韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 8집, 1999. 1. 287-301.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 8, Jan. 1999. 287-301.

# 일차함수와 이차함수의 이해

박 제 남 (인 하 대 학 교)
양 희 정 (학익고등학교)

방과후 수학수업이나 현행 수학능력시험 후 고3학생의 수학지도는 그 방법과 목적이 기존의 수학교과의 내용과 운영방식과는 차별화 되야 한다. 특히 교사는 이에 대한 인식과 필요한 지식이 증대 되야 하며, 교내 방과후 영재반 또는 수학관련 동아리에서 사용할 주제의 선정과 교수법이 개발되어야한다. 주제선정은 대수, 해석영역에서 연계성이 강하게 나타나는 것이 바람직하며, 수학교육의 목표에 실질적으로 부합되어야한다. 본 논문에서 우리는 일·이차 다항식을 예로 제시하고자 한다. 다항식은 중학교 수학교과에서 인수분해와 전개의 대상이고 고교과정에선 접선이나 정적분의 대상이다. 우리는 일·이차다항식을 미분, 적분, 행렬, 그리고 벡터의 입장에서 근사(approximation)의 주체로 다루었다.

## 0. 도 입

1999년 고교 1학년부터 적용하는 방과후 교육은 국민공통기본과목인 공통수학 교재와 차이가 있는 교재개발을 요구한다. 방과후 수학관련 수업이 기존의 틀을 벗어나지 못한다면 과거 보충수업과 우열반 편성으로 제기되었던 문제점이 또 다시 반복될 수 있다. 또한 현재 수학능력 시험 이후의 고3 학생의 수학수업은 현실적으로 이루어지지 못하고 있다. 수학능력 시험 이후 약 1달 정도의 기간을 효율적으로 운영한다면 학생들의 학습측면에서 긍정적인 효가가 있을 것이다. 수학능력시험 이후의 수학교과 지도는 영재교육 또는 수학동아리 모임을 통하여 일어나야 하며, 이에 대한 선행조건으로 교재개발, 지도교사의 지식증대가 요구된다. 우리가 사용해야하는 교재는 해석, 대수, 기하영역이 통합된 주제를 포함하는 것이 바람직하며 대학에서 열리는 이공계 필수과목(예를 들어, 미분적분학, 선형대수, 미분방정식)과 연계가 되어야한다. 이에 적합한 주제로서 함수, 미분, 적분, 행렬이론을 들 수 있다. 이러한 분야별 연계과정을 이해한 학생은 수학관련 이·공계 교육과정에서 효율적인 학습성취를 기대할 수 있다.

본 논문에서 고3 학생을 대상으로 수학능력 시험이후 운영할 수 있는 수학프로그램을 일·이차다항식을 중심으로 논의하였다. 본 논문은 일·이차다항식과 관련하여 지도교사가 알아야할 내용과 학생들에게 제시할 내용을 동시에 담고있으며, 도입을 포함하여 6개의 절과 부록으로 구성되어 있다. 우리는 1절에서 다항식의 정의를 알아보았고, 2절에서 일·이차다항식을 주어로 하여 이들이 미분의 입장에서 어떻게 사용되는가를

살펴보았다. 3절에선 정적분이 일·이차함수를 왜 필요로 하는가를 알아보았다. 한편, 4절에서 행렬을 이용하여 일·이차함수를 구하는 방법과 마지막 절에선 벡터로서의 일·이차함수를 고찰하였다. 부록에선 2절과 3절의 교수-학습지도안을 첨부하였다. 각 절에서 사용한 예는 참고문헌 [AR], [BS]에서 발췌하였고, 특히 벡터공간의 정의, 내적의 정의, 행렬을 이용한 최적화 해법(식 (4-2) 참조), Gram-Schmidt 방법, 수직사형법(식 (5-4) 참조)등은 [AR]을 참고바란다. 우리가 사용하는 함수는, 정확한 조건 없이, 미분가능한 함수이다. 한편, 정수모임은 $Z$, 실수모임은 $R$로 표시하였다.

## 1. 다항식(多項式)

중등과정에서 기본적으로 많이 쓰이는 일·이차다항식

$ax+b,\ ax^2+bx+c$

의 의미에 대하여 생각해 보자. 독자들의 이해를 돕기 위하여 우리는 학부 수준의 추상대수 (Abstract algebra), 선형대수(Linear algebra)와 해석학(Real analysis)의 내용을 이용하려한다 [He], [AR], [BS].

우리가 중등과정에서 사용하는 다항식이란 유일소인수분해정역(unique factorization domain, UFD) $R[x]$ (또는 $R[x,y]$)의 원소를 의미한다. 특히 변수 $x$가 없는 다항식을 상수(constant)라 하고 $\pi x+\dfrac{1}{2}$, $x^2+\pi x-\sqrt{5}$를 각각 일, 이차다항식이라 부른다. 두 정역 (integral domain) $R[x]$와 $R[x,y]$는 모두 UFD이고, $R[x]$는 단항이데알정역 (principal ideal domain, PID)이지만 $R[x,y]$는 PID가 못된다.

우리는 다항식을 실수계수 다항식으로 표현했지만, 실제 사용하는 다항식은 유리수를 계수로 하는 다항식이다. 6차 수학교육과정 하에서 사용하는 단항식, 다항식의 용어는 연산 "+"의 대상의 개수에 의하여 정의된다(물론 $2a+3a$은 의미가 없다). 따라서 현행 중등과정에서 $3a$는 단항식이며, $3x+4y$는 다항식이다. 이러한 정의는 중학생들의 이해를 돕기 위하여 항의 개수에 따라 정의한 것이다. 물론 $3a$는 일변수 多項式環(polynomial ring) $R[a]$의 원소, $3x+4y$는 다변수 다항식환 $R[x,y]$의 원소로 볼 수 있으며 이들을 "다항식" 으로 모두 불러도 무방하다. 중학교 수학교과과정 중에 식의 계산에서 인수분해와 다항식의 곱셈으로 다항식환을 접근하며 직교좌표계에서 일·이차 (다항)함수라는 표현아래 이들의 그래프 그리기로 발전한다. 일차함수 그래프 그리기는 대응표를 작성하고 서너 개의 점을 직교좌표평면에 표시한 후 이들 점과 점 사이를 선분으로 연결한다. 이 과정은 이차함수 그래프 그리기에서 학생들이 동일한 방법으로 점과 점을 선분으로 연결하는 우를 범할 수 있다. 한편, 고교과정에

서의 일차함수는 접선으로 사용되고, 이차함수는 폐구간에서의 최대, 최소 구하기와 정적분의 좋은 예로 이용되고있다.

다항식환 $R[x]$는 대수적으로 유일소인수분해정역이며, 해석적으로는 초월함수를 이해하는 대상이다. 초등학교에서 사용하는 유일소인수분해정역은 정수환 $(Z, +, \times)$이다. 이 정수환(PID)을 대하는 방법은 구구단, 나눗셈, 덧셈, 뺄셈 등이다. 한편 초등학교에서 학생들은 비율을 통하여 분수(유리수)를 접한다. 우리가 본질적으로 유리수(rational number)를 중요히 여기는 이유는 유리수를 통하여 무리수(irrational number)를 이해하기 때문이다. 다시 말하면 유리수는 무리수를 이해하는 방법상의 대상이다. 이 점에서 우리가 필연적으로 만난 무리수를 어떻게 우리가 원하는 한도에서 이용하느냐가 문제이다. 무리수는 우리(human beings)의 것이 아니며, 같은 입장에서 초월함수도 우리가 만든 것이 아닌 이미 우주가 창조된 시점에서 이미 만들어진 것이라고 생각한다. 예를 들어 추의 상하운동이나 RLC-회로에서 만들어지는 미분방정식

(1-1) $y'' + ay' + by = r(x)$

에서 지수함수와 삼각함수를 다음과 같이 만난다. 먼저, 동차식(homogeneous)

(1-2) $y'' + ay' + by = 0$

의 일반해 $y_h$, 그리고 주어진 특수한 외부힘(external force) $r(x)$로부터 하나의 특수해 $y_p$ 를 구하여 (1-1)의 일반해

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

을 구한다. 이 과정에서 $y_h$를 구하는 경로를 살펴보면, $y'' + ay' + by = 0$로부터

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} Y, \qquad Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

이며, (1-2)의 일반해 $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$를 구한다는 것은 본질적으로 행렬

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

의 고유치(eigenvalues), 고유벡터(eigenvectors)를 통한 대각화(Jordan normal form)(또는 중근인 경우 숨은 eigenvector 찾기)이다. 다른 세련된 대수적 표현을 쓰면, 2차원 벡터공간 $\{y \mid y'' + ay' + by = 0\}$에서 서로 독립(linearly independent)인 두 원소 $y_1$, $y_2$를 찾는 것이다. 따라서, 이 벡터공간의 임의의 원소는 $c_1y_1 + c_2y_2$(여기서 $c_1$, $c_2$는 실수) 로 표현되고 이를 (1-2)의 일반해라 부른다. 미분방정식 (1-2)에서 상수(damping constant) $a$는 고유치에 실수부를 만들면서 저항계수 $a$가 적당히 작으면 (즉, $a^2 - 4b < 0$) 지수함수와 삼각함수가 자연스럽게 어우러져 (1-2)의 일반해

(1-3) $e^{-at/2}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

에 나타난다. 여기서 sine, cosine 함수는 추의 상하움직임을 표현하고 지수함수는 그 움직임을 점차 죽이는 역할을 한다. 따라서 조물주가 우주를 창조했을 때, 물체의 상하운동을 특정 상황에선 우리가 지금 사용하고 있는 지수, 삼각함수들이 결합된 (1-3) 모양을 따르도록 하였다. 이제 우리가 해야 할 일은 이들 지수, 삼각함수를 우리 식으로 해석하고, 우리 식으로 이용하는 것이라고 생각한다.

다음절에서 일·이차다항식을 이용하여 함수 $\sqrt[3]{1+x}$, $e^x$, $\sin x$를 이해하고 이로부터 특정 무리수를 해석해보자.

## 2. 일·이차다항식과 미분

미분가능한 함수 $f$에서 접선은 일차다항식이다. 일차다항식을 거듭 이용한 Newton의 방법(Newton's method)으로 만들어지는 수열(sequence)

$$(2\text{-}1)\qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

은 적당한 무리수의 정의 및 근사값을 구하는데 이용된다. 예를 들어 무리수 $\sqrt{2}$의 해석은 이차다항식 $f(x)=x^2-2$ 에 대하여, (2-1)으로부터 수열 $\{x_n\}$의 점화식

$$(2\text{-}2)\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad (n=1,2,\ldots)$$

을 얻는다. 만일 $x_1=1$로 시작할 때, $x_5 = 665857/470832 = 1.414213562374\ldots$는 소수점 아래 11자리까지 같게되는 매우 좋은 근사값을 우리들에게 제공한다. 식 (2-2)로부터 얻은 수열

$$\{x_n \mid n=1,2,3,\ldots,\ x_1=1\}$$

은 모두 유리수로 $\sqrt{2}$에 수렴한다. 참고로 Maple를 사용하여 $\sqrt{2}$를 200자리까지 구해보자.

```
> evalf(sqrt(2), 200);
1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379\
   9073247846210703885038753432764157273501384623091229702492483605\
   0558507372126441214970999358314132226659275055927557999505011527\
   27820605715
```

여기서 우리는 학생들에게 $\sqrt{2}$를 충분히 큰(예를 들어 백억)자리까지 구했을 때, 0부터 9까지 10개의 숫자가 거의 10% 씩 나타나는 가를 학생들에게 질문할 수 있다.

구간 $[a, x]$에서 연속이고 $(a, x)$에서 미분가능한 함수 $f$에 평균값정리(mean value theorem)를 적용하면

$$f(x)-f(a) = f'(c)(x-a) \tag{2-3}$$

를 만족하는 $c$가 구간 $(a, x)$에 적어도 하나 존재한다. 식 (2-3)은 주어진 함수 $f$를 일차다항식 $\alpha x+\beta$ (여기서 $\alpha=f'(a)$, $\beta=-f'(a)a+f(a)$)로 거칠게 보겠다는 것이다. 그러나, 식 (2-3)에서 $c$는 단순히 존재성만 의미하므로 식 (2-3)은 우리에게 적당한 범위만을 제공한다. 예를 들어 $\sqrt{101}$를 생각해 보자. 구간 $[100, 101]$에서 $f(x)=\sqrt{x}$에 평균값 정리를 적용하면

$$\sqrt{101} = 10+\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

를 만족하는 $c\in(100, 101)$가 존재한다. 이 때, 우리가 도저히 알 수 없는 실수 $c$를 이해하는 최선의 방법은 범위

$$100 \le c \le 121$$

를 동원하는 것이다. 따라서

$$\frac{1}{22} \le \frac{1}{2\sqrt{c}} \le \frac{1}{20}$$

이므로

$$10.0475 < \sqrt{101} < 10.05$$

를 얻는다. 따라서 우리가 최선으로 선택한 $c$ 즉, $100 \le c \le 121$의 이해방법은 우리에게 $\sqrt{101}$의 정확한 네 자리 숫자 10.04를 제공해준다.

실수 $a$를 포함하는 어떤 구간에서 함수 $f$의 삼차까지의 도함수 $f'$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$가 존재한다고 가정하자. 이로부터 $t$를 변수로 하는 새로운 함수

$$F(t) = f(x)-f(t)-(x-t)f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2}f''(t) \tag{2-4}$$

를 생각해보자. (2-4)로 부터

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^2}{2}f^{(3)}(t)$$

이다. 이제 다시 새로운 함수 $G(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$G(t) = F(t)-\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^3 F(a).$$

이 때, $G(a) = G(x) = 0$ 이므로, Roll의 정리를 이용하면,

$$0 = G'(c) = F'(c) + 3\frac{(x-c)^2}{(x-a)^3}F(a)$$

를 만족하는 상수 $c$가 $x$와 $a$사이에 적어도 하나 존재한다. 따라서

$$F(a) = \frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-a)^3$$

이다. 결국, 우리는 주어진 함수 $f$를 $x=a$근처에서 각 계수가 불확실한 삼차다항식

$$\text{(2-5)} \qquad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-a)^3$$

을 얻는다. 그러나 우리는 주어진 함수 $f(x)$를 (2-5)로부터 각 계수가 확실한 일차다항식(Taylor 일차다항식)

$$\text{(2-6)} \qquad f(a)+f'(a)(x-a)$$

와 이차다항식(Taylor 이차다항식)

$$\text{(2-7)} \qquad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

을 얻을 수 있다. 특히 우리는 근사식

$$f(x) \simeq f(a)+f'(a)(x-a)$$

을 선형근사식이라 부른다. 결론적으로 (2-6)은 주어진 함수를 $x=a$ 근처에서 우리가 잘 이해하는 (유리계수) 일차다항식으로 보겠다는 것이다. 예를 들면

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ 에서 $x=0$ 근처에선 $f(x)\simeq 1+\frac{1}{3}x$ 이다. 따라서

$$\sqrt[3]{0.9} \simeq 1+\frac{1}{3}(-0.1) \simeq 0.9667$$

이다. 한편, (2-7)에서 각 계수가 확실한 (유리계수) 이차다항식

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

으로 $x=a$근처에서 주어진 함수를 바라볼 수 있다. 예를 들면, 지수함수 $e^x$는 $x=0$ 근처에서, (2-6)으로부터, 일차다항식 입장에선 $1+x$이고, 이차다항식 입장에선, (2-7)로부터, $1+x+\frac{x^2}{2}$이다. 즉, 무리수인 오일러수 $e$란 일차다항식 시각에선 $1+1$, 이차다항식 시각에선 $1+1+\frac{1}{2}$로 표현된다.

본질적으로 평균치정리란 무리수를 우리가 잘 알고 있는 유리수의 합으로 이해하겠다는 것이다. 일차, 이차 다항식에서 일, 이는 무리수를 유리수의 몇 번의 합으로 이해

하는가를 결정한다.

한편, 함수 $f(x)=\sin x$를 $x=0$ 근처에서 일차다항식(선형근사식)으로 처리하면 $\sin x \simeq x$이다. 예를 들면 $\sin 1^\circ \simeq \frac{\pi}{180}$로 근사되며 자유진자운동 (free undamped pendulum)에서 오는 미분방정식 $\theta'' + k\sin\theta = 0$에서 $\theta$가 충분히 작으면 주어진 미분방정식을 선형화 $\theta'' + k\theta = 0$ 할 수 있다.

다음 절에서 수치해석적 정적분에 대하여 알아보자.

## 3. 일·이차다항식과 적분

적분이란 우리가 원하는 모양의 면적을 잘 알고있는 직사각형의 면적으로 근사하는 것인데, 세부적으로 일차다항식은 사다리꼴로, 이차다항식은 사다리 꼴 보다 정교한 매끈한 포물선으로 정적분의 근사값을 쉽게 우리들에게 제공한다. 결과는 다음과 같다.

일차함수를 이용한 수치적분 방법(Trapezoidal rule)

(3-1) $$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

이차함수를 이용한 수치적분 방법(Parabolic rule, Simpson's rule)

(3-2) $$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

(3-1)의 발상은 이웃한 두 점은 직선을 완전히 결정하므로 각 구간에서의 면적을 사다리꼴로 근사하는 것이며, (3-2)의 발상은 직선보다 세밀한 방법으로 포물선(이차다항식)을 필요로 한다. 처음부터 세 개의 점은 하나의 이차다항식을 결정해나가고, 따라서 구간 $[a, b]$, $a=x_0$, $b=x_n$,는 짝수개의 토막으로 분할을 요구한다. 한편, 식 (2-7)로부터 $x=0$ 근처에서

(3-3) $$\sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

이다. (3-3)에서 $\sqrt{1+x^4}$은 $x=0$ 근처에서 8차 다항식 $1+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{8}x^8$으로 볼 수 있고, 이로부터

$$\int_0^{0.4}\sqrt{1+x^4}\,dx \simeq \left[x+\frac{x^5}{10}-\frac{x^9}{72}\right]_0^{0.4} \simeq 0.4010203591$$

를 얻는다.

## 4. 일·이차다항식과 행렬

우리가 지금까지 원하는 실수(= $r$, 무리수)의 근사값(= $a$, 유리수)이란 허용된 오차(= $f$)와의 관계

(4-1) $|r-a| < f$

를 내포하고 있다. 이 개념을 일반적인 벡터공간으로 옮겨가 보자. (4-1)에서 쓰인 절대값 $|\cdot|$ 은 실수상의 두 점 $r, a$의 거리 (distance)를 나타낸다. 거리의 기호 $d$를 사용하여 (4-1)을 다시 쓰면

$$d(r, a) < f$$

이다. 즉, 함수 $d$는

$$d: R\times R \rightarrow R_{\geq 0},\ d(x, y) = |x-y|$$

로 정의된다. 절대값 $|\cdot|$은 실수의 크기(norm)를 정의한다. 즉, norm $|\cdot|$은 함수

$$|\cdot|: R \rightarrow R_{\geq 0},\quad |\cdot|(r) = |r|$$

이다. 다시 이 norm은 내적(inner product)에서온다. 일반적으로 n-차원 $R$-벡터공간( n-dimensional R-vector space) $V$는 내적 $\langle\, ,\rangle$을 요구하며, 내적은 norm $\|\cdot\|$을 다음과 같이 정의한다.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},\ x \in V$$

한편, 이 norm은 두 벡터간의 거리

$$d(x, y) = \|x-y\|$$

를 결정한다. 특히 $\{x\in V \mid \|x\| = 1\}$를 단위원이라 부른다. 우리가 사용하는 $R$-벡터공간 $V$는 연속적으로 $(V, +, R, \langle\, ,\rangle, \|\ \|, d)$로 표현된다. 우리가 벡터공간에서 사용하는 두 벡터가 "멀다" 또는 "가깝다"는 내적에서 연유된 거리(distance)에서 결정된다. 두 $R$-벡터공간 $V, W$에 정의 된 함수 $T: V\rightarrow W$가 다음 두 조건

i) $T(X+Y) = T(X) + T(Y),\ X, Y\in V$

ii) $T(rX) = rT(X),\ r\in R, X\in V$

를 만족할 때, 함수 $T$를 선형변환(linear transformation)이라 부른다. n 차원 $R$-벡터공간 (n-dimensional R-vector space) 이란 본질적으로

$$R^n = R\times R\times \cdots \times R$$

이며, n 차원 벡터공간 $R^n$ 에서 m 차원 벡터공간 $R^m$으로 가는 모든 선형변환의 모임은 본질적으로 실수 상에서 모든 $m\times n$ 행렬의 모임 $Mat_{m\times n}(R)$ 이다. 선형대수의

핵심은 주어진 선형변환(또는 행렬) $A: R^n \to R^m$에서 $r$-차원 $A$의 row space, $(n-r)$-차원 $A$의 nullspace, $r$-차원 column space, 그리고 $(m-r)$-차원 $A^T$의 nullspace 이다.

직교좌표평면에서 직교좌표평면으로 가는 함수 중에서 직선을 직선으로 옮기는 함수를 우리는 현행 교과과정에선 일차변환이라 부른다. 다른 표현을 쓰면, 일차변환이란 정사각형을 평행사변형으로 옮기는 함수이다. 중등과정에서 일차변환이란 용어 사용보다는 선형변환으로 사용하는 것이 바람직하다. 우리가 선형변환이란 용어를 사용한다는 것은 이미 평면(직교좌표평면)을 2차원 실수벡터공간(two dimensional $R$-vector space)으로 본 것이다. 직교좌표평면에서 직교좌표평면으로 가는 선형변환의 모든 모임은 크기가 $2\times2$인 행렬환 $Mat_{2\times2}(R)$이다. 예를 들면 행렬 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$은 평면에서 평면으로 가는 선형변환으로 특히 직선 $y=2x+1$을 직선 $y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$으로 보낸다. 한편 주어진 데이터를 일차함수나 이차함수로 근사할 수 있다. 4개의 점 $(0,1), (1,3), (2,4), (3,4)$은 동일직선 상에 없다. 주어진 4점으로부터 가장 가까운 직선 $y=a^*x+b^*$를 구하는 방법은 다음 경로(least squares fitting to data)를 따른다.

(4-2) $$\mathbf{v}^* = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

여기서 $\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=1.5+x$이다. 우리가 원하는 이차다항식도 주어진 데이터를 이용하여 (4-2)로부터 얻을 수 있다.

우리가 지금까지 알아본 일·이차다항식을 이용한 근사개념을 벡터공간으로 옮겨 알아보자. 지금까지 사용한 방법을 살펴보면 (2-5)에서 본 바와 같이 Roll의 정리에서 존재성만을 의미하는 상수 $c$는 불확실한 삼차다항식을 결정하므로 우리는 상수 $c$와 무관한(확실한) 일, 이차 다항식

$$f(a)+f'(a)(x-a),\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

을 이용하여 주어진 함수 $f$를 $x=a$ 근처에서 해석하였고 우리는 지금까지 무리수의 근사에 초점을 두었다. 이 때, 우리가 사용한 거리는 어디서 왔는지 알아보자. 실수 $R$은 일차원 $R$-벡터공간이며, 여기서 사용된 내적은 $\langle a, b\rangle = a\times b$ (여기서 $a, b$는 실수이고 $\times$는 일상적인 곱하기) 이다. 따라서 벡터 $a\in R$의 norm은

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{a^2} = |a|$$

(여기서 | |는 절대값 기호)이다. 따라서, 두 벡터 $a, b$사이의 거리는

(4-3) $$d(a, b) = \|a - b\| = |a - b|$$

이다. 식 (4-3)은 일차원 실수벡터공간에서 두 벡터 $a, b$의 차이를 측도하는 방법이다. 이제 연속함수로 이루어진 벡터공간에서 두 벡터(함수) $f, g$의 차이를 측도하는 방법을 결정해야한다. 먼저 정적분

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

로 두 벡터(함수) $f, g$의 차이를 결정하면 양의 값과 음의 값 사이에 상쇄가 일어나므로 이는 좋은 측도 방법이 못된다. 양수, 음수의 상쇄를 방지하는 방법으로 제곱을 이용한

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx$$

의 값으로 두 함수 $f, g$의 차이(거리)를 설정하는 것이 바람직하다(식 (5-3)참조). 이를 바탕으로 다음절에서 알아 보고자하는 근사 개념의 주어는 주기함수이며, 표현방법은 주로 sine, cosine함수를 이용한다. 여기서 만들어지는 급수를 Fourier급수라 부르며 이 급수는 미분방정식이나 편미분방정식 풀이에 이용된다.

## 5. 일·이차다항식과 벡터

$C[a, b]$를 구간 $[a, b]$에서 정의된 모든 실수값 연속함수의 모임이라 하면, $C[a, b]$는 무한차원 실수벡터공간(infinite dimensional real-vector space)이다. 두 벡터 $f, g \in V$에 대하여

(5-1) $$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

을 정의하자. 이 정의는 $V$에서 내적의 정의를 만족하며, 따라서

(5-2) $$\|f - g\| = \left[\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

이다. 식 (5-2)에서

(5-3) $$\|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

은 두 벡터 $f, g$의 차이를 결정하는 바람직한 방법이며 $\|f - g\|^2$를 평균제곱오차

(mean square error)라 부른다.

$f$가 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수이고 $W$를 벡터공간 $C[a, b]$의 유한차원 부분공간이라하고 $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$를 $W$의 단위직교기저(orthonormal basis)라 하자(유한차원 벡터공간에서 단위지교기저를 구하는 방법을 Gram-Schmidt 방법이라 부른다). $W$에 속한 벡터로서 (5-2)의 입장에서 벡터 $f$에 가장 가까운 벡터 $g \in W$는

(5-4) $$g = proj_W f = \langle f, g_1 \rangle g_1 + \langle f, g_2 \rangle g_2 + \cdots + \langle f, g_r \rangle g_r$$

로 결정된다. (5-4)를 이용하여 2절에서 알아본 근사다항식을 projection 개념으로 옮겨가 보자.

$\{1, x, x^2\}$를 생성원으로 하는 $C[-1, 1]$의 3차원 부분공간을

$$P_2 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in R\}$$

라 하고 이곳에서 정의된 내적

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

에 대하여 Gram-Schmidt 방법을 이용하면 $P_2$의 단위직교기저

(5-5) $$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1) \right\}$$

를 얻는다. 그러므로

$$\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \int_{-1}^{1} e^x \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}(e - e^{-1}),$$

$$\langle e^x, \sqrt{\frac{3}{2}}x \rangle = \int_{-1}^{1} e^x \sqrt{\frac{3}{2}}x\, dx = \sqrt{6}e^{-1},$$

$$\langle e^x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1) \rangle = \int_{-1}^{1} e^x \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1)dx = \sqrt{\frac{5}{2}}(e - 7e^{-1}).$$

따라서, 벡터 $e^x$는 $P_2$의 원소가 아니며 (5-4), (5-5)로부터 벡터

$$\left(\frac{33}{4}e^{-1} - \frac{3}{4}e\right) + 3e^{-1}x + \frac{15}{4}(e - 7e^{-1})x^2$$

는 $P_2$의 원소로 $e^x$와 (5-2)에 입장에서 가장 가까운 벡터이다. 한편, 같은 방법으로

$$P_1 = \{a + bx \mid a, b \in R\}$$

을 $\{1, x\}$를 기저(basis)로 하는 $C[0, 1]$의 2차원 부분공간이라 하면 벡터

$$(4e - 10) + (18 - 6e)x \in P_1$$

은 (5-2)에 입장에서 벡터 $e^x$에 가장 근접한 벡터임을 보일 수 있다. 한편,

$C[0, 2\pi]$의 한 벡터 $f(x) = x$가 기저

$$\{1, \sin x, \ldots, \sin 4x, \cos x, \ldots, \cos 4x\}$$

으로 생성된 $C[0, 2\pi]$의 9차원 부분공간에 (5-2)에 입장에서 가장 가까운 벡터는

$$\pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4}\right)$$

이다.

우리는 일·이차다항식을 주어로 사용하여 미분, 적분, 행렬, 벡터 등과의 관련성을 보았다. 물론 2, 3절의 내용은 6차 수학교육과정에서 수학 I, II의 수준을 넘지 못하며, 4절은 학생들에게 (4-2)의 이해를 요구한다. 따라서 2, 3, 4절은 우리가 수학능력시험 이후에 수학에 관심 있는 학생들에게 사용 가능한 내용을 담고있다. 한편, 5절은 벡터 공간의 개념을 요구하므로 극소수의 학생들에게 이해를 기대할 수 있다. 따라서 5절의 내용은 수학 동아리 운영에서 한 학기 양으로 적당하며, 이 경우 우리는 학생들의 성공적인 학습을 기대할 수 있다. 한편, 우리 교사들은 본 소고와 연관된 단원을 학기 중에 강의할 때, 보다 깊이 있는 교수방법을 개발할 수 있다.

## 참 고 문 헌

H. Anton & C. Rorres (1994). *Elementary Linear Algebra*, Wiley, New York.

R. Bartle & D. Sherbert (1992). *Introduction to Real Analysis*, Wiley, New York.

I. Herstein (1975). *Topics in Algebra*, Wiley, New York.

# 부 록

## 수학과 교수-학습지도안

<table>
<tr><td>단원명</td><td colspan="2">일 · 이차다항식과 미분</td><td>차시</td><td>1</td></tr>
<tr><td>학습목표</td><td colspan="4">Newton의 방법을 이해하고 무리수의 근사값을 구하는데 이용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td colspan="3">교 수 - 학 습 활 동</td><td>참고자료 및 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td colspan="3">o 선수학습내용 상기<br>{ Rolle의 정리<br>{ 평균값의 정리<br>o 학습목표 제시</td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td colspan="3">o 미분가능한 함수 $f$에서의 접선은 일차다항식이다.<br>o Newton의 방법 설명<br>Newton의 방법에서 만들어지는 수열<br>$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \cdots (*)$$<br>은 적당한 무리수의 근사값을 구하는데 이용된다.<br><br>예1] $\sqrt{2}$의 근사값을 구하여 보자.<br>$f(x)=x^2-2$에 대하여 식 (*)로부터<br>$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n}) \quad \cdots (**)$$<br>을 따른다. 만일 $x_1=1$로 시작할 때,<br>$$x_5=\frac{665857}{470832}=1.414213562374\cdots$$<br>는 소수점아래 11자리까지 같게 되는 매우 좋은 근사값을 제공한다.<br>식 (**)로부터 얻은 수열<br>$$\{ x_n \mid n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ x_1=1 \}$$<br>은 모두 유리수로서 $\sqrt{2}$에 수렴한다.<br><br>o Maple을 이용하여 $\sqrt{2}$ 의 값을 10, 50, 200자리까지 구하여 학생들에게 제시하고 $\sqrt{2}$를 충분히 큰 (예를 들어 백억)자리까지 구했을 때, 0부터 9까지 10개의 숫자가 거의 10%씩 나타나는 지를 질문한다.<br><br>o 연습문제 1] $\sqrt{3}$의 근사값을 구하여라.<br><br>o 구간 $[a,\ x]$에서 연속이고 $(a,\ x)$에서 미분가능한 함수 $f$에 평균값 정리를 적용하면<br>$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a) \quad \cdots(***)$$<br>를 만족하는 $c$가 구간 $(a,\ x)$에 적어도 하난 존재한다. 이 때, 함수 $f$를 일차다항식 $\alpha x+\beta$ (여기서 $\alpha=f'(a)$, $\beta=-f'(a)a+f(a)$)로 간주하자. 그러나 식(***)에서 $c$는 단순히 존재성만 의미하므로 식 (***)은 적당한 범위만을 제공한다.</td><td>첫째항 $x_1$값과 $f(x)$을 어떻게 설정할까?<br>($x_1=3$,<br>$f(x)=x^2-3$<br>왜?)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>단계</th><th>교 수 - 학 습 활 동</th><th>참고자료 및 유의점</th></tr>
<tr><td>전개</td><td>예2] $\sqrt{101}$의 근사값을 구하여 보자.<br>구간 [100, 101]에서 $f(x)=\sqrt{x}$에 평균값정리를 적용하면 $c\in(100,\ 101)$가 존재하여 $\sqrt{101}=10+\frac{1}{2\sqrt{c}}$를 얻는다. 이때 우리가 도저히 알 수 없는 실수 $c$를 이해하는 최선의 방법은 범위 $100\le c\le 121$를 동원하는 것이다.<br><br>따라서, $10.0475 < \sqrt{101} < 10.05$를 얻는다. 그리하여 우리가 최선으로 선택한 $c$(즉, $100\le c\le 121$)의 이해방법은 $\sqrt{101}$의 정확한 네자리 숫자 10.04를 제공한다.<br><br>연습문제 2] $\sqrt{99}$의 근사값을 구하여라.<br><br>ㅇ함수 $F(t)=f(x)-f(t)-(x-t)f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)$ …(****)<br>를 생각해 보자.<br>$F'(t)=-\frac{(x-t)^2}{2}f^{(3)}(t)$<br>새로운 함수 $G(t)$를<br>$G(t)=F(t)-\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^3F(a)$로 정의하면, $G(a)=G(x)=0$이므로 Rolle의 정리를 이용, $0=G'(c)=F'(c)+3\frac{(x-c)^2}{(x-a)^3}F(a)$ 를 만족하는 상수 $c$가 $x$와 $a$사이에 적어도 하나 존재한다.<br>따라서 $F(a)=\frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-a)^3$이다. 결국 주어진 함수 $f$를 $x=a$근처에서 각 계수가 불확실한 삼차다항식<br>$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-a)^3$<br>을 얻는다. 이 식으로부터<br>① $f(x)$를 각 계수가 확실한 일차다항식 $f(a)+f'(a)(x-a)$으로 $x=a$근처에서 주어진 함수를 근사시킨다.(즉, 우리가 잘 이해하는 (유리계수)일차다항식으로 보겠다는 것이다.)<br><br>② $f(x)$를 각 계수가 확실한 이차다항식<br>$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$으로 $x=a$근처에서 주어진 함수를 근사시킨다.(즉, 우리가 잘 이해하는 (유리계수)이차다항식으로 보겠다는 것이다.)<br><br>예] $f(x)=e^x$는 $x=0$근처에서 일차다항식의 입장에서는 $1+x$이고, 이차다항식의 입장에서는 $1+x+\frac{x^2}{2}$이다. 즉, 무리수인 오일러수 $e$는 일차다항식의 시각에서는 $1+1$, 이차다항식의 시각에서는 $1+1+\frac{1}{2}$로 표현된다.</td><td><br><br><br><br><br><br><br>$c$의 존재범위는<br>$c\in(64,\ 100)$</td></tr>
<tr><td>정리</td><td>ㅇ차시예고<br>ㅇ과제부과</td><td></td></tr>
</table>

| 단원명 | **일 · 이차다항식과 적분** | 차시 | 2 |
|---|---|---|---|
| 학습목표 | 수치적분방법을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있다. | | |

| 단계 | 교 수 - 학 습 활 동 | 참고자료 및 유 의 점 |
|---|---|---|
| 도입 | o 구분구적법 상기<br>o 학습목표 제시 | |
| 전개 | o 수치해석적 적분법 설명<br>① 일차함수를 이용한 수치적분방법(Trapezoidal rule):<br>$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$<br>예1] $n=8$일 때, $\int_1^3 x^4 dx$의 값을 Trapezoidal rule을 사용하여 구하여보자.<br>$\int_1^3 x^4 dx \approx 48.9414$ (정적분에 의한 실제값: $\int_1^3 x^4 dx = 48.4000$)<br><br>② 이차함수를 이용한 수치적분방법(Parabolic rule, Simpson's rule):<br>$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$<br>(계수들의 배열은 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, ⋯ , 2, 4, 1 )<br><br>예2] $n=8$일 때, $\int_1^3 x^4 dx$의 값을 Parabolic rule을 사용하여 구하여 보자.<br>$\int_1^3 x^4 dx \simeq 48.4010$<br>o Trapezoidal rule과 Parabolic rule의 차이점을 알아보자.<br>o Trapezoidal rule보다는 Parabolic rule에 의한 결과가 오차가 적음을 확인하게 한다.<br><br>연습문제] $n=4$일 때, $\int_1^2 \frac{dx}{x}$의 근사값을 ①Trapezoidal rule과 ②Parabolic rule의 방법으로 구하여라. | 수치해석적 적분법을 사용하는 이유-정적분으로 계산이 되지않는 경우의 해결법<br>예) $\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4}\,dx$<br>$\approx 0.4010203591$<br><br>ln2의 근사값을 구하는 것과 본질적으로 같은 문제임(※ ln2는 기호임) |
| 정리 | o 차시예고<br>o 과제부과 | |