한 사정 아래서는 일정한 사례가 일어났으며, 미래에서도 동일한 사정 아래에서는 동일한 사례가 일어난다는 자연의 제일성(the uniformity of nature)과 일정한 현상에서 일어나는 사례는 반드시 그 원인과 결과가 있다는 인과율(因果律)을 귀납적 추론의 근거로 제시하고 있다.

1. 수학교육에서 귀납적 추론 역할

귀납적 추론을 수학 교육에서의 활용에 대하여 Polya(1958)는 '우리는 수학 및 논증적' 논리학 이외의 모든 지식은 개연적 추론에 의하여 얻어진다'고 전제하고 수학자의 창조적인 산물인 논증적 추론과 증명은 개연적 추론(귀납적 추론과 유추적 추론은 개연적 추론의 특수한 경우임)에 의해 발견되어진 것이라고 보고 있다.

따라서 그는 '논증적 추론이 수학의 세계를 지배하는 한 수학 그 자체는 우리들을 둘러싸고 있는 세계에 있어서 본질적으로 새로운 수학적 지식을 이루어내지 못할 것'이라고 경고하면서 완성된 형태로써 제공되는 수학교육이 아닌 만들어지는 과정으로서의 수학 교육(구성주의적 관점에의 수학 교육) 및 어떠한 수학적 발명을 반영하는 수학 교육을 위해서는 개연적 추론에서 출발해야 함을 주장하고 있다. 또, 그는 수학은 논증적인 추론뿐만 아니라 개연적 추론을 배우는 좋은 기회를 제공하는 교과라고 주장하고 수학 학습은 이 두 가지의 추론이 서로 상보적인 관계를 유지할 때 수학 학습의 가치가 의미 있게 인정될 수 있다고 본다.

수학적 지식을 구성하고 발견하는 과정에 있어서 귀납적인 방법의 적용은 유한의 대상에서 무한으로 건너 갈 수 있는 유일한 도구인 동시에 그 과정에서의 반복적인 추론은 우리가 원하는 만큼의 단계와 관찰하고 실험한 결과에 대해 신뢰성을 높여 주기 때문에 유용한 것이다. 또한 이것은 길고 지루하고 단조로운 증명의 필요성으로부터 우리를 자유롭게 해 준다.

Glasersfeld(1985)도 논리와 수학 모두에서의 연역적 능력의 생성은 반드시 귀납적 사고의 경험에 근거해야 한다고 주장하고 있다. 특히 기하 학습의 연구에 커다란 공헌을 한 van Hiele도 대다수의 학생들이 기하 학습의 많은 영역에서 귀납적인 사고를 하지 않고 있다고 분석하고 기하 학습이 성공적이지 못한 이유 중의 하나는 학생들에게 귀납적인 추론을 할 수 있는 기회를 충분히 주지 않음에 있다고 주장하고 있다. 근래 기하 학습의 중요성에 대한 재평가는 적어도 초기 단계의 교육에서는 학생들에게 귀납적으로 사고할 기회를 더 제공할 필요성을 제기하는 것으로 생각된다.

Freudenthal(1973)도 귀납적 체계와 연역적 체계를 모두 갖추고 있는 수학 교육이 성공적이지 못한 이유 중의 하나는 불충분한 연역성에 기인한다고 주장하고 있다. 그는 성공적인 수학 교육은 연역적인 구조를 강화시킴으로써 수학을 구성할 수 있다는 믿음은 매우 위험하며 오히려 실패의 원인이 될 수 있음을 지적하고, 수학 학습에서 연역적 이해는 최소한 귀납적인 사고의 경험과 연관이 되어야 한다고 주장하고 있다.

Piaget도 구체적 조작기에 있는 초등학생들의 사고의 한 가지 특징은 경험적·귀납적 이론을 전개하고 구체적 실체에 대한 상징적 표상을 하며, 여러 상황에서 그 타당성을 검증할 수 있는 능력이 있기 때문에 귀납적인 방법에 의하여 학습하는 것이 필요하다고 보고 있다(황정규, 1984). 귀납적인 방법은 유한 개의 사례를 대상으로 그들이 가지고 있는 공통적인 속성에서 일반화를 도출하기 위한 발견술의 한 방법이다. 따라서 구체적 조작기에 있는 초등학교 학생들은 형식적 논리와 증명은 그 추상적 수준에서 작업하기 위한 준비가 되어 있지 않기 때문에 그들은 물리적인 세계의 대상들에 대해 탐구와 발견을 통하여 학습이 이루어져야 한다. 즉, 구체적 대상을 관찰하고, 실험하고, 조작하는 속에서 규칙성과 공통성을 도출해 가는 귀납적인 접근 방법이 효과적이다.

2. 歸納的 推論의 過程

수학 학습에서의 귀납은 '만드는 것으로서의 수학'으로 어떤 수학적 정리나 과정 그 자체는 특수한 예를 생각해 봄으로써 귀납적으로 발견되는 것이다. 학습자에게 있어서 귀납적 접근은 주어진 특수한 많은 경우들을 생각해 봄으로써 그들 사이에서 유사성을 찾아내고 그들 속에 내재되어 있는 특성이나 일반적인 정리들을 생각해 볼 수 있고, 이러한 특성들의 존재나 정리들의 참에 대한 확신을 찾으려는 시도에 도달하기 위하여 또다른 새로운 대상에 대해서 검증 과정을 거치는 것은 발견의 위대한 원동력이 되는 것이다.

Polya(1958)는 이러한 귀납의 도구로써 일반화, 특수화, 유비를 들고 있다. 여기서 일반화란 주어진 부분적 대상에 대한 고찰로부터 그 대상을 포함하는 보다 큰 집합에 대한 고찰로 즉 특정한 한 집합에 대한 고찰로부터 그것을 포함하는 좀 더 광범위한

집합에 대한 고찰로 옮겨가는 것이다. 특수화란 주어진 대상에 대한 고찰로부터 그 대상이 포함되는 더 작은 집합의 대상에 대한 고찰로 옮겨가는 것이며, 유비란 두 대상 사이의 유사성을 의미하는 것으로 일종의 닮음이다. 즉 두 대상 사이에서 그들이 갖고 있는 공통성을 이끌어 내는 것을 말한다.

지금까지의 수학 학습은 학생들에게 어떤 수학적 정리나 사실을 지도한 후에 그것에 대하여 엄밀하게 연역적으로 증명을 하고, 그것을 어떤 특수한 문제에 적용하는 학습 방법에서 탈피하여 학생들에게 어떤 특수한 실제적인 문제 - 문제 속에서 정리를 암시하거나 유도할 수 있는 문제 - 를 제시하고 그 속에서 학생들이 스스로 정리나 성질을 찾아내고 그 정리에 대한 엄밀한 증명의 필요성을 느끼게 하는 구성주의적 입장에서의 접근 방법이 있었다.

예를 들어, 원주는 지름의 몇 배나 될까? 라는 문제에 대해 크기가 다른 원 모양의 물체에 각각에 대해 둘레의 길이와 지름을 잰 후, 둘레의 길이를 지름의 길이로 나누어 봄으로써 $\pi \fallingdotseq 3$ 또는 $\pi \fallingdotseq 3.14$라는 사실을 찾아내거나, 삼각형의 내각의 합이 얼마인지를 알기 위해 여러 모양의 삼각형의 삼각형을 잘라 직선 위의 한 점에 세 꼭지점을 모으거나 각도기를 이용하여 잰 세 각의 합을 구한 후, 삼각형의 내각의 합은 180 °라는 사실을 터득하게 하는 일 등은 만들어진 수학을 전수하는 것이 아닌 학생 스스로 수학을 만드는 것이라고 할 수 있다. 이렇게 터득한 수학은 개념, 원리, 법칙의 이해나 그 과정 자체가 구성적일 뿐만 아니라 특수한 예를 생각해 봄으로써 귀납적으로 발견되어 지는 것이다. 귀납적 추론의 단계는 다음과 같은 절차로 나타내어 질 수 있다.

귀납의 제 1단계 : 귀납의 가장 원초적인 기술은 주어진 대상에 대한 관찰로부터 시작된다.

관찰이란 대상을 일정한 목적 아래 파악하는 것으로써 막연히 대상을 보는 직관과는 구별된다. 즉, 일정한 목적을 설정하고 일정한 사실 또는 현상의 성질, 상태, 변화들을 파악하기 위하여 그 대상을 주의 깊게 보는 것이다. 따라서 자기 스스로 어떤 사실을 경험하는 것뿐만 아니라 일정한 목적을 위하여 다른 사람들의 경험을 듣는 것도 일종의 관찰이다(임병수, 1990).

학습자가 주어진 대상에 대해 의미 있는 관찰을 하려면 그 대상에 대하여 어느 정도의 관심과 경험 및 초보적인 지식을 갖고 있어야 한다. 전혀 아무런 준비 없이 갑작스럽게 어떤 대상에 접했을 경우 학습자는 그 대상에 대해 무엇을 어떻게 처리해야 하며, 또 왜 처리해야 하는지 알 수 없다. 즉 무의미한 조작이나 관찰은 학습자에게 혼란을 가중시킬 수 있으며, 그 때의 조작 활동이나 관찰은 한낱 유희에 불과하기 때문이다. 만일 학습자가 주어진 대상에 대하여 당황하거나 의미를 느끼지 못할 경우 교

사가 적절한 안내와 힌트를 제시하는 것으로 학생들의 활동에 대한 의미를 유효하게 해 줄 것이다.

3+ 7=10
3+17=20
3+27=30
....

예를 들어, 홀수와 짝수에 대하여 알고 제곱수 1, 4, 9, 16, 25, … 와 소수 2, 3, 5, 7, 11, 13, …에 대하여 알고 있는 사람이 왼쪽과 같은 생각을 머리에 떠올려 그 사이에 어떤 유사성(규칙성) 즉 3, 7, 13, 17, …….. 은 홀수인 동시에 소수이며, 그들의 합은 항상 짝수이다'임을 알았다면 이것이 곧 귀납의 한 도구인 유비이다.

유비는 주어진 대상을 관찰하고 비교하는 과정에서 발생한다. Polya의 발견적 목록에서 '전에 이런 것을 본 일이 있는가?'라는 발문은 바로 유비가 문제 해결 과정에서 강력한 의미를 부여하고 있음을 알 수 있다. 또한 유비는 추상화의 과정에 필수적인 요소이다. 우리가 구체물의 집합에서 각 구체물이 가지고 있는 여러 속성 중 이질적인 것을 제거해 나가면 결국은 동질적인 속성만 남게 되는데 각 구체물이 가지고 있는 동질성을 이끌어 내는 추상화의 과정은 수학의 본질과 연결되는 것이다.

귀납의 제 2단계 : 유사성을 바탕으로 추측을 구성하는 것이다. 귀납은 추리의 과정이라기 보다는 추정의 과정이다. 귀납은 주어진 전제들로부터 결론을 뽑아냄으로써 귀납적 결론으로 비약한다(Rescher, 우정규 역, 1992)고 볼 때, 관찰 과정에서 발생한 유사성에 근거하여 보다 확장된 대상에 대해서도 동일한 성질을 보장받기 위한 활동이다. '3, 7, 13, 17, ……은 홀수인 동시에 소수이며, 그들의 합은 항상 짝수이다'라는 유사성에서 관찰자는 '다른 홀수인 소수의 합도 짝수가 되겠는가?' 하는 의문을 갖게 될 것이다. 그리고 홀수인 2개의 소수의 합이 짝수인 3+3=6임을 생각해 볼 것이고, 6 이상에서도 생각해 볼 것이다. 즉, 3+5=8, 3+7=5+5=10, 5+7=12, 3+11=7+7=14, …

이와 같은 몇 개의 예를 통해 그는 '4보다 큰 임의의 짝수는 홀수인 두 소수의 합이다'는 일반적인 명제를 암시할 것이다. 개인에 따라서는 짝수인 2와 4는 두 소수의 합으로 나눌 수 없는 예외적인 것임을 알고 학문적으로 보다 세련된 진술 '소수도 아니고 소수의 제곱도 아닌 임의의 짝수는 두 개의 홀수인 소수의 합으로 이루어졌다'로 나타낼 것이다. 이렇게 귀납적 방법에 의해서 추측이 구성되며, 귀납적 방법에 의해 발견된 이 추측으로 귀납적 절차에서 매우 중요한 역할을 수행한다. 처음의 예에서 3, 7, 13, 17, …은 소수이며, 10, 20, 30은 짝수이고, 3+7=10, 3+17=20, 13+17=30의 세 등식은 서로 유비하다고 인정하는 것이다.

귀납의 제 3단계 : 잠정적 일반화의 단계이다. 잠정적 일반화의 단계는 제 2단계에서 이루어진 추측을 근거로 하여 보다 확장된 일반적인 대상에 대해서 동일한 성질이 존재할 것이라는 신뢰성에 기초하고 있다. 앞의 예에서 3, 7, 13, 17은 모두 소수이며, 10, 20, 30은 모두 짝수이다. 따라서 '소수+소수=짝수'라는 일반적 명제를 추론하는 것

이다.

이와 같이 몇 개의 예를 통해서 발견된 사실에 대해서 '모든 짝수는 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다'는 명제를 이끈다는 확신을 갖기에는 그 신뢰성이 빈약하다. 다만 하나의 단순한 추측이며 잠정적인 것에 불과하다. 왜냐하면 이 명제는 전혀 증명이 되지 않았고 진실한 명제라고 주장할 수가 없다. 때문에 진실에 근접한 하나의 시도에 불과하다. 그러나 이 추측은 경험과 사실과 실제와 어떤 암시적 접촉점을 가지고 있다. 이와 같이 어떠한 몇 개의 대상에 대해 관찰한 결과를 통해 참인 명제임을 암시하는 단계, 즉 Polya가 주장하는 '암시적 접촉' 단계가 귀납의 제 3단계이다.

귀납의 제 4단계 : 잠정적 일반화에 대한 검증의 단계이다. 우리는 귀납을 증명되지 않은 추측, 즉 잠정적인 명제에 대해 그것이 위대한 권위를 가지고 제안되었든지, 자기 스스로에 의해 제안되었든 간에 그것이 증명되거나 진실이 아니라는 검증이 이루어지기 전에는 너무 신뢰해서는 안된다. 잠정적인 명제를 검증하기 위해서 또다른 새로운 대상에 대하여 관찰하고 조사해 보아야 할 것이다.

위의 잠정적인 명제가 항상 참인지 검증해 보자. 어떤 짝수 60에 대해서도 '60=소수+소수'가 성립하는지 시도해 본다. $60=3+x$에서 x는 소수인가? $x=57$이인데 57은 소수가 아니므로 위의 잠정적인 명제 '짝수=소수+소수'는 참이 아니다. 다른 소수를 써서 검증해 보자. $60=5+x$에서 x는 소수인가? $x=55$인데 55는 소수가 아니므로 역시 참이 아니다. 또다른 소수를 써서 검증해 보자. $60=7+x$에서 x는 소수인가? $x=53$인데 53은 소수이므로 이 경우는 참이다.

이와 같이 새로운 대상에 대해 관찰하고 조사한 내용이 아닐 경우가 계속된다면 앞에서 예상한 추측은 그 신뢰성이 급격히 감소하거나 진술 자체가 파기될 것이다. 그러나 또다른 시도에서 참임이 확인되었다. 만약 여기서도 '거짓'이 나타날 경우는 앞에서의 잠정적인 명제, 즉 '짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다'는 진술은 파기될 것이다. 이와 같이 잠정적인 명제에 대해 새로운 어떤 대상에 대해 더 작은 집합이나 하나의 대상에 대해서 관찰해 보는 과정은 귀납적 도구의 특수화에 관련된 것이다. 즉 잠정적인 명제에 대해서 그 명제를 논박하기 위해 어떤 특수한 대상의 집합이나 무작위로 어떤 특수한 대상에 대해 검증해 보는 것은 그 명제가 참일 수 있다는 인식과 어떤 방향에서 증명을 찾아야 하는가에 대한 어떤 암시를 받을 수 있다.

그러나 앞에서의 추측이 참임이 판명되었다고 해서 그 명제에 대한 결정적 결론에 도달한 것은 아니다. 다만, '짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다'는 진술에 대해 신뢰성을 높여줄 뿐이며 진술이 참이라는 결론에 대해 유망한 징후로 해석할 뿐이다. 여기서 어느 정도의 신뢰성을 가질 것이냐는 관찰자의 주관적 판단에 의존할 수밖에 없다.

이와 같이 하나의 추측에 대해 그 신뢰성을 높여주는 것을 지지하는 단계, 즉 Polya의 용어에 따르면 '지지적 접촉' 단계가 귀납의 제 4단계이다. 그러나 귀납적 절차에서 암시적 접촉이나 지지적 접촉 모두는 추측과 사실 사이의 간격을 좁혀주는 역할을 하는 것이며, 이 두 단계를 엄격히 구별할 필요는 없다(Polya, 1958).

귀납의 제 5단계 : 일반화의 단계이다.

$60=13+x,\quad x=47$
$60=17+x,\quad x=43$
$60=19+x,\quad x=41$
$60=23+x,\quad x=37$
$60=29+x,\quad x=31$

왼쪽과 같이 앞 단계에서의 특수한 대상에 대한 점검에서 지지된 명제에 대해서 보다 확장된 특수한 경우나 또는 극단적인 경우에 대해서도 그 명제가 성립될 수 있는지를 확인해 봄으로써 그 명제에 대한 신뢰성을 한층 높일 수 있는 단계이다.

$6=3+3$
$8=3+5$
$10=3+7=5+5$
$12=5+7$
$14=3+11=7+7$
$16=3+13=5+11$
$18=5+13=7+11$
$20=3+17=7+13$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

지금까지와 같은 방법으로 다른 짝수에 대해서도 계통적으로 시도하여 그 결과를 왼쪽과 같이 나타낼 수 있을 것이다. 위와 같이 조사한 모든 경우가 참임이 확인되었다. 이와 같은 관찰과 조사의 대상이 많을 수록 추측은 강화되고, 그의 신뢰성 및 진실성은 증가할 것이다. 그러나 그 대상이 아무리 많다 하여도 그 추측에 대한 증명은 이루어지지 않는다. 귀납적인 추론의 과정을 하나의 표로 나타내면 다음과 같다(남승인, 1995).

관찰, 실험 —> 추측 —> 잠정적 일반화 —> 검증 —> 일반화
↑ (유사성 탐색) ↓
└—— 추측(예상)의 수정, 변경 <—— 반례의 발생

<귀납적 추론 절차>

먼저 주어진 대상에 대하여 몇 가지 사례를 선택하여 관찰과 실험을 거쳐 조사한 내용을 바탕으로 대상들 사이의 유사성을 찾는다. 만일 이 과정에서 유사성이 발견되지 않으면 대상을 수정, 변경하던가 관찰 자체를 파기한다. 유사성이 발견되면 그를 근거로 하여 예언적 가설(추측)을 설정하고, 그것에 대한 또다른 증거를 찾기 위해 관찰할 대상의 폭을 확장하여 또다른 대상에 대해서 조사하고 관찰한다. 여기서 참이 성립되면, 그 사실을 '잠정적인 명제'를 설정하고 그것의 신뢰성을 점검하기 위해 또다른 특수한 대상에 대해서 조사한다. 이 과정에서는 반례가 발생하면 그 명제는 파기되거나 수정되어야 하며, 참이 판명되는 경우 그 명제는 높은 신뢰성을 갖고 미래의 사실에 관한 새로운 지식의 원천으로 발전할 것이다.

3. 귀납적 추론 지도에서 고려할 사항

일상생활에서 우리는 종종 잘못된 신념에 집착하는 경우가 있다. 즉 자신의 신념을

대담하게 검토하지 않으려는 것은 자기 감정의 균형이 깨트려지는 것을 두려워하기 때문이다. 이는 귀납적인 태도의 부족 때문이라고 할 수 있을 것이다. Polya(1958)는 귀납적인 태도를 가지려면 여러 가지 요인이 수반되어야 하지만 적어도 다음의 3가지 사항이 필요하다고 보고 있다. ① 지적 용기가 필요하다. 즉 자기의 신념을 고치려는 용기가 있어야 하며, 다른 사람의 편견에 도전할 수 있는 지적 용기가 필요하다. ② 지적 정직성이 필요하다. 신념을 수정할 사유가 발생했을 경우, 즉 경험이나 관찰에 의해 명료하게 부정된 자신의 추측에 대해 너무 집착하지 말아야 한다. ③ 현명한 자제력이 필요하다. 충분한 검토가 없는 상태에서 너무 쉽게 자신의 신념을 수정하는 일은 어리석은 일이다. 비록 모든 신념을 성실히 조사할 수는 없을지라도 신념을 바꾸는 일이 합리적인가를 곰곰이 생각해 보는 일은 귀납적인 태도 형성에 매우 도움이 될 것이다.

귀납적인 추론에 대한 일반적인 경향과 그에 따른 지도에서 고려할 점을 살펴보면 다음과 같다. Wason(1974)의 귀납적 추론에 대한 연구에 의하면 학생들은 처음에 작용할 수 있는 가정이 타당한지에 대한 검사를 하지 않거나, 더 포괄적인 규칙을 찾지 않거나 명백히 모순이 되는 증거에 직면했을 때조차도 그것을 제거하려는 경향이 있음을 발견하였다고 한다.

또, Nisbett, R.E., Krantz, D.H., Jepson, C., & Kunda, Z(1983) and Wason, P(1974)의 연구를 종합하면, ① 학생들은 종종 제한된 표본으로부터 귀납적 추론을 하곤한다. 따라서 Dienes가 주장하는 지각적 다양성의 원리를 수용하여 제한된 대상이 아닌 가급적이면 풍부하고 다양한 자료를 활용하여 관찰, 실험, 조작할 수 있는 기회와 환경을 제공해 주어야 할 것이다.

② 학생들은 자신의 귀납적 가정에 집착하려는 경향, 즉 가정이 일단 한 번 세워지면 그것이 타당한지에 대한 충분한 검사를 하지 않는 경향이 있다. 따라서 귀납적으로 잘 해결되지 않는 경우에 대한 경험과 함께 결론에 대한 타당성을 검증해 보는 습관을 길러야 할 것이다.

③ 학생들은 자신의 귀납적 추론 과제에 대한 형식적인 통계 절차와 유사한 얼마간의 직관적인 어림짐작을 이용하려고 한다. 이 어림짐작은 때로는 적절하지만 때로는 불충분하다. 따라서 새로운 자료를 이용하여 검증해 보는 태도를 강조해야 할 것이다.

④ 통계적인 훈련은 귀납적인 추론에 긍정적인 영향을 주므로 일정 수준의 통계적인 훈련을 경험할 수 있는 기화와 환경을 만들어 주어야 한다.

Ⅳ. 결 론

수학은 인간의 사고 과정과 관련된 교과라는 점에서 매우 중요시되고 있다. 수학교

육에서 추론은 새로운 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 발견·터득하거나 적용하는데 매우 중요하다. 즉 수학교육은 지식 그 자체보다도 그 지식을 얻기까지의 사고 과정과 얻어진 사실에 대해 옳은지를 확인해 보는 사고활동이 강조되고 있다. Polya(1958)의 '귀납은 연역을 암시하며, 특수한 경우는 일반적인 증명을 암시한다'는 주장은 어떤 특수한 사례를 열심히 관찰·조사하여 귀납적으로 발견한 규칙과 성질은 형식적(연역적)증명을 제공할 수 있으므로 수학학습의 초기 단계에서는 귀납적인 접근의 필요성을 강조하고 있으며 Skemp는 '개념학습의 유일한 지도 방법은 주어진 적절한 범례에서 공통적인 속성을 뽑아내는 귀납적인 추론을 통한 학습 지도가 효과적이다'고 주장하고 있다. 연역적인 이해는 최소한 귀납적인 사고의 경험과 연관되어 있기 때문에 초·중학교의 수학학습은 연역적인 접근에 앞서서 귀납적으로 학습되어야 함을 설명한 것이다.

수학을 '만드는 과정의 수학'과 '최종적인 형태 즉 만들어진 수학'으로 구분한다면, 수학자들의 창조적인 연구의 결과인 수학은 공리, 정의, 정리, 증명 등은 대부분 특수한 경우를 관찰하고 관찰된 사실의 뒤에 숨겨진 규칙성과 일관성, 유사성을 찾아내어 일반적인 원리를 이끌어 내는 것은 귀납적인 추리를 통해서 발견된 것이다. 이렇게 볼 때, 수학적 제사실들은 우연히 발견한 것이 아니라 수학자들이 무수한 시행착오의 과정을 거치면서 어떤 순간에 직관을 통해 이루어진 즉, 귀납적인 추론 과정을 통해 발견해 낸 사실이다. 따라서 초등학교의 수학 학습은 귀납적으로 접근해야 함은 당연한 사실이다.

앞서서 언급한 바와 같이 앞으로의 학교 수학은 교사는 자신이 알고 있는 지식이나 교과서를 통해 단순히 지식을 전달하고 학생은 이를 전수 받는 수동적인 방식의 수업에서 탈피하여 수학적 원리, 개념, 법칙 등을 구성하고 적용함에 있어서 학생들의 능동적인 참여와 활동을 기회 및 환경을 조성해 주어야 할 것이다. 즉 학습에서 학생들이 활동의 기회가 많은 귀납적 추론, 유비적 추론을 통해 능동적으로 수학적 지식을 구성하고, 이를 확인·적용하는 연역적 추론과 연결시킴으로서 생동감 있는 수학 수업이 보장될 것이다.

참 고 문 헌

남승인 (1995). GET를 이용한 평면도형의 성질에 관한 연구, 한국교원대학교 박사학위 논문, pp.25-41.

류성림 (1995). 중학교에서의 수학적 추론 지도, *청람수학교육 제5집 2권*, pp.48-59.

방정숙 (1995). 국민학생을 위한 추론으로써의 수학학습 지도, *청람수학교육 제5집 1권*, pp.32-33.

양승렬 (역) (1994). *과학적 추론의 기초*, W.C. Salmon; *'The Foundations of 6'*, 서울: 서광사.

우정규 (譯) (1992). *귀납: 과학 방법론에 대한 정당화*, 서울: 서광사.

이용률 (1997). *수학지도의 기초 · 기본*, 서울: 경문사, p.56.

임병수 (1990). *현대논리학*, 서울: 일신사, pp.117-136.

황정규 (1984). *인간의 지능*, 서울: 민음사, p.24.

片桐重男 (1995). *數學的な考え方を育てるねらいと評價*, 東京; 明治圖書出版株式會社, pp.75-84.

平林一榮 · 石田忠男 (1988). *算數 · 數學科重要用語300の基礎知識*, 東京; 明治圖書出版株式會社, pp.271, 304, 306.

Freudenthal, H. (1973). What groups mean in mathematics and what they should mean in Mathematical Education, *In Developments in Mathematical Education,* Cambridge: Cambridge University Press.

Kutz. R.E. (1991). *Mathematics as … in Teachimg elementary Mathematics Needham Heights,* Mas; Ally and Bacon.

O'Daffer, P.G. & Thornquist, B.A. (1993). Critical Thinking, Mathematical Reasoning and Proof, *Research Ideas for the Classroom/High School Mathematics*, New York; Macmillan Publishing Company, pp.39-54.

Polya. (1958). Induction and Analogy in Mathematics, *Volume 1 of Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, Priceton, N.J., 3-22, pp.68-69.

NCTM (1989). *Curriculum and Evalution Standards for School Mathematics,* pp. 112-114.

Schwartz, J. & Yerushalmy, M. (1987). Using Microcomputers to Restore Invention to the Learning of Mathematics, In Contributors to Thinking, edited by David Perkins and Raymond Nickerson, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 293.

Wason, P. (1974). The psychology of deceptive problems, *New Scientist*, 63, pp. 382-385.