韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 8집, 1999. 1. 91-105.

J. Korea Soc. Math Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 8, Jan. 1999. 91-105.

# 아동의 공간 직관력 향상을 위한 지도 방법에 대한 고찰

류 성 림 (제일여자상업고)

직관력은 현대와 같이 급변하는 사회에서 어떤 문제의 상황을 전체적으로 파악하거나 그 본질을 인식하는데 매우 중요하다. 특히 공간 직관력은 매일을 공간 속에서 생활하고 있는 우리에게는 더욱 소중한 교육적 대상이 된다. 공간 직관력은 눈에 보이는 구체물이나 감각적으로 받아들여진 사물을 통하여 그 배후에 있는 공간으로서 추상적, 이상적인 것을 감지할 수 있는 힘이다. 수학교육학적 관점에서 보면 공간 직관력에는 시각화(도형을 인식하는 능력, 도형을 구성하는 능력 등), 공간적 관계(도형이나 공간의 확장을 이해하는 능력 등), 공간적 방향 파악(위치를 파악하는 능력 등)을 포함한다. 본 연구에서는 이들 공간 직관력을 육성하기 위하여 초등학교 교육과정과 연계하여 적절한 학습 내용 및 방법을 고찰하고자 한다.

## Ⅰ. 서 론

최근 NCTM(1998)은 '학교 수학을 위한 원리와 규준'에서 아동들이 도형, 위치, 변형, 공간 추론에 관한 능력을 발달시킴으로써 자신들의 공간적 세계에 대한 이해뿐만 아니라 수학의 다른 영역과 예술, 자연 과학, 사회 과학 등과 같은 영역에 대한 이해의 토대를 마련해야 한다고 권고하였고, Suydam(1985)이 비형식적 방법에 의한 초등 기하의 수업 목표 중의 하나로 '실세계에 관한 공간 직관력의 배양'을 들고 있듯이, 수학교육에서 기하를 가르치는 목적 중의 하나는 공간 능력을 신장시키는 것이라 할 수 있다. Freudenthal은 아동들이 활동하고 숨 쉬며 움직이는 공간을 이해하는 것이 기하이며, 따라서 아동들이 공간 속에서 더 나은 생활을 하고 활동하기 위해서는 공간을 알고 탐구할 필요성이 있음을 주장하였다(Clements & Battista, 1992; 신국환, 1998). 다시 말하면 아동들이 일상 생활의 활동과 수학을 연결할 수 있는 가장 적절한 학습 영역으로 공간 기하를 들 수 있는 것이다. 또한 NCTM(1989)에서는 일상 생활 속에서 탐구하고 활동하는 것을 강조하고 있는 바, 공간 감각의 개발을 위해 특히 K-4학년의 교육과정에 '2, 3차원 입체의 모양과 성질, 입체의 상관 관계, 모양에 대한 통찰과 직관'을 포함시킬 것을 권고한 바 있다. 공간 감각은 공간 지각력 또는 공간 시각화를 포함하고 있으며, 공간 감각을 개발하기 위해서는 아동들에게 공간의 환경과

사물에 대해 갖는 직관력의 육성이 필요하다.

공간 직관력을 중시하고 있는 이유로는 크게 세 가지로 나누어 생각해 볼 수 있다. 첫 번째는 사회적 이유이다. 급변하는 정보화 사회에 적응을 잘하기 위해서는 범람하는 정보들 중에서 개인적 또는 사회적 문제를 해결하는데 필요한 정보를 적절히 선택하고 처리하지 않으면 안된다. 이 때 정보의 선택이나 판단에 있어서 상황을 전체적으로 파악하고 그 본질을 통찰하기 위해서는 직관력이 필요한 것이다. 두 번째는 심리적인 이유이다. Bloom에 의하면, 아동들의 공간 직관력은 9, 10세까지 약 50%, 12~14세까지 약 80%가 발달하고, 특히 발달 곡선을 알아보면 약 7~13세 사이에서 급상승하고 있음을 볼 수 있다. 이러한 결과로 미루어 볼 때, 특히 초등학교와 중학교에서 공간 직관력을 충분히 육성할 필요가 있다. 또한 14세 이후에도 지속적으로 공간 직관력을 개발해야 됨은 물론이다. 세 번째는 수학교육적 이유이다. 중학교에서 도형의 증명을 학습할 때, 많은 학생들이 어려움을 겪고 있는 것이 사실이며, 특히 그림이 겹쳐있는 복잡한 도형에서 증명에 필요한 도형을 생성해 내는 것에 어려움이 더한데 이것은 공간 직관력과 관련이 있다고 말할 수 있다. 또 보조선을 긋는 문제와 관련해서도 어디에 보조선을 그으며, 보조선을 그으면 어떤 도형이 만들어지는가와 관련해서도 공간 직관력이 중요하게 작용한다고 볼 수 있다.

이와 같이 여러 가지 관점에서 볼 때, 공간 직관력의 육성은 수학교육에서 매우 중요하다고 말할 수 있으며, 따라서 본 연구에서는 아동들의 공간 직관력의 육성을 위한 지도 방법 및 학습 내용과 활동에 대해 고찰해 보고자 한다.

## Ⅱ. 공간 직관력의 의미

일반적으로 공간 직관력은 '공간에서의 위치를 상상하는 일' 또는 '눈에 보이는 구체적인 사물이나 감각적으로 받아들여지는 사물을 통해 비가시적인 공간으로서의 추상적, 이상적인 것을 감지할 수 있는 힘'으로 볼 수 있다. 그러나 이것은 너무 일반적인 의미이므로 좀 더 구체적으로 심리학적 관점과 수학교육학적 관점에서 공간 직관력의 의미를 고찰할 필요가 있다.

Thurstone은 지능을 구성하는 요인으로 '수, 지각 속도, 공간, 언어의 이해, 기억, 추론, 언어의 유창성'의 7개를 들고, 이것을 기본 정신 능력이라고 하였다(신준식, 1992). 여기서 공간은 대상을 2차원이나 3차원에서 생각하는 능력으로 공간에서 물체의 관계를 이해하는 능력을 말한다. Thurstone은 공간 능력을 다음과 같이 3개의 하위 능력으로 나누고 있다.

첫째는 공간 시각화(spatial visualization)로서, 표상 내용을 마음 속으로 조작하는 능력이다. 예컨대, 평면도형이나 입체를 보다 작은 부분으로 분할하는 것, 평행이동, 회

전에 의해 재배열하는 것, 잇거나 합성하여 새로운 평면도형과 입체를 만드는 것 등을 들 수 있다.

둘째는 공간적 관계(spatial relation)로서, 대상이나 그 부분의 공간적 관계를 바르게 파악하는 능력이다. 예컨대, 입체도형을 전개도로 표현하는 능력 등을 들 수 있다.

셋째는 공간적 방향(spatial orientation)으로서, 제시된 모양이 다른 각도의 시각에서는 어떻게 나타나는가를 상상하는 능력, 공간 내에 자기자신을 바르게 위치할 수 있는 능력이다. 예컨대, 여행중이나 교실에서 자신이 어디에 있고, 어떻게 하면 목적지에 이를 수 있는가를 아는 능력, 또 위와 아래, 왼쪽과 오른쪽, 앞과 뒤의 의미가 이해 되기도 하고, 어떤 위치에서 본 도형의 배치를 이해할 수 있는 능력 등을 들 수 있다.

한편 Kunimoto(1995)는 공간 직관력을 더욱 구체적으로 다음의 8가지를 할 수 있는 능력으로 보고 있다.

첫째, 도형을 인식하는 능력으로서, 구체물에서 입체도형을 추상하거나 입체도형에서 구체물을 예상할 수 있는 능력이다.

둘째, 도형을 구성하는 능력으로서, 점토나 마분지 등을 사용하여 평면도형이나 입체도형을 구성할 수 있는 능력이다.

셋째, 조작을 통찰하는 능력으로서, 조작을 한 후 도형의 변화를 인식하거나 도형에 어떤 조작을 했는가를 이해하는 능력이다.

넷째, 도형을 통찰하는 능력으로서, 도형의 보이는 부분뿐만 아니라 보이지 않는 부분을 간파하여 나머지 부분을 예상해서 도형을 인식하는 능력이다.

다섯째, 도형이나 공간의 넓기를 받아들이는 능력으로서, 공간의 무한성이나 평면도형의 넓이와 입체도형의 표면적, 부피를 양으로 받아들일 수 있는 능력이다.

여섯째, 도형을 그림으로 표현하는 능력으로서, 입체도형을 전개도, 겨냥도로 표현하거나 반대로 전개도, 겨냥도에서 입체도형을 예상하는 능력이다.

일곱째, 위치를 파악하는 능력으로서, 평면이나 공간에서 점, 선, 면을 나타내거나 위치관계를 파악할 수 있는 능력이다.

여덟째, 공간을 자유롭게 이동할 수 있는 능력으로서, 마음 속에서 자신의 위치를 자유롭게 바꾸어 옮길 수 있는 능력이다. 예컨대, 아동에게 상자를 보여주고 '상자의 면을 4개, 5개 볼 수 있는 곳은 어디일까'라고 물을 때, '상자안'이라고 답할 수 있는 능력이다. 이 능력은 공간 직관력에서 자신의 활동성을 중시하고 있다는 점에서 중요하다.

위의 Thurstone과 Kunimoto의 능력을 대응시켜 정리하면 다음과 같다.

1) 공간 시각화 (· 도형의 인식 능력 · 도형의 구성 능력 · 조작의 통찰 능력 · 도형의 통찰 능력)

2) 공간적 관계 (· 도형이나 공간의 넓기를 받아들이는 능력 · 도형을 그림으로 표현하는 능력)

3) 공간적 방향 (· 위치를 파악하는 능력 · 공간을 자유롭게 이동할 수 있는 능력)

물론 위의 능력이 공간 직관력의 하위 능력을 모두 말한 것이라 볼 수는 없지만, 대부분의 능력을 포함하고 있다고 보기 때문에 지금부터는 이것을 공간 직관력이라고 하겠다.

## Ⅲ. 공간 직관력을 육성하기 위한 지도 방법의 고찰

### 1. 心象기하의 의미

여기서는 공간 직관력을 육성하기 위한 방법의 하나로 '心象기하'[1]라는 방법을 제안하고자 한다. Zimmermann과 Cunningham(1991)은 심상기하를 마음속으로, 연필과 종이로, 또는 기술공학을 이용하여 이미지를 형성하는 과정이며, 수학적 발견과 이해를 위해 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정으로 보고 있다. 결국 심상기하는 단순히 그림을 통해서 수학을 인식하는 것이 아니고, 이해를 위한 모호하거나 피상적인 직관도 아니며, 마음 속의 생각을 꿰뚫어보는 직관인 것이다.

일반적으로 공간 직관력을 육성하기 위한 교수-학습 과정은 다음 단계에 의해 이루어진다고 볼 수 있다.

1) 구체적인 조작 활동을 하는 단계

이 단계는 구체적인 대상을 사용한 조작적 활동, 예컨대, 관찰, 분해, 구성하는 활동을 통해서 입체와 평명도형의 표상이 형성되어가는 단계이다. 또 표상의 형성뿐만 아니라 언어에 의한 도형의 표상과 성질을 정착하는 단계이기도 하다. 이 단계에서 중요한 것은 표상의 형성뿐만 아니라 그 표상을 분해, 합성하거나 변형하여 자유롭게 처리할 수 있도록 지도해 나가는 것이다. 그러나 이 단계에서는 교구와 그 활동이 구조적

---

1) '心象기하(mental image of geometry)' 는 보통 '시각화(visualization)' 라는 용어로 많이 쓰이고 있으며, Kunimoto는 암산과 대비하여 '暗기하' 라는 용어를 쓰기도 한다. 본 연구에서는 '공간의 이해에 깊이와 의미를 주고 문제해결에 믿음직한 안내자를 제공하며 창조적인 발견을 고취시키는, 마음의 눈(mind's eye)에서 형성된 그림을 통한 직관' 이라는 의미를 강하게 하기 위해 '심상기하'라는 용어를 쓰기로 한다.

이어야 한다는데 중점을 두고, 이를 통해서 서서히 표상이 형성—즉, 행동이 내면화—되도록 해야 한다. Bishop(1981)은 영국 아동의 실험 결과를 바탕으로 다음과 같은 교구나 활동이 적절하다고 권고한 바 있다.

· Tangram 활동
· 종이 접기, 종이를 오려서 인형, 동물 등을 만들기
· 3차원 도형의 전개도
· 끈으로 하는 위상적 활동
· 거울에 의한 학습
· 점토를 이용한 모델 만들기, 입체의 절단
· 기하판, 모눈 종이를 이용한 활동

2) 구체적인 조작 활동은 서서히 줄이고 표상에 의해 조작을 행하는 단계

공간 직관력이 유효하게 기능하기 위해서는 언제나 물리적 교구에 의한 조작적 활동에 의존해서는 안된다. 물리적 교구를 줄이고 표상에 의해 도형의 이미지를 자유롭게 합성, 분해, 변형, 처리할 수 있어야 한다. 즉 표상 이미지를 고찰하는 학습이 필요하다. 예를 들면, 다음과 같은 지도를 통하여 공간 직관력이 보다 확실히 형성되도록 할 필요가 있다.

· 조작 활동을 할 기회를 충분히 주는 것과 동시에 조작 활동의 과정과 결과를 예상하도록 하는 활동을 하게 한다.

· 구체물과 입체도형, 평면도형의 용어를 연결짓기 위해 그들의 이미지를 상기할 수 있는 표현을 하게 한다. 예컨대, 정육면체를 주사위와 같은 모양이라고 부른다.

· 촉각만으로 입체를 상상하게 하거나 일부분을 보고 입체도형을 상상하게 하는 활동을 하게 한다. 예컨대, 주머니 안에 입체를 넣어 만져서 입체의 면, 변, 꼭지점을 감각적으로 받아들이게 한다.

· 입체도형을 평면 위에 표현하도록 하고, 평면 위에 표현된 입체도형을 상상하도록 하는 활동을 하게 한다.

· 구성요소에 주목해서 입체도형을 고찰하는 활동을 하게 한다. 예컨대, 정육면체의 면을 맞추어 직육면체를 구성한다.

이와 같은 지도가 공간 직관력을 육성하기 위해 중요한 것은 사실이지만, 공간 직관력을 기르기 위해서는 마지막 단계로서 '심상기하'에 의한 학습이 이루어져야 할 것이다. Bishop(1981)은 공간 직관력이 개인마다 다른 이유의 하나로서 표상 이미지를 고찰하는 능력이 충분히 육성되어 있느냐 그렇지 않느냐로 보고 있다. 그리고 공간 직관력의 육성을 위한 중요한 방법론으로서 '심상기하'를 권고하고 있다.

지금까지의 고찰로부터 '심상기하'는 공간 직관력을 육성하기 위한 교수-학습 단계

에서 최종 단계의 연습형태라고 말 할 수 있다.

한편 심상기하는 공간 직관력을 육성하는 것이 목적으로서, 암산처럼 그 실행 과정이 알고리즘적이지 않고 발견적이다. 예컨대, 다음과 같이 심상기하가 이루어진다.

"눈을 감아 보세요. 정삼각형을 생각해 보세요. 삼각형의 변을 연결하여 도형을 구성합니다.

① 2개의 삼각형을 연결할 때, 어떤 도형이 생길까요?

② 3개의 삼각형을 연결할 때, 어떤 도형이 생길까요?

③ 4개의 삼각형을 연결할 때, 어떤 도형이 생길까요?

눈을 뜨세요."

이 문제의 경우 답은 하나가 아니라 몇 개가 될 수도 있다는 것을 염두에 두고 실행할 필요가 있다. 답은 ① 마름모꼴, ② 등변사다리꼴, ③ 평행사변형, 변의 길이가 2배인 정삼각형, 오목육각형이다. 물론 위의 문제를 행하기 전에 교수-학습 과정으로서 실제로 마분지로 만든 정삼각형을 사용하여 도형을 구성하는 학습을 하는 것이 좋다.

이와 같이, 심상기하에서는 도형을 표상하고, 그 위치와 크기를 변화시키기도 하며, 그것들을 조합하거나 도형의 지식을 응용하는 능력도 필요하다. 재구조화와 조합적인 생각이 중요한 역할을 하고 있는 것이다.

끝으로 Gimpel(1992)이 정의한 심상기하의 의미는 다음과 같다.

"심상기하란 도구를 사용하지 않는 기하이다. 즉 심상기하를 행할 때, 물리적 모델과 평면적-도적 표현은 기억의 지주로서의 역할을 하며, 사용하지는 않는다. 다만 심상기하에서는 유일하게 기하적 대상에 대한 표상과 언어적으로 제시된 지식만이 기하의 문제해결을 위한 도구가 된다. 암산과 같이 문제는 구두나 쓰기로 나타내어지며, 해결은 표상으로 실행된다. 즉 지필, 작도기구, 전자계산기와 컴퓨터를 사용하지 않고 해결되며, 결과는 다시 입으로 나타내거나 쓰기로 나타낸다."

위와 같은 심상기하의 연습을 초등학교의 단계에서 충분히 해 두면 중학생이나 성인이 되어서도 공간 직관력이 더욱 양성될 수 있을 것이다.

2. 심상기하의 지도법

실제로 심상기하는 아동들에게는 어려운 측면이 있다. 예를 들면, 기계적으로 해결이 잘 되지 않는 경우가 있고, 제시된 문제가 복잡하여 학생의 공간 직관력을 초월한 경우도 있으며, 또 집중력을 많이 필요로 하기 때문이다.

따라서 심상기하를 지도할 때는 학생의 부담이 그렇게 크지 않도록 하기 위해서 다음과 같이 신중한 지도방법이 필요하다.

1) 심상기하에서는 학생의 집중력을 필요로 하기 때문에 조용하고 안정된 환경이 필요하다. 예를 들면, 조용한 황경을 만들기 위해 방을 어둡게 해서 심상기하를 하는 것

도 좋을 것이다. 이것도 어려우면 적어도 눈을 감고 심상기하의 문제를 행하게 하는 것도 좋다. 그러나 눈을 감고 해결하기가 어려운 학생에게는 입체나 그림을 공간속에서 다루면서 해결하는 것이 도움이 된다. 왜냐하면 운동적 활동은 표상 능력에 도움이 되기 때문이다. 표상 능력에는 개인차가 크기 때문에 아동마다 적절한 지도가 필요하다. 또 심상기하 지도 도중에는 타학생의 집중력에 방해를 주지 않기 위해 학생의 발문을 가능하면 자제하게 하는 것이 좋다.

2) 교사는 학생에게 천천히 간결한 말로 문제를 제시한다. 가능하면 몸짓을 하지않고 묻는 것이 좋다. 그리고 한번만 말한다. 또한 교사의 잘못된 지시는 수정이 어렵기 때문에 교사도 집중해서 연습하고 참가할 필요가 있다.

3) 심상기하는 연습형태의 하나이므로 그다지 긴 시간동안 할 필요는 없고, 짧은 시간(약 10분간)에 연속적으로 하는 것이 바람직하다. 심상기하를 체계적으로 실시한 Kerst는 최초의 2주간 정도는 매시간 10분 정도를 하고, 그 이후에는 주 1, 2회 정도를 하는 것이 좋다고 권고하였다.

4) 너무 복잡한 문제는 피하는 것이 좋다. 가능하면 기본적인 문제를 다루도록 한다.

5) 결과는 간략한 그림이나 모델로 제시하여 협의하는 것이 좋다. 이것은 표상의 재강화에 도움이 됨과 동시에 연습을 계속할 수 있는 기초를 만들기 때문이다.

심상기하는 이미 20세기 초의 수학교육 개량운동에서 제기되어 왔다. 직관교수를 중시한 독일의 Treutlein은 공간 직관력의 육성을 수학교육의 중요한 목표 중 하나로 정하고 이미 언급한 단계와 같은 교수단계를 제시한 바 있다.

그는 공간 직관력의 제1단계로서, 입체의 물리적 모델을 사용한 학습을 하도록 하였다. 학생은 물리적 모델을 손으로 만지고, 뒤집어 보는 등의 여러 가지 관찰을 한다. 그리고 교사는 모델의 각 부분(모서리, 꼭지점)을 가르키고 학생에게 그 이름을 말하게 한다. 반대로 어떤 부분의 이름을 말하고 학생에게 그 부분을 가르키게 한다. 제2단계는 내부직관에 의한 것이다. 교사가 입체의 어떤 부분을 가르킨 후 그 모형을 재빨리 숨긴다. 학생은 가르킨 부분의 이름을 말한다. 그리고 점차 모형의 사용을 줄인다. 제3단계는 표상에 의한 연습으로서, 모형을 이용하지 않고, 입체는 교사의 손운동에 의해 제시된다.

<표-1> 학년별 목표 및 학습 내용

| 학 년 | 목 표 | 학습 내용 |
|---|---|---|
| 1학년 | 생활 주위에 있는 여러 가지 물건에 대한 직관적인 관찰과 구성 활동을 통해 입체도형인 직육면체, 원기둥, 구의 모양 등을 이해하고, 활용하게 한다. | 구체물로 여러 가지 도형(직육면체, 원기둥, 구)의 관찰과 이해를 하고, 여러 가지 상자, 둥근 기둥, 공을 이용하여 재미있는 물체 모양 만들기 |
| 2학년 | 직육면체 모양의 구체물을 통하여, 그 구성 요소인 면, 모서리, 꼭지점 등을 인식하게 한다. | 직육면체 모양의 구체물(상자 등)을 관찰하여 면, 모서리, 꼭지점을 알아보고, 나무젓가락과 고무찰흙으로 직육면체를 구성하며, 상자의 모서리를 자르고 붙이는 활동으로 모양과 크기가 같은 면, 마주보는 면을 알아보기 |
| 3학년 | (평면도형) | (삼각형, 사각형, 원) |
| 4학년 | (평면도형) | (평면위의 두 직선의 수직과 평행, 둔각, 예각, 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 사각형의 내각의 크기와 그 합) |
| 5학년 | 직육면체와 정육면체의 성질을 이해하게 하고, 그들의 전개도를 그릴 수 있게 한다. | 직육면체, 정육면체의 구성요소와 구성관계를 이해하고 겨냥도와 전개도 그리기, 면의 평행과 수직, 밑면과 옆면, 직육면체의 부피와 겉넓이 |
| 6학년 | 각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔의 성질을 이해하게 하고, 그 전개도를 그릴 수 있게 한다. 그리고 원기둥, 원뿔, 구 등의 입체도형에서 회전체의 성질을 이해하게 한다. | 구체물로부터 각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔의 성질과 전개도, 구, 회전체의 성질, 각기둥, 원기둥, 원뿔의 겉넓이, 각기둥, 원기둥의 부피 |

큰 또는 작은 운동에 의해 눈 앞에 있는 것처럼 상상하게 된다. 이 상상형태를 '공중모형'이라고 부른다. 이 공중모형으로 위치적 관계 및 모양의 변화를 이해하기 위한 연습을 한다. 이 학습의 중요성에 대해 그는 다음과 같이 말하였다. 공간을 이해하는 가장 좋은 교수 단계는 입체형태의 내부직관에 의한 연습이다. 따라서 '속셈'에 대응하는 순수한 '심적 기하'를 다루게 된다면 내부직관이 형성된 단계에 이르게 될 것이다.

한편 공간 직관력을 육성하기 위해서는 내용의 뒷받침 없이는 이루어질 수 없다. 따라서 아동의 발달단계에 적절한 내용과 문제를 고찰, 선정하는 것이 필요하고, 현행 교육과정을 검토하여 앞에서 기술한 공간 직관력의 각 능력에 대응하는 내용을 고찰할 필요가 있다.

## Ⅳ. 공간 직관력을 육성하기 위한 내용의 고찰

### 1. 공간 직관력과 관련된 현행 초등수학 교육과정의 목표 및 학습 내용

먼저 초등학교의 현행 제6차 교육과정의 도형 영역에서 공간 지각력의 육성과 관련된 각 학년별 목표와 학습 내용은 앞의 <표 1>과 같다(교육부, 1992).

2. 공간 직관력의 각 능력과 학년별 학습 내용

<표 1>에서 제시한 학년별 학습 내용과 Ⅱ장에서 제시한 공간 직관력의 각 능력을 표로 만들면 <표 2>와 같이 나타낼 수 있다. <표 2>에서 알 수 있듯이 빈란이 많이 있음을 알 수 있는데, 본 절에서는 모든 빈란에 적절한 예를 들지는 못했지만, 가능한 학습 내용과 활동의 예를 몇 가지 들어 보기로 하겠다.

3. 보충 학습 내용 및 활동의 예

여기서는 <표 2>의 빈란에 적절한 학습 내용 및 활동을 Radatz와 Rickmeyer(1991), Kunimoto(1995)의 연구를 바탕으로 예시하고자 한다. 단, 이것은 체계적으로 제시된 예는 아님을 밝혀둔다.

<표-2> 공간 직관력의 각 능력과 학년별 학습 내용

| 능력 / 학년 | 공간 시각화 | | | | 공간적 관계 | | 공간적 방향 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A. 도형의 인식 능력 | B. 도형의 구성 능력 | C. 조작의 통찰 능력 | D. 도형의 통찰 능력 | E. 도형이나 공간의 넓기를 받아들이는 능력 | F. 도형을 그림으로 표현하는 능력 | G. 위치를 파악하는 능력 | H. 공간을 자유롭게 이동할 수 있는 능력 |
| 1학년 | 구체물로 여러 가지 도형의 관찰과 이해 [예1]③ | 구체물을 이용한 여러 가지 물체 모양 만들기 | [예8] | | [예1]① | | [예1] ①, ② | [예1]① |
| 2학년 | 상자 모양의 관찰과 이해 | 나무젓가락과 고무찰흙으로 직육면체 구성 [예3]② | [예3]① [예8] | [예2] [예3]② | | 본을 떠서 오린 종이 조각으로 상자 모양의 구성 | | [예1] |
| 3학년 | (심상기하) | | (심상기하) | (심상기하) | (심상기하) | | (심상기하) | (심상기하) |
| 4학년 | (심상기하) | | (심상기하) | (심상기하) | (심상기하) | | (심상기하) | (심상기하) |
| 5학년 | 직육면체의 관찰 [예4] [예10]① | 모서리, 면을 이용한 직육면체의 구성 [예4] [예10]① | [예5] [예7] [예10]② | 보이지 않는 면, 모서리의 개수 [예10]② | 직육면체의 겉넓이, 부피 [예6] | 직육면체의 겨냥도, 전개도 | 모서리, 면의 수직과 평행 [예6] | [예6] |
| 6학년 | 여러 가지 입체도형의 관찰 | [예10] | [예7] [예10] | [예10] | 여러 가지 입체도형의 겉넓이, 부피 | 여러 가지 입체도형의 전개도 | [예9] | [예9] |

[예 1] 저학년에서는 생활과의 관련성을 고려하여 현실적인 학습을 하는 것이 좋다.

① 항해 활동 : 학교 가는 길의 순서, 학교 안의 공간적 방향(정문에서 교실까지, 교실에서 특별실까지), 교실 안의 공간적 방향(책상, 쓰레기통의 위치 등)—(E-1, G-1, H-1, H-2)

(ㄱ) 학교 가는 길의 순서 : 교통이 번잡하지 않은 한 학생의 학교 가는 길을 선택하여 아동들과 함께 집을 출발하여 학교에 도착한 후 다음과 같은 발문을 한다.

- '집에서 학교까지 오는 길에 어떤 가게, 나무 등이 있습니까?'
- '그것들은 왼쪽, 오른쪽 중 어디에 있습니까?'
- '어디서 방향을 바꾸었습니까?' 등

이렇게 한 후 학교 가는 길을 그려보게 한다.

(ㄴ) 학교 안의 공간적 방향

학교 정문에서 교실까지, 교실에서 특별실, 화장실까지의 순서를 익히고 그려보게 한다. 이렇게 한 후 심상기하의 학습을 병행하는 것이 좋다. 예컨대, '머리 속으로 떠올리세요. 교실문을 열고 나가 오른쪽으로 향합니다. 네 번째 교실의 문을 엽니다. 지금 어디에 와 있습니까?'

(ㄷ) 교실 안의 공간적 방향

자신의 책상, 선생님의 책상의 위치, 교실의 오른쪽 벽에 꾸민 것 등을 학습한 후 심상기하의 학습을 병행한다. 예컨대, '눈을 감고, 교실의 왼쪽 벽과 뒷 벽에는 어떤 것이 꾸며져 있는지 떠올려 보세요.'

② 이동과 위치 관계의 학습—(G-1, H-2)

짝 또는 교사의 다음 지시에 따라 가능하면 눈가림을 해서 연습한다.

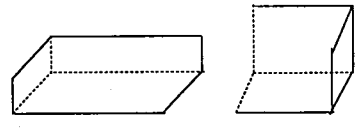
'자리 옆에 섭니다. 5발짝 앞으로 나아가시오' , '자리 옆에 섭니다. 4발짝 뒤로 물로 서시오. 다시 왼쪽으로 3발짝 나아가시오. 어디에 서 있습니까?'

③ 촉각으로 도형을 인식하기 위한 학습—(A-1, H-2)

아동의 눈을 가리고, 책상 위에 구체물을 몇 개 얹어 놓고, 만지게 하여 어떤 모양의 구체물이 있는지 말하게 한다. 또 구체물을 이동시킨 후 어떤 변화가 있으며 무엇을 이동했는지 말하게 한다. 다른 구체물을 추가하거나 없애고 그 변화를 알게 한다.

[예 2] 빠져있는 구성 요소를 알아보는 학습—(D-2)

오른쪽과 같은 직육면체의 그림을 주고 빠져있는 꼭지점과 변을 예상해 보게 하고, 자로 그려보게 한다.



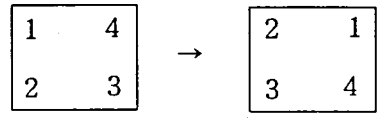
[예 3] 정사각형의 절단, 회전 등에 관한 학습

교과서에서는 정사각형이나 직사각형을 입체의 면에서 추출하거나 구체물에서 추상하는 활동을 하고 있지만, 정사각형의 회전과 절단해

서 직사각형이나 삼각형을 만드는 학습도 할 필요가 있다.

① 정사각형의 뒤집기와 회전—(C-2)

오른쪽 그림과 같이 숫자가 쓰여진 정사각형을 상하 또는 좌우로 회전한 다음 각 숫자의 위치를 물어본다.



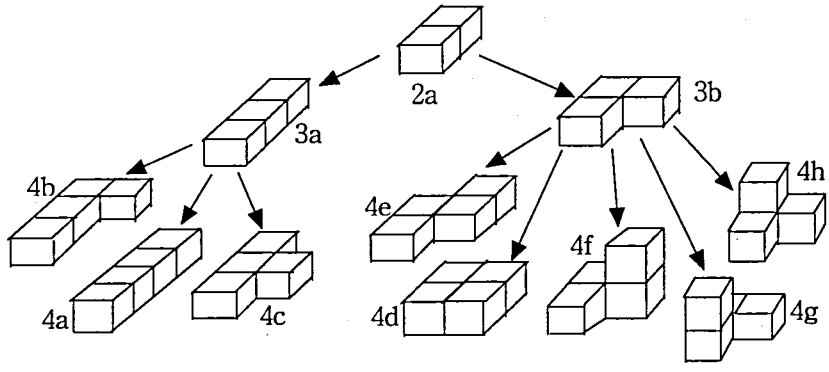

② 정사각형의 절단—(B-2, C-2)

정사각형과 직사각형을 절단해서 삼각형이나 직사각형을 만드는 활동을 한다. 예컨대, '삼각형이나 직사각형이 되도록 정사각형을 한 번 절단하세요' , '삼각형이나 가오리 연모양이 되도록 정사각형을 두 부분으로 나누세요'

[예 4] 도형을 구성하고 분해하는 활동—(A-5, B-5)

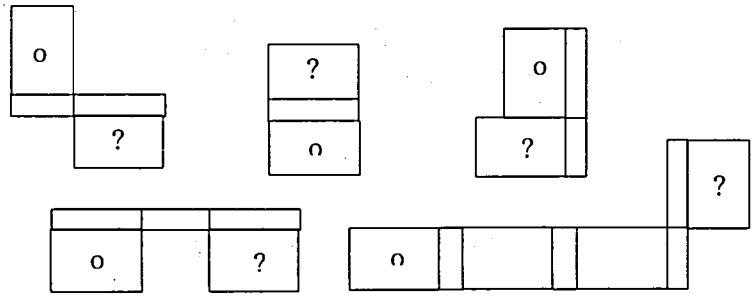
'정육면체를 사용하여 여러 가지 물체를 만들어 보자. 4개의 정육면체가 있습니다. 면을 붙여서 입체를 만들 때, 몇 개를 만들 수 있습니까?'

다음과 같이 8개를 만들 수 있다.



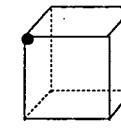

[예 5] 전개도의 학습을 위한 것—(C-5)

전개도를 학습하기 이전에 다음과 같은 성냥갑을 굴리고 뒤집는 활동을 통하여 조작을 통찰하는 능력을 육성함으로써 머리속으로 상자를 펼치는 능력이 익숙하게 된다고 생각한다. 예컨대, 그림과 같이 O가 있는 곳에 성냥갑을 표를 해두고 굴려서 ?가 있는 곳에 왔을 때, 위쪽은 성냥갑의 안쪽인지 바깥쪽인지를 묻는다.



[예 6] 입체도형의 변 위의 이동—(E-5, G-5, H-5)

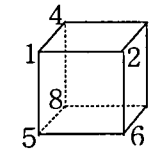
이것은 입체에 관한 공간 직관력을 보다 강하게 육성하기 위한 활동이다. 앞뒤, 왼쪽오른쪽, 위아래 등의 위치를 파악하는 힘, 공간을 넓히는 힘, 공간의 자유로운 이동 능력을 육성하는데 도움이 된다.



① 육면체의 투명모델을 이용하여 한 꼭지점에서 다른 꼭지점으로 이동하는 게임을 생각한다. 먼저 앞, 뒤, 왼쪽의 꼭지점을 제시하고 오른쪽과 같이 이동하였을 때, 어느 꼭지점에 이르게 되는가를 알아본다.

처음에는 구체적인 투명모델을 이용하였지만, 익숙해지면 육면체를 머리 속에서 생각하여 같은 학습을 한다(심상기하). 또한 출발점으로 되돌아오려면 어떻게 움직이면 되는가를 생각해 보게 한다.

② 위의 학습을 더 추상화하여 육면체의 각 꼭지점에 번호를 붙이고 같은 활동을 한다.



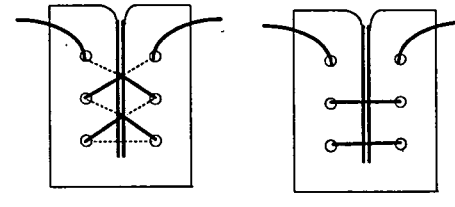

예컨대, '1에서 출발하여 1로 되돌아 오는 가장 가까운 길을 찾아보아라', '모든 꼭지점을 지나는 길이 있는가' 등. 이것은 육면체의 전개도를 학습할 때 도움이 될 것이다.

[예 7] 입체도형의 회전운동—(C-5, C-6)

위의 학습과 관련해서 육면체의 면의 위치관계를 위한 학습으로서 다음과 같은 학습 활동이 적절하다. 이것은 이미 말한 성냥갑 등의 회전 학습과 관련된 것이지만 특히 꼭지점이나 변의 위치관계에 주목해서 학습한다는 점에서는 성냥갑의 회전과는 다르다. '위의 (6)-②의 그림을 왼쪽으로 두 번 뒤집으면, 위, 아래, 앞, 뒤에 오는 면은 각각 어느 것입니까?'

[예 8] 끈 묶기 학습—(C-1, C-2)

Bishop은 끈의 학습이 공간 직관력의 육성에 적절할 수 있음을 밝히고 있다. 수학적으로는 위상에 관한 내용이다. 아동의 구두끈을 묶는 학습을 통해서도 이루어질 수 있다.



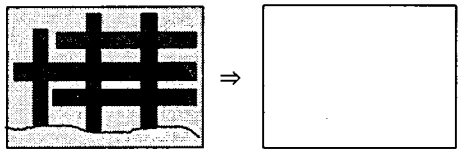
예를 들면, '그림에서 왼쪽의 구두끈은 점선과 같이 구두속으로 지나고 있다. 그렇다면 오른쪽의 구두끈은 구두속을 어떻게 지나고 있겠는가?'

[예 9] 공간적 방향의 학습 내용—(G-6, H-6)

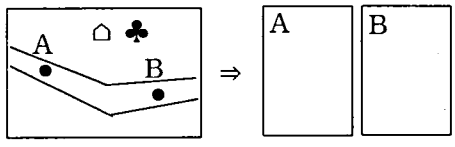
장소를 바꾸어 대상을 보면 어떻게 변화는가하는 학습은 공간적 방향의 육성을 위

해 특히 중요하다.

① 어떤 사람이 밤에 울타리를 보았더니 오른쪽 그림과 같이 보였다. 다음 날 낮에 반대 방향에서 보면 어떻게 보이는지 그려 보시오.



② 그림과 같이 차를 타고 도로를 달릴 때, A와 B의 위치에서 보면 집과 나무의 위치가 어떻게 변하는지 말해 보시오.

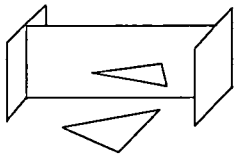



[예 10] 대칭과 관련된 학습

대칭축의 성질을 인식하기 위해 다음과 같은 학습이 도움이 될 수 있다.

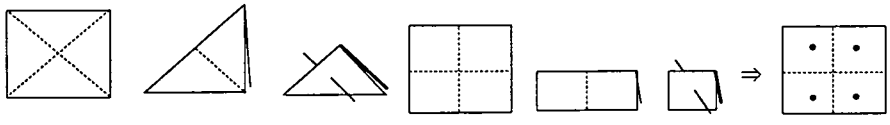
① 반투명 거울 놀이—(A-5, B-5, B-6)

오른쪽과 같이 반투명한 색깔이 있는 플라스틱 교구를 이용하여 선대칭인 도형을 구성하게 한다.



② 바늘 구멍 놀이—(C-5, D-5, C-6, D-6)

선대칭이나 점대칭에서 점과 점의 위치관계를 보다 명확히 하기 위해 다음과 같은 바늘 구멍 놀이를 한다. 정사각형의 종이를 두 번 접어서 여러 가지의 바늘 구멍을 내었을 때, 각각의 구멍은 어떤 위치관계를 나타낼 것인가를 예상하게 한다.



## V. 결 론

공간은 우리의 실생활과 가장 밀접한 관련이 있는 영역이고, 수학교육에서 기하를 가르치는 목적 중의 하나는 공간 능력을 신장시키는 것이라 할 수 있다. NCTM(1998)이 '학교 수학을 위한 원리와 규준'에서도 권고하고 있듯이 초등학교에서의 공간 감각의 학습은 능동적이어야 하며, 이를 위해서는 가시적인 상과 구체물을 필요로 하는 바, 학생들은 분류, 조립, 모델화, 측정 그리고 구성 활동을 할 필요가 있다. 이러한 탐구 활동은 모눈종이, 자, 컴퍼스, 패턴블록, 기하판, 기하 입체 등의 구체물은 물론이고 탐구 활동을 돕는 3차원 그래픽이 가능한 컴퓨터 소프트웨어 도구를 통하여 가속화될 수 있다. 이러한 활동과 함께 '심상기하'에 의해 기억한 영상으로부터 기하적 도형을 묘사하거나 그리는 활동을 함으로써 수학의 내적, 외적인 문제의 해결을 도울 수 있을 것이다. 심상기하의 목표는 기본적으로는 공간 직관력의 육성이지만, 그것을 함으로써 아울러 다음과 같은 부수적인 목표를 달성하는데 도움이 되기도 한다: ① 이미

알고 있는 도형의 지식의 심화, 확장, ② 새로운 도형의 구성, 새로운 정리로의 발견적 접근을 가능케 한다, ③ 함수적 사고의 육성, ④ 기하적 언어의 사용 가능성의 발달, ⑤ 집중력의 훈련, ⑥ 기억의 훈련.

또 본 연구에서는 공간 직관력을 육성하기 위한 학습 내용에 대해 몇 가지의 예를 들어 간단히 알아 보았다. 이것은 현재 지도되고 있는 교육과정의 내용과 관련지어 제안한 것으로 앞으로 각 학년에서 어떤 능력을 중점적으로 지도해야 할 것인지에 대한 연구가 있어야 할 것이다. 또한 공간 능력은 기하 학습뿐만 아니라 수학의 다른 영역, 예컨대 분수 개념을 학습하는데도 필요하고 다른 교과는 물론 우리의 생활과 직업에 상당 부분이 관련되어 있으므로 공간 직관력을 육성하기 위한 여러 가지 교구와 교재가 개발되어 충실한 학습 내용을 갖도록 해야 할 것이다.

## 참 고 문 헌


교육부 (1995). *수학 1학년 1, 2학기*, (주)국정교과서.

교육부 (1995). *수학 2학년 1, 2학기*, (주)국정교과서.

교육부 (1996). *수학 3학년 1, 2학기*, (주)국정교과서.

교육부 (1996). *수학 4학년 1, 2학기*, (주)국정교과서.

교육부 (1997). *수학 5학년 1, 2학기*, (주)국정교과서.

교육부 (1997). *수학 6학년 1, 2학기*, (주)국정교과서.

신국환 (1998). 초등학생의 공간 지각 발달에 관한 연구, *한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.*

신준식 (1992). 공간 시각화 학습이 수학적 문제 해결력에 미치는 효과, *한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.*

國本景龜 (1995). *空間直觀力と論理的思考力を育成するための教材開發と指導法の改善.*

Bishop, A.J. (1981). *Visualle Mathematik,* In H.G. Steiner, & B. Winkelmann (Eds.), Fragen des Geometrieunterrichts, Aulis Veriag, pp.166-176.

Clements, D.H. & Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* NewYork: Macmillan, pp.420-464

Gimpel, M. (1992). *Was ist und was soll Kopfgeometrie? Math,* in Sch.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* Reston, Va.: NCTM, INC. 구광조 · 오병승 · 류희찬 (역) (1992). *수학교육과정과 평가의 새로운 방향,* 서울: 경문사.

NCTM. (1998). *Principles and Standards for School Mathematics*: Discussion Draft,

Reston, Va.: NCTM, INC.

Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1991). *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen,* Schroedel.

Suydam, M.N. (1985). The shape of instruction in geometry: Some highlights from research. *Mathematics Teacher, 78.*

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics,* Project, ISBN 0-88385-071-0.