韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 9집, 1999. 7. 203-217.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 9, July. 1999. 203-217.

러시아 7-9학년 수학 교육과정의 개별적 접근

신 현 용 (한국교원대학교)
한 인 기 (한국교원대학교)

제 7차 교육과정을 비롯하여, 많은 연구들에서 '수요자를 중심의 교육', 즉 학습자의 개별적인 인지적 특성, 수학적 흥미, 재능을 고려하는 수학 교육을 위해 다양한 접근 방법이 모색되고 있다. 1980년대 말 이후부터 러시아에서도 이러한 연구들이 활발하게 진행되고 있다.
본 논문에서는 러시아의 중학교(7-9학년) 수학 교육에서 제시하는 다양한 유형(일반 학생들을 위한 제 1유형, 제 2유형, 수학 심화 교육과정)의 교육과정들을 살펴보고, 이를 통해 러시아에서는 교육과정 수준에서 어떤 개별적 접근 방법을 시도하고 있는가를 분석하여, 수학교육의 개별적 접근을 위한 기초 연구를 제공할 것이다.

Ⅰ. 서론[1)]

러시아 수학교육의 최근 연구 동향 중의 하나가 "수학교육 개별적, 그리고 차별적 접근"이다(개별화와 차별화에 대해서는 한인기(1998) 참조). 이러한 연구 동향은 최근 우리 나라에서의 수학 교육 분야에 관련된 다양한 연구들, 예를 들어, 제 7차 교육과정에 관한 연구(강옥기, 1997)나, 열린 수학교육(백석윤, 1998; 류희찬, 1998; 강문봉, 1998 외 다수), 수행 평가(장경윤 · 권오남 · 최명례, 1997; 황혜정, 1999 외 다수) 등등과 상당히 많은 관련을 가지고 있다.

이러한 다양한 국내 연구 결과들을 분석해 보면, 결국엔 21세기를 향하는 시점에서 학습자 개개인의 특성, 흥미, 그리고 재능을 고려한 개별화된 수학교육을 실현하기 위한 노력들이라고 볼 수 있다. 물론, 이러한 연구들은 그 동안 국내외에서 축적된 수학교육에 관련된 많은 연구 결과들이 바탕이 되며, "21세기"라는 새로운 시대에 대한 예측과 기대에서 비롯된 것이다.

21세기는 첨단 정보화 시대로써, 과거의 산업 사회에서와 같은 획일화된 교육을 받은 노동자들은 사회적으로 그 효용 가치가 줄어들고, 지적으로 다양한 가능성과 개성을 지닌 노동자를 요구하고 있다. 특히, 수학 교과는 학습자들에게 고도의 지적 활동(창의적 활동을 포함하여)의 기회를 제공할 수 있기 때문에, "21세기"에서 수학 교과의 중요성은 지금보다 훨씬 더 커질 것이다.

본 연구에서는 러시아 7-9학년 수학 교육과정을 고찰하여, 개별적 접근을 위한 교육과정의 다양한 유형들과 그러한 유형들에서 제시하는 구체적인 수학교육의 내용들을 살펴봄으로써, 21세기를 대비하는 우리 나라 수학교육의 개별적 접근을 위한 몇 가지 가능성들을 제시할 것이다.

---

1) 본고는 한국학술진흥재단이 지원하는 1998년도 대학부설연구소 지원연구과제인 "창의성 신장을 위한 수학 영재교육 개선 방안에 관한 연구"의 일환으로 작성된 것임.

Ⅱ. 러시아 수학교육의 기본 편제 및 유형

러시아의 교육 체계를 살펴보면, 크게 1-4학년과 5-11학년의 두 단계로 나뉜다. 물론, 교육 과정의 구성에서도 1-4학년이 하나로, 5-11학년이 또 다른 하나로 묶여져 있다. 1-4학년 단계는 초등(시작) 교육 단계, 5-11학년이 중등 교육 단계라고 할 수 있는데, 중등 교육은 다시금 두 단계로 나뉘는데, 5-9학년을 '기초 학교', 10-11학년은 '상급 학교'라 할 수 있다.

5-9학년 기초 학교의 수학교육을 자세히 고찰해 보면, 수학 교과 내용의 특성에 의해 5-6학년, 7-9학년으로 나눌 수 있다. 5-6학년에서는 "수학"을 배우며, 7-9학년에서는 "대수"와 "기하"를 배운다. 물론, 7-9학년에서는 교과서도 각각 "대수", "기하"로 편찬되며, 수업 시간 자체도 따로 분리되어 있다.

5-6학년 "수학" 교과의 목표를 살펴보면, ① 수 개념의 체계적인 개발, ② 수에서의 사칙 연산을 구두로, 그리고 필산으로 수행하는 능력을 숙련시키며, ③ 실제 생활의 문제들을 수학의 언어로 표현하게 하며, ④ 체계화된 과정인 "대수"와 "기하"를 준비시키는 것이다.

이 과정의 기본적 접근 방법은 직관적 접근이며, 덧붙여 연역적인 논증의 요소를 첨가하게 된다. 그러므로, 이론적인 내용들은 시각적-직관적인 수준에서 기술되며, 여러 가지 공식들은 증명없이 "규칙"이라는 차원에서 받아들이게 된다. 덧붙여, 5-6학년 교육과정은 일반 학생들을 위한 교육과정과 부진 아동들을 위한 교육과정의 두 가지로 구성되어 있다.

한편, 7-9학년의 "대수" 과정의 목표는 ① 수학이나 인접 교과(물리, 화학, 정보와 컴퓨터의 기초 등등)에서 문제를 풀 때, 자신있게 수에 관한 계산이나 형식적인 대수적인 연산을 수행할 정도의 능력을 개발하고, ② 응용 문제들에 대한 수학적 모델링의 기초적인 도구로써 '방정식'과 '부등식'을 습득하게 하며, ③ 앞으로 수학을 계속해 나가는 것에 대한 준비를 시키는 것이다. 이 과정을 배우는 동안 학습자들은 계산기를 사용하여 다양한 연산 방법들을 익히게 된다.

그리고, 7-9학년 "기하" 과정의 목표는 ① 평면에서 기하학적 도형의 성질에 대한 체계적인 학습, ② 공간 표상의 형성, ③ 논리적인 사고력의 개발, ④ 인접 교과(물리, 작도 등등)와 상급 학교에서 공간 기하학의 학습을 준비시키는 것이다.

7-9학년 기하의 학습 내용들은 높은 수준의 논리적 엄밀성과 연역적 전개, 시각화를 특징으로 한다. 이러한 체계적인 내용 전개를 통해, 학습자들은 수학 이론들의 구성 체계에 대한 표상을 형성하게 되며, 논리적인 사고를 개발할 수 있는 기초를 제공받게 된다. 한편, 학습 내용들은 작도나 그림을 통한 시각적인 자료들에 기초하여 제시되며, 이를 통해 학습자들은 기하학적 직관을 형성할 수 있게 된다. 덧붙여, 학습자들은 기하 문제 해결이나 정리의 증명 과정에서 분석-종합적인 활동 방법들과 익숙하게 된다.

일반 학생을 위한 7-9학년 수학 교육과정은 다시금 두 가지 유형(제 1유형, 제 2유형)으로 나뉘는데, 각각의 유형에 대해 할당된 시간과 학습 내용은 차이가 있다.

한편, 러시아에서는 일반 학생들을 위한 교육과정 이외에 심화 학습을 위한 교육과정을 교육부에서 고시하는데, 심화 교육과정은 8-11학년으로 구성되어 있다. 이 수학 심화 교육과정은 학습자의 연령적 가능성, 아동들의 요구, 그리고 교육 목적에 따라 크게 두 가지 단계로 나뉘는데, 8-9학년 단계와 10-11학년 단계이다. 물론, 학습자들은 수학 심화 교육과정을 8학년부터 시작할 수도 있고, 10학년부터 시작할 수도 있다. 그러므로, 심화 교육 과정의 각 단계에는 이미 배운 내용들에 대한 반복이 반드시 포함되어 있다.

8-9학년 단계의 수학 심화 학습은 방향 제시 및 설정의 성격이 강하다. 이 단계에서는 학습자들이 자신의 수학에 대한 흥미(관심)의 수준을 인식하고, 자신의 가능성에 대해 스스로 평가할 수 있도록 도와, 학습자들이 스스로 9학년에서 심화 교육과정에 따라 수학을 계속 공부해 갈 것인지, 아니면 일반 교육과정을 선택할 것인가를 판단하고 선택할 수 있도록 도와야 한다. 학생들의 수학에 대한 흥미나 수학적 지향성은 다각적인 방면에서 확고해지고 육성되어야 한다. 물론, 학생들이 수학에 대한 흥미를 잃거나 다른 분야로 진로의 방향을 바꾸면, 심화 학습 교육과정에서 일반 교육과정으로의 옮김이 보장되어 있다.

두 번째 단계인 10학년에서의 수학 심화 학습에서는 학습자들이 수학에 대해 어느 정도 강한 흥미가 있고, 학교 졸업 후 수학과 관련된 직업을 선택하려는 의지가 있는 경우를 전제로 한다. 이 단계에서는 학생들의 대학 진학 준비, 앞으로 더 수학을 연구할 것에 대한 준비, 그리고 높은 수준의 수학적 식견을 가질 수 있도록 보장해야 한다.

8-9학년의 수학 심화 교육과정은 “대수”와 “기하”로 나뉘어 제시되어 있는데, 그 내용과 수준, 그리고 학습 시간에서 일반 교육과정과 차이가 있다.

살펴본 바와 같이, 러시아의 7-9학년의 수학 교육과정은 크게 세 가지 유형으로 나뉘는데, 일반 학생들을 위한 교육과정 두 유형(제 1유형, 제 2유형)과 심화 학습 교육과정이다. 우선, 각 유형 별로 수학 학습 시간을 살펴보면, 다음과 같다.

※ 괄호 안에 제시된 수는 주당 시간 수를 의미한다.

학년	7 학 년		8 학 년			9 학 년		
유형	제 1유형	제 2유형	제 1유형	제 2유형	심화 학습	제 1유형	제 2유형	심화 학습
대수	1사분기(5) 나머지(3) 합계: 120	전체(4) 합계: 136	전체(3) 합계: 102	1학기(4) 2학기(3) 합계: 119	전체(5) 합계: 170	전체(3) 합계: 102	전체(4) 합계: 136	전체(5) 합계: 170
기하	2, 3, 4사분기(2) 합계: 50	전체(2) 합계: 68	전체(2) 합계: 68	1학기(2) 2학기(3) 합계: 85	전체(3) 합계: 102	전체(2) 합계: 68	전체(2) 합계: 68	전체(3) 합계: 102

이제, 각 유형별로 제시되는 수학 교육의 내용을 살펴보기로 하자.

III. 러시아의 7-9학년 수학교육 내용

1. 일반 학생들을 위한 교육 과정

일반 학생을 위한 7-9학년 교육과정은 제 1유형과 제 2유형으로 나뉘는데, 각 유형에 제시되는 대수와 기하 내용 각각을 살펴보기로 하자.

우선, 대수 내용을 살펴보자. 할당된 시간상으로 보면, 제 2유형에 제시된 시간이 제 1유형에서 제시된 시간보다 더 많았다. 한편, 두 유형의 내용을 비교해 보면, 제 2유형의 내용들은 제 1유형의 내용들을 완전하게 포함하면서, 추가적인 내용을 보충하고 있다. 그러므로, 본 연구에서는 제 1유형을 중심으로 기술하고, 제 2유형에만 관련된 내용(추가적으로 제시되는)들은 격자 괄호([ ]) 안에 썼다.

7학년 대수

1. 식과 변환. 방정식(19시간)[22시간]

수식. 변수를 포함한 식. 식의 간단한 변환. 미지수를 하나 포함하는 방정식. 방정식의 근. 미지수가 하나인 일차 방정식. 방정식을 세워서 문제를 풀기.

2. 함수(15시간)[18시간]

함수. 함수의 정의구역. 함수의 제시 방법. 함수의 그래프. 함수 $y=kx+b$와 그래프. 함수 $y=kx$와 그래프.

3. 자연수가 지수인 거듭제곱(18시간)[21시간]

자연수가 지수인 거듭제곱과 그 성질들. 단항식. 함수 $y=x^2$, $y=x^3$과 그래프. 양의 측정. 근사값의 절대 오차와 상대 오차.

4. 다항식(20시간)[23시간]

다항식. 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈. 다항식의 인수분해.

[제 1유형에서 항등식의 증명은 필수적인 것이 아니므로, 수학을 잘 하는 학생들에게 집에서 혼자 할 수 있는 숙제로 제시한다. 하지만, 제 2유형에서는 복잡하지 않은 항등식의 증명을 다룬다]

5. 곱셈 공식(20시간)[23시간]

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, 곱셈 공식을 인수 분해에 사용.

[공식 $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$은 제 2유형에서만 필수이다].

6. 일차 연립 방정식(19시간)[19시간]

연립 방정식. 두 개의 미지수를 가지는 두 일차 연립 방정식의 풀이와 그 기하학적 의미. 연립 방정식을 세워 문장제 문제를 풀기.

7. 복습과 문제해결(19시간)[10시간]

8학년 대수

1. 분수(22시간)[25시간]

분수. 기약 분수의 기본 성질. 분수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈.

분수의 변환. 함수 $y=\frac{k}{x}$와 그 그래프.

2. 제곱근(20시간)[24시간]

무리수의 개념. 실수에 대한 개념. 제곱근. 제곱근의 근사값. 제곱근 밖으로 인수 꺼내기와 넣기. $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$와 같은 식에서 분모의 유리화. 제곱근을 포함한 식의 변환. 함수 $y=\sqrt{x}$와 그 그래프.

3. 이차 방정식(23시간)[26시간]

이차 방정식. 이차 방정식의 근의 공식. 비에타 정리(근과 계수의 관계). 분수 방정식의 풀이. 이차 방정식과 간단한 분수 방정식을 세워 푸는 문제들.

[제 1유형에서는 비에타 정리의 증명이 필수적인 것이 아니고, 제 2유형에서는 증명을 다룬다]

4. 부등식(19시간)[19시간]

수의 부등식과 그 성질. 부등식끼리의 덧셈과 곱셈. 식의 값을 따지기 위해 부등식의 사용. 미지수가 하나인 일차 부등식. 미지수가 하나인 연립 부등식.

5. 지수가 정수인 거듭제곱(10시간)[17시간]

지수가 정수인 거듭제곱과 그 성질. 수의 표준형. 근사값의 표기. [근사값의 계산]

6. 복습과 문제해결(8시간)[8시간]

9학년 대수

1. 이차함수(27시간)[28시간]

함수. 증가 함수와 감소 함수. 기함수와 우함수. 이차 삼항식의 인수분해. 이차 삼항식을 완전 제곱꼴로 바꾸어 인수분해하기. 함수 $y=ax^2+bx+c$의 성질과 그 그래프. [함수 그래프의 간단한 변환]. 변수가 하나인 이차 부등식의 풀이. [구간 방법에 의한 분수 부등식의 풀이]

2. 방정식과 연립 방정식(22시간)[22시간]

방정식과 그 근. 인수 분해를 이용하거나 보조 변수를 도입하여 삼차와 사차 방정식의 풀이.

두 개의 변수를 가지는 방정식과 그 그래프. 원의 방정식. 하나는 일차 방정식이고, 다른 하나는 이차 방정식인 연립 방정식의 풀이. 연립 방정식을 세워 문장제 문제를 풀기. [두 개의 변수를 가지는 두 이차 연립 방정식의 풀이]

3. 수열(14시간)[18시간]

등차 수열과 등비수열. 수열의 일반항과 n항까지의 합의 공식. [무한 감소 등비 수열]

[**4. 지수가 유리수인 거듭제곱**(18시간)]

[함수 $y=x^n$의 성질과 그 그래프. n제곱근과 그 성질. 지수가 유리수인 거듭제곱과 그 성질]

5. 삼각함수를 포함한 식(19시간)[30시간]

각의 라디안 값. 임의의 각에 대한 사인, 코사인, 그리고 탄젠트. 삼각함수의 기본 항등식들: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. 식의 계산과 변환에 항등식들을 사용하기. $\frac{\pi}{2}<\alpha<2\pi$ 에 대한 삼각함수 값. [사인과 코사인의 합, 차의 공식과 그 활용].

6. 복습과 문제해결(20시간)[20시간]

제 1유형과 제 2유형의 대수 내용들을 비교하여 보면, 가장 큰 차이는 학습 시간의 수이며, 학습 내용적으로 보면, 제 2유형에서는 증명을 필수적으로 요구하는 반면, 제 1유형에서는 그렇지 않았다. 한편, $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$, 근사값의 계산, 무한 감소 등비 수열, 그리고 사인과 코사인의 합, 차의 공식과 그 활용 등을 포함하는 몇몇 내용들이 추가적으로 제시되어 있어 학습자들에게 좀 더 심화된 학습의 가능성을 제공하고 있다.

이제, 기하의 내용을 살펴보자. 기하는 학년 별로 내용의 차이가 크기 때문에, 그 내용들을 대수에서처럼 비교하기가 어렵다. 그러므로, 각 학년별로 제 1유형, 제 2유형을 병치하여 제시할 것이다.

<7학년 기하>

제 1유형	제 2유형
1. 기하학의 기초 개념(11시간) 평면 기하학의 기초 개념. 기하학적 도형. 직선. 반직선. 선분. 선분의 길이와 그 성질. 각. 각의 크기와 그 성질. 삼각형. 선분의 합동. 각의 합동. 삼각형의 합동. 인접각과 맞꼭지각. 그들의 성질. 직교하는 직선들 **2. 삼각형의 합동**(21시간) 삼각형의 합동 조건. 삼각형의 중선, 이등분선, 높이. 이등변 삼각형과 그 성질 작도의 기본 문제들: 세 변이 주어진 삼각형, 주어진 각과 같은 각, 선분의 이등분. **3. 삼각형의 각의 합**(14시간) 평행인 직선들. 평행인 직선들의 기본 성질. 직선들의 평행 조건. 삼각형의 각의 합. 삼각형의 외각. 직각 삼각형의 합동 조건. 점과 직선 사이의 거리. 평행인 직선들 사이의 거리 **4. 복습. 문제해결**(4시간)	**1. 기하학의 기초 개념**(11시간) 기하학적 도형. 직선. 점. 반직선. 반평면. 선분. 선분의 길이와 그 성질. 각. 각의 크기와 그 성질. 삼각형. 선분의 합동. 각의 합동. 삼각형의 합동. 교차하는, 그리고 평행하는 직선들. 인접각과 맞꼭지각. 그들의 성질. 직교하는 직선들. **2. 삼각형의 합동**(25시간) 삼각형의 합동 조건. 이등변 삼각형과 그 성질. 삼각형의 높이, 이등분선, 중선. **3. 삼각형의 각의 합**(13시간) 직선의 평행 조건. 평행인, 그리고 직교하는 직선에 관한 정리. 삼각형의 각의 합. 삼각형의 외각. 직각 삼각형의 합동 조건. 평행인 직선들 사이의 거리. 점과 직선사이의 거리. **4. 기하학적 작도**(14시간) 원. 원의 접선과 그 성질. 선분의 수직 이등분선의 성질. 삼각형의 외접원. 각의 이등분선의 성질. 삼각형의 내접원. 컴파스와 자를 이용한 기본적인 작도 문제. **5. 복습. 문제해결**(9시간)

제 1유형에서는 기하의 학습이 2사분기부터 시작되기 때문에, 작도 문제를 삼각형의 합동 단원에서 간단히 제시하고 있는 반면, 제 2유형에서는 작도 문제에 대해서 특히 더 많은 시간을 배려하여 다루고 있다.

교육과정의 내용 전개에서 한 가지 주목할 사실은 두 유형 모두에서 삼각형의 합동을 배우고 나서 작도 문제를 다룬다는 점이다. 우리 나라에서는 이와 다른 전개 방법을 취하고 있다. 즉, 중학교 1학년에서 작도 문제를 다루며, 이 작도를 이용해 삼각형의 결정 조건을 유도하고, 이를 통해 삼각형의 합동 조건을 증명없이 직관적으로 받아들이도록 하고 있다.

<8학년 기하>

제 1유형	제 2유형
1. 원(6시간) 원. 원의 접선과 그 성질. 선분의 수직 이등분선의 성질. 삼각형의 외접원. 각의 이등분선의 성질. 삼각형의 내접원. **2. 사각형**(22시간) 사각형의 정의. 평행사변형과 그 성질. 평행사변형의 조건. 직사각형. 마름모. 정사각형과 이들의 성질. 팔레스의 정리. 삼각형의 중간선(두 변의 중점을 연결한 선분). 사다리꼴. 사다리꼴의 중간선. 비례하는 선분들 **3. 피타고라스의 정리**(22시간) 직각 삼각형의 예각의 사인, 코사인, 탄젠트. 피타고라스의 정리. 좌표 평면에서 두 점 사이의 거리. 삼각 부등식. 직선에 대한 수선과 경사선. 직각 삼각형의 변들과 각 사이의 관계. 각 30°, 45°, 60° 의 삼각함수 값. **4. 이동**(13시간) 이동. 이동의 성질. 점대칭. 선대칭. 회전. 평행이동과 그 성질. 도형의 합동 개념. **5. 복습. 문제해결**(5시간)	**1. 사각형**(23시간) 평행사변형과 그 성질. 평행사변형의 조건. 직사각형. 마름모. 정사각형과 그들의 성질. 사다리꼴. 삼각형과 사다리꼴의 중간선. **2. 피타고라스의 정리**(22시간) 예각의 사인, 코사인, 탄젠트. 피타고라스의 정리. 직각 삼각형의 각과 변들 사이의 관계. 삼각 부등식. **3. 평면에서 데카르트 좌표**(17시간) 평면에서 직교 좌표계. 평면에서 좌표가 주어진 두 점 사이의 거리 구하는 공식. 직선과 원의 방정식. 0° 에서 180° 까지의 사인, 코사인, 탄젠트. **4. 이동**(8시간) 도형의 변환. 이동. 이동의 성질. 점대칭. 선대칭. 회전. 도형의 합동 개념. 평행이동과 그 성질. **5. 벡터**(10시간) 벡터. 벡터의 방향과 크기. 벡터의 좌표. 벡터의 합과 그 성질. 벡터의 실수 배와 그 성질. 벡터의 내적과 그 성질. 벡터를 축에 사영. 벡터를 단위 벡터로 분해하기. **6. 복습. 문제해결**(5시간)

이렇게 내용 제시 순서가 바뀐 이유는 작도 문제의 풀이 방법과 관련하여 찾아볼 수 있다. 우리 나라 교과서에 제시된 작도 문제의 풀이 방법을 보면, 작도를 위한 각 단계를 아무런 설명없이 제시하고, 학생들은 그것을 따라서 작도하게 되는데, 이때 왜 그렇게 그리는지, 그리고 과연 작도한 것이 참인지는 확인하지 않는다. 그러나, 러시아에서는 작도를 한 후에 반드시 작도 결과가 참인지, 거짓

인지를 엄밀하게 증명하도록 요구하는데, 이 과정에서 삼각형의 합동 조건이 쓰이기 때문이다.

<9학년 기하>

제 1유형	제 2유형
1. 벡터(12시간) 벡터의 개념. 벡터의 크기와 방향. 벡터의 좌표. 벡터의 합. 벡터의 실수 배. 벡터를 단위 벡터로 분할하기. 벡터의 내적. **2. 도형의 닮음**(18시간) 도형의 닮음 개념. 닮음 변환. 삼각형의 닮음 조건. 원주각. **3. 다각형**(16시간) 꺾인선. 볼록 다각형. 볼록 다각형의 각의 합. 정다각형. 정다각형의 내접원. 정다각형의 외접원. 정다각형의 성질. 원주. 수 π **4. 도형의 넓이**(12시간) 넓이의 개념. 정사각형, 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴의 넓이. 원과 부채꼴의 넓이. **5. 복습. 문제해결**(10시간)	**1. 도형의 닮음**(17시간) 닮음 변환의 개념. 도형의 닮음. 삼각형의 닮음 조건. 직각 삼각형의 닮음 조건. 원주각. **2. 삼각형의 풀이**(11시간) 사인 공식과 코사인 공식. 삼각형의 풀이. **3. 다각형**(12시간) 정다각형. 원주. 호의 길이. 수 π. **4. 도형의 넓이**(13시간) 넓이의 개념. 넓이의 기본 성질. 직사각형, 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴의 넓이. 닮은 도형들의 넓이 관계. 원과 부채꼴의 넓이. **5. 복습. 문제해결**(15시간)

9학년 기하의 제 1유형과 교육과정에 제시된 내용 자체를 비교하면, 제 2유형에서는 사인 공식, 코사인 공식 등을 배우고, 이를 활용하여 다양한 문제를 풀도록 하였는데, 제 1유형에서는 다루지 않고 있다.

살펴본 바와 같이, 7-9학년 기하학의 다른 주제들에 대한 시간을 비교해 보면, 제 2유형에 할당된 시간이 훨씬 많았지만, 삼각형의 풀이를 제외하고는 대부분 유사한 내용을 다루고 있다. 이것은 제 2유형에서 좀더 다양한 유형의 문제 풀이를 심도있게 다룬다는 의미로 해석할 수도 있다.

이러한 해석을 뒷받침하는 증거로 러시아 교과서를 들 수 있다. 러시아의 교과서에는 우리 나라의 교과서보다 훨씬 많은 양과 다양한 수준의 수학 문제들이 제시되고 있다. 예를 들어, 러시아에서 일반 학생들에게 가장 많이 사용되는 기하 교과서들 중의 하나인 빠가렐로프 A.V.(1993)의 교과서에서 "삼각형의 합동 조건" 단원을 보면, 52개의 연습 문제가 제시되어 있다(다른 교과서들도 이와 유사한 양의 연습 문제를 제시하고 있다). 이때, 제 1유형, 제 2유형 각각에 대해 교사는 할당된 시간에 비추어 적절하게 연습 문제를 선택하여 학생들에게 문제 해결의 경험을 제공할 것이다.

2. 심화 교육과정

심화 교육과정의 학습 내용들은 심화의 수준이나 주변 상황에 따라 다양한 수준에서 다루어질 수 있다. 심화 교육과정에 격자 괄호([ ]) 안에 제시된 내용들은 원한다면 다루지 않아도 된다. 그리고,

교육 과정에 별표(*)와 함께 표시된 내용들은 매우 난이도가 높은 내용들로써 상세한 설명이 필요하다. 그러므로, 평가에서 격자 괄호나 별표가 표시된 내용들은 포함시키지 않는다.

8학년 대수

1. 집합과 그 위에서의 연산(10시간)

집합. 집합의 원소. 공집합. 교집합과 합집합. 부분집합. 유한집합과 무한집합. 두 유한집합에서 합집합과 교집합의 원소의 수. 구간.

집합들 사이의 일대일 대응. [집합의 농도(cardinality). 비둘기 집의 원리]

2. 수의 나누어 떨어짐(12시간)

정수의 나누어 떨어짐. 나누어 떨어짐의 기본 성질. 나머지를 가지는 나누기. b가 자연수일 때, b의 배수를 나타내는 식. b로 나누어 나머지가 r인 수를 나타내는 식.

2, 3, 4, 5, 9, 11로 나누어 떨어지는 조건. 문제의 풀이.

3. 분수식의 변환(30시간)

다항식의 덧셈, 뺄셈, 그리고 곱셈. 곱셈 공식: 두 항의 세 제곱, 몇 몇 항을 가진 식의 제곱. 다항식에서 공통 인수를 묶어 인수분해. 세 제곱의 합과 차를 인수분해. $x^n - y^n$과 $x^{2k+1} + y^{2k+1}$의 인수분해. 식의 변환 문제.

분수. 분수의 기본 성질. 기약 분수. 통분하기. 분수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 그리고 거듭제곱. 분수식의 항등 변환.

4. 함수와 그래프(12시간)

함수. 함수의 표현 방법. 함수의 정의 구역과 치역. 함수에서의 기호들. 함수의 그래프. 그래프들의 간단한 변환(좌표축을 따라 평행 이동).

함수 $y = \frac{k}{x}$의 성질과 그래프. 점근선. 분수 함수와 그 그래프.

5. 실수(14시간)

자연수. 자연수 집합의 성질. 자연수의 집합에서 $a + x = b$꼴 방정식의 가해 조건. 빼는 연산. 정수. 정수 집합의 성질. 정수의 집합에서 $ax = b$꼴 방정식의 가해 조건. 나누는 연산.

유리수. 유리수 집합의 성질. 기약 분수와 무한 순환 소수의 형태로 유리수의 표현. 유리수의 집합에서 산술 연산의 닫힘성과 이 연산들의 성질.

선분들의 측정: 단위 선분과 측정 과정. 선분 측정의 결과로써 무한 소수. 무한 소수로써 실수. 직선의 점의 집합과 실수의 집합 사이의 일대일 대응. 비순환 소수의 예들. 무리수. 유리수 집합에서 $x^2 = 2$꼴 방정식의 비가해성.

실수의 근사값. 실수의 반올림. 실수 위에서 산술 연산에 대한 표상.

6. 제곱근(17시간)

제곱근. 제곱근의 존재 조건. 수 $\sqrt{2}$의 무리성. 제곱근의 근사값.

제곱근의 성질과 이것을 식의 변환에서 사용하기.

함수 $y=\sqrt{x}$의 성질과 그래프. $y=\sqrt{x-m}+n$꼴 함수의 그래프.

7. 분수 방정식(25시간)

이차 방정식. 근의 공식. 비에타의 정리와 이것을 문제해결에서 사용하기. 이차 방정식을 활용한 문제해결. 변수를 가지는 일차, 이차 방정식.

동치와 함의의 개념. 동치인 방정식들과 함의인 방정식.

분수 방정식. 분수 방정식의 풀이. 변수를 가지는 분수 방정식. 분수 방정식의 그래프적 해법.

8. 하나의 변수를 가지는 부등식(19-21시간)

부등식. 부등식의 증명. 일차 부등식, 일차 연립 부등식의 풀이.

절대값을 포함하는 부등식과 방정식의 풀이.

9. 지수가 정수인 거듭제곱(12시간)

지수가 정수인 거듭제곱과 그 성질. 수의 표준형. 근사값 계산.

10. 복습. 문제해결(17시간)

9학년 대수

1. 이차 삼항식(20시간)

이차 삼항식과 그 근. 이차 삼항식을 인수분해. 이차 삼항식을 완전 제곱식으로 변형시켜 문제를 풀기. 나머지를 가지는 다항식의 나눗셈. 다항식의 나누어 떨어짐. 인수 정리와 그 활용. 함수. 함수의 성질들과 그래프.

하나의 변수를 가지는 이차 부등식의 풀이. 구간에 의한 부등식의 풀이. 분수 부등식을 구간에 의해 풀기.

2. 방정식과 연립 방정식(22시간)

정수 방정식과 그 거듭제곱. 미지수가 하나인 삼차, 사차 방정식을 인수 분해와 보조 변수를 도입하여 풀기. 다항식의 유리 근을 찾기. 정수 방정식의 근을 찾는 특별한 방법들.

연립 방정식. 동치. 연립 방정식을 푸는 방법들: 대입, 가감, 보조 변수의 도입. 연립 방정식의 풀이.

문장제 문제의 풀이.

3. 함수와 그 성질. 그래프(18시간)

함수의 성질들: 기함수와 우함수, 증가 함수와 감소 함수, 최대값과 최소값, 함수값의 부호가 0인 곳과 부호가 변하지 않는 구간. 함수에 대한 기초적인 탐구. 그래프에 함수 특성을 나타내기.

함수 그래프의 변환: 좌표축에 대한 대칭, 직선 $y=x$에 대한 대칭. 구간별로 주어진 함수의 그래프 그리기. 절대값과 관련된 함수의 그래프. 분수 함수의 그래프 작도의 예.

함수 $y=[x]$와 $y=\{x\}$ 와 그래프.

4. 두 변수를 가지는 부등식과 연립 부등식(9시간)

두 변수를 가지는 부등식. 두 변수를 가지는 부등식의 해에 대한 기하학적 해석.

두 변수를 가지는 연립 부등식. 두 변수를 가지는 연립 부등식의 해에 대한 기하학적 해석.

5. 수열(20시간)

수열. 수열의 제시 방법. 일반항의 공식. 점화식. 피보나치 수열. (단조) 증가, 감소하는 수열.

등차수열. 등비수열. n항까지의 합. 무한 감소 등비 수열. 수열의 극한에 대한 개념.

수학적 귀납법. 문제해결에 수학적 귀납법 사용.

6. 유리수가 지수인 거듭제곱(25시간)

n제곱근. 제곱근의 성질.

분수가 지수인 거듭제곱과 그 성질. 분수가 지수인 거듭제곱과 무리수를 포함하는 식의 항등변환.

함수 $y=x^n$, $y=\sqrt[n]{x}$와 그 성질. 그래프.

무리 방정식, 무리 부등식의 풀이.

7. 삼각함수의 기초(26시간)

각의 측정. 라디안. 각의 라디안 값. 임의의 각의 사인, 코사인, 탄젠트. 사인 함수, 코사인 함수, 탄젠트 함수와 그 성질. [삼각함수의 그래프]. 삼각 항등식들: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. $\frac{\pi}{2}<\alpha<2\pi$에 대한 삼각함수 값.

두 각의 합과 차에 대한 사인, 코사인, 탄젠트. 2배각에 대한 사인, 코사인, 탄젠트.

반각 공식들. [삼각 함수들의 합을 곱으로, 곱을 합으로 변형시키기].

삼각 함수식의 항등변환.

8. 복습. 문제해결(30시간)

8학년 기하

1. 사각형(27시간)

다각형의 개념. 볼록 사각형. 평행사변형과 그 성질들. 평행사변형이 되는 조건. 직사각형, 마름모, 정사각형과 그들의 성질. 팔레스의 정리. 삼각형의 중간선. 사다리꼴과 그 성질. 사다리꼴의 중간선. 삼각형에서 몇 개의 점들(외심, 내심, 무게중심, 수심). 삼각형의 내접원과 외접원. 내접하는 사각형과 그 성질들

2. 피타고라스의 정리(22시간)

예각의 코사인. 피타고라스의 정리. 예각의 사인, 탄젠트, 코탄젠트. 직각삼각형의 각들과 변들 사이의 관계.

3. 평면에서 데카르트 좌표(20시간)

평면에서 직교 좌표계. 점들 사이의 거리 공식. 선분을 주어진 비로 나누기. 선분의 중점의 좌표.

직선과 원의 방정식. 방정식과 부등식에 의해 도형을 제시하기. *타원, 쌍곡선, 포물선과 그들의 방정식*. 문제 풀이에서 좌표를 사용하기. 0° 에서 180° 사이의 각에 대한 사인, 코사인, 탄젠트와 코탄젠트. 삼각함수의 변환 공식. 삼각 함수의 기본적인 항등식들.

4. 도형의 변환(22시간)

평면의 이동. 평면과 직선에 대한 대칭. 점대칭 도형들과 선대칭 도형들. 회전. 평행 이동. 도형의 합동과 그 성질. 문제 풀이에 평면의 이동 성질을 사용하기. 닮음. 닮음 변환과 그 성질. 삼각형의 닮음 조건. 닮은 도형의 요소들 사이의 관계. 주어진 도형과 닮음인 도형의 작도. 삼각형의 각의 이등분선의 성질. 직각삼각형과 원에서 길이의 관계. 문제 풀이에서 닮음의 사용.

5. 복습. 문제해결(11시간)

9학년 기하

1. 평면에서 벡터(20시간)

평행 이동. 문제 풀이에 평행이동의 사용. 벡터. 벡터의 길이와 방향. 벡터들의 합과 그 성질. 벡터의 실수 배와 그 성질. 평행인 벡터들. 벡터를 두개의 평행하지 않은 벡터로 나누기. 벡터의 좌표, 벡터들의 합, 벡터에 수를 곱하기. 벡터를 축에 사영. 벡터의 내적. 벡터를 문제 풀이에 사용하기.

2. 삼각형의 풀이(15시간)

코사인 정리. 사인정리. 삼각형의 풀이

3. 다각형(20시간)

볼록 다각형. 볼록 도형에 대한 개념. 정다각형. 정다각형의 작도. [정다각형에 의해 주어지는 변환군의 예. 곡선의 길이에 대한 개념]. 원의 둘레. 원의 호의 길이. 중심각의 크기. 원주각의 크기. 현과 접선 사이의 각. 원의 내부와 외부에 꼭지점을 가진 각들의 크기.

4. 도형의 넓이(25시간)

도형의 넓이와 그 성질. 등적성과 동질 분할[2]인 도형들. 직사각형의 넓이. 평행사변형의 넓이. 삼각형의 넓이. 사다리꼴의 넓이. 닮음도형의 넓이의 비. 다각형의 넓이. 정다각형의 넓이. 원과 부채꼴의 넓이.

5. 정리의 공리적 구성(7시간)

무정의 용어와 공리. 증명. 정리. 공리계의 비모순성. 공리계를 모델을 통해 구현. 유클리드 기하의 한 해석으로써 해석기하학. [기하학의 역사적 발달 단계: 유클리드의 '원론', 제 5공준을 증명하려 했던 시도들, 로바체프스키 기하학. 자연수의 공리적 구성. 간단한 정리들의 증명].

6. 복습. 문제해결(15시간)

---

2) 두 도형 A, B가 같은 수의 합동인 도형들로 각각 분할되면, 두 도형 A, B는 동질 분할 도형이라고 부른다.

Ⅳ. 결론

본 연구에서 러시아의 7-9학년 수학교육의 개별적 접근과 관련하여 몇 가지 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 다양한 유형의 교육과정을 융통성 있게 제시하는 것이다. 살펴본 바와 같이, 러시아의 7-9학년에서는 기본적으로 세 가지 유형의 교육과정(일반 학생들을 위한 수학교육과정 제 1유형, 제 2유형, 수학 심화 교육과정)을 제시하고 있다. 각 유형들에 대해, 일부 내용들은 교사가 학생들의 흥미나 재능, 수학적 발전 상태를 진단하면서 융통성 있게 제시할 수 있도록 보장되어 있다.

교육과정에서 이처럼 다양한 가능성을 제시하는 것은 우리 나라의 제 7차 교육과정과도 일맥 상통하는 면이 있다고 할 것이다. 러시아에서는 다양한 유형과 수준의 교육과정들을 통해 학습자들의 개별적인 특성이나 흥미를 고려하는 것을 "외적 차별화"라고 부르며, 이미 오래 전부터 많은 연구들이 있었다.

둘째, 일반 학생을 위한 교육과정의 다양화(제 1유형과 제 2유형)는 학습자에 대한 개별적 접근이라는 측면에서 커다란 의미를 지닌다. 우리 나라의 제 7차 수준별 교육과정을 살펴보면, 횡적인 개별적 접근이라고 할 수 있다. 즉, 1단계에서 10단계까지를 나누어 놓고, 각 단계 별로 학습자들이 수준에 맞게 교육받을 수 있도록 하였다. 그러나, 각 단계에서 학생들이 선택할 수 있는 가능성은 오직 하나 밖에 없다. 그러나, 러시아의 교육과정에서는 심화 학습 교육과정을 제외하고도 두 가지 유형의 접근이 가능하다.

일반 학생을 위한 제 1유형, 제 2유형의 대수 내용들을 비교하여 보면, 우선 가장 큰 차이는 학습 시간의 수이다. 제 1유형은 7-9학년에서 전체 324시간이 할당되었으며, 제 2유형에는 391시간이 할당되었다. 학습 내용적으로 보면, 제 2유형에서는 증명을 필수적으로 요구하는 반면, 제 1유형에서는 그렇지 않았다. 한편, $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$, 근사값의 계산, 무한 감소 등비 수열, 그리고 사인과 코사인의 합, 차의 공식과 그 활용 등을 포함하는 몇몇 내용들이 추가적으로 제시되어 있어 학습자들에게 좀더 심화된 학습의 가능성을 제공하고 있다.

기하 내용을 살펴보면, 제 1유형에서는 7-9학년의 3년 동안 186시간을 배우며, 제 2유형에서는 221시간을 배운다. 제 1유형과 제 2유형을 비교했을 때, 두드러진 것들 중의 하나는 작도 문제에 관한 것이다. 제 1유형에서는 7학년에서 기하 학습이 2사분기부터 시작되기 때문에, 시간적으로 여유롭지 못해, 작도 문제를 삼각형의 합동 단원에서 간단히 제시하고 있다. 반면, 제 2유형에서는 작도 문제에 대해서 특히 더 많은 시간을 배려하여 다룬다. 이것을 우리 나라의 수학 교육과정이나 교과서와 비교해 보면 큰 차이가 있다. 작도는 성공적인 기하 학습을 위해 매우 중요하다는 것을 감안하면, 작도 문제 자체에 대한 연구 뿐만 아니라, 작도 문제 해결 방법론에 대한 좀더 많은 연구가 필요하다.

셋째, 러시아의 수학 교육과정에서는 수학 영재아들의 잠재 능력 개발을 위한 가능성을 열어놓고 있다. 즉, 정규 교육과정 속에 심화 교육과정을 따로 둠으로써, 학습자들이 자신의 소질, 재능, 그리고 수학적 흥미에 맞게 수학 교육을 받을 수 있다. 이것은, 학습자 측면에서는 자신이 가지고 있는

수학적인 잠재적 재능을 개발, 육성할 수 있는 가능성을 보장받을 수 있으며, 수학 교육적 측면에서는 이러한 잠재 능력의 개발을 통해 대중적인 수학 수준을 높이며, 수학을 좋아하고 즐기는 수학 애호가의 층을 넓히는 역할을 한다.

우리는 보통 "수학 영재 교육"이라고 하면, 소수의 아동들을 선발하여, 수학 올림피아드를 포함하는 경시 대회에서 좋은 성적을 거두도록 하는 것을 주로 떠올린다. 그러나, 이러한 "엘리트 수학 선수"들에게만 우리 나라 수학의 발전을 의존할 수는 없다. 왜냐 하면, 다양한 수학 올림피아드에서 좋은 성적을 거둔 학생들이 모두 대학에서 수학을 전공하는 것은 아니기 때문이다. 그렇다면, 우리 나라도 수학 올림피아드를 포함하는 수학 영재 교육의 다양화가 필요하며, 이러한 측면에서 러시아에서 현재 실시되고 있는 심화 교육과정의 운영은 커다란 시사점을 준다고 할 수 있다.

넷째, 심화 교육과정의 성격 및 운영에 있어서 다양성이다. 심화 교육과정은 두 가지 단계로 나뉘는데, 제 1단계는 8-9학년, 제 2단계는 10-11학년이며, 학습자들은 8학년부터 시작할 수도 있고, 10학년부터 시작할 수도 있다. 첫 단계인 8-9학년에서는 학습자들이 자신의 수학에 대한 흥미(관심)의 수준을 인식하고, 자신의 가능성에 대해 스스로 평가할 수 있도록 도와, 학습자들이 스스로 9학년에서 심화 교육과정에 따라 수학을 계속 공부해 갈 것인지, 아니면 일반 교육과정을 선택할 것인가를 판단하고 선택할 수 있도록 도와야 한다. 물론, 학생들이 수학에 대한 흥미를 잃거나 다른 분야로 진로의 방향을 바꾸면, 심화 학습 교육과정에서 일반 교육과정으로의 옮김이 보장되어 있다.

두 번째 단계인 10학년에서의 수학 심화 학습에서는 학습자들이 수학에 대해 어느 정도 강한 흥미가 있고, 학교 졸업 후 수학과 관련된 직업을 선택하려는 의지가 있는 경우를 전제로 한다.

심화 교육과정에서 주목할 것 중의 하나는 심화 교육과정의 학습 내용들이 심화의 수준에 따라 다양한 수준에서 다루어질 수 있다는 것이다. 즉, 심화 교육과정에 격자 괄호([ ]) 안에 제시된 내용들이나, 별표(*) 속에 표시된 내용들은 매우 난이도가 높은 내용들로써 상세한 설명이 필요하며, 다루지 않을 수 도 있다. 물론, 평가에서는 격자 괄호나 별표가 표시된 내용들은 포함시키지 않는다.

참 고 문 헌

강문봉 (1998). 수학과 열린 교육의 실태와 문제점, <u>열린 수학교육의 이론과 실제</u>, 서울: 대한수학교육학회.

강옥기 (1997). 제 7차 교육과 교육과정 시안 연구, <u>대한수학교육학회논문집</u> 7(2), 서울: 대한수학교육학회.

교육부 (1998). <u>수학과 교육과정 [별책 8]</u>, 대한교과서주식회사.

류희찬 (1998). 탐구형 소프트웨어를 활용한 '열린' 수학교육, <u>열린 수학교육의 이론과 실제</u>, 서울: 대한수학교육학회.

백석윤 (1998). 열린 수학 수업 모델 구성을 위한 구조적 접근, <u>열린 수학교육의 이론과 실제</u>, 서울:

대한수학교육학회.
장경윤 · 권오남 · 최명례 (1997). 수학 교수-학습에서 수행평가의 의의와 활용 -채점 방법을 중심으로, 대한수학교육학회논문집 7(2), 서울: 대한수학교육학회.
한인기 (1999). 수학 교수-학습 과정의 차별적 접근의 기초. Math Festival 프로시딩 1, 서울: 수학사랑.
한인기 (1998). 러시아 수학교육의 최근 동향(개별화와 차별화), 대한수학회 뉴스레터 60.
한인기 · 현종익 (1998). 창의적 사고 형성을 위한 기본적인 사고 활동 유형, 한국초등수학교육학회지 2, 한국초등수학교육학회.
황혜정 (1999). 고등학교 수행평가, Math Festival 프로시딩 1, 서울: 수학사랑.

<러시아어 참고문헌>
러시아 연방 교육부 (1994). 초등학교(1-4학년) 교육과정, 모스크바: "교육"출판사.
러시아 연방 교육부 (1994). 중등학교(5-11학년) 교육과정, 모스크바: "교육"출판사.
러시아 연방 교육부 (1993). 초등학교(1-3학년) 교육과정, 모스크바: "교육"출판사.
빠가렐로프 A. V. (1993). 기하학: 7-11학년 일반 학교를 위한 교과서, 모스크바: "교육"출판사.