Journal of the Korean
Data & Information Science Society
1999, Vol. 10, No. 1, pp. 37 ~ 45

이변량 임의 중단된 이변량지수 모형에 대한 추론

조장식 [1] · **신임희** [2]

요 약

본 논문에서는 Marshall-Olkin의 이변량 지수모형을 따르는 두 부품의 수명들이 이변량 임의 중단된 자료로 관찰되는 경우를 생각한다. 이 경우 모수와 시스템 신뢰도에 대한 최우추정량을 구하고 근사적 정규성을 이용하여 두 부품의 수명에 대한 동일성 및 독립성 검정법을 제안한다. 그리고 모의실험을 통하여 제안된 추정량들과 검정법들의 유의확률을 계산한다.

주제어: Marshall-Olkin 모형, 이변량 임의중단모형, 최우추정량, 시스템 신뢰도.

1. 서론

두개의 부품이 병렬구조로 구성되어 있는 시스템을 생각할 때 두 부품의 수명시간을 X, Y 로 둔다면, X 와 Y는 일반적으로 서로 종속적인 확률변수로 가정하는 것이 현실적인 경우가 많다. 이는 두 개의 부품을 가지는 병렬체계에서 한 부품이 고장나면 고장난 부품이 분담하던 부하가 정상부품에 전가되어 정상부품의 고장률에 영향을 주게된다. 예를들어 사람의 양쪽 눈, 양쪽 콩팥 등 쌍으로 이루어진 시스템을 생각하면 각 쌍들의 수명은 서로 종속적인 관계가 있다. 이와같이 부품의 수명이 서로 종속관계에 있는 시스템의 수명시간에 대한 모형으로서 Marshall과 Olkin(1967)은 이변량 지수분포를 제안하면서 그 분포의 여러가지 중요한 성질을 밝혔다.

완전한 자료가 관찰되는 경우, Arnold(1968)는 이 모수들에 대한 점추정치를 계산 하였고, Bemis, Bain과 Higgins(1972) 그리고 Bhattacharyya와 Johnson(1973)은 두 부품의 수명 시간에 대한 고장률이 동일하다는 가정 하에서 독립성 검정법을 연구하였다. 그리고 Hanagal과 Kale(1991)은 고장률이 동일하다는 가정 없이 근사적 정규성을 이용하여 몇가지 독립성 및 동일성 검정법에 관한 연구를 하였다. 한편 두 부품에 대한 중단시간이 동일한 일변량 중단된 자료(univariate censored data)로 관찰되는 경우 그들은(1992) 모수에 대

[1]부산광역시 남구 대연동 110 경성대학교 통계정보학과, 608-736, 전임강사
[2]대구 광역시 남구 대명4동 3056-6 대구효성가톨릭대학교 의과대학 의학과 의학통계학교실 705-034 전임강사

한 최우추정량을 구하고, 근사적 독립성 및 동일성 검정법을 제안하였다.
그러나 현실적으로, 부품들의 수명이 실험자의 의도에 의해서 또는 실험환경의 제약에 의해서 두 부품에 대한 중단시간이 다른 이변량 임의 중단된 자료(bivariate censored data)로 관찰되는 경우가 많이 발생한다. 만일 두 부품의 중단 시간이 동일한 경우는 일변량 임의 중단모형이 되며, 임의중단시간들이 고정된 경우는 이변량 제 1종 중단모형이 되며, 이 경우 Cho and Kim(1997)은 $P(X < Y)$의 검정법을 연구하였다.

본 논문에서는 Marshall-Olkin의 이변량 지수모형을 따르는 두 부품의 수명이 이변량 임의 중단된 자료(bivariate random censored data)로 관찰되는 경우, 모수들에 대한 최우추정량을 구하고 그 추정량의 근사적 정규성을 밝힌다. 또한 시스템 신뢰도에 대한 최우추정량을 구하고 근사적 정규성과 근사적 신뢰구간을 구한다. 그리고 두 부품의 수명시간분포에 대한 동일성 및 독립성 검정에 대한 근사적 검정법을 제안한다. 몬테칼로 모의실험을 통하여 제안된 검정법과 추정량을 계산한다.

2. 모형의 개요 및 기호

X, Y를 Marshall과 Olkin의 이변량 지수모형을 따르는 두 부품의 수명시간이라고 하자. 그러면 결합 확률밀도함수$f(x,y)$는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\cdot exp(-\lambda_1 x - (\lambda_2+\lambda_3)y), & y > x \\ \lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\cdot exp(-(\lambda_1+\lambda_3)x - \lambda_2 y), & x > y \\ \lambda_3 \cdot exp(-\lambda x), & x = y. \end{cases} \tag{1}$$

여기서 λ_1, λ_2, λ_3 > 0이다. $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 이라 둔다면 λ_3/λ 는 이변량 지수분포에서 X 와 Y의 상관계수가 되고 $P(X = Y)$와도 같음은 잘 알려져 있다. 그래서 모수 $\lambda_3 = 0$인 것은 두 부품의 수명시간이 서로 독립인 것을 의미한다. 또한 $\lambda_1 = \lambda_2$인 것은 X와 Y의 주변분포가 동일하다는 것을 의미한다. 그리고 두 부품의 결합 생존함수 $\bar{F}(x,y)$ 는 다음과 같이 주어지며

$$\begin{aligned} \bar{F}(x,y) &= P(X > x\ ,\ Y > y)\ ,\ \ x,y \geq 0 \\ &= \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x,y)\},\ \ x,y \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

조건부 생존함수는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X|Y=y}(x) &= P(X > x | Y = y) \\ &= \begin{cases} \exp(-\lambda_1 x), & y > x \\ \lambda_2(\lambda_2+\lambda_3)^{-1}\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)x + \lambda_3 y), & x \geq y \end{cases}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{Y|X=x}(y) &= P(Y > y | X = x) \\ &= \begin{cases} \exp(-\lambda_2 y), & x > y \\ \lambda_1(\lambda_1+\lambda_3)^{-1}\exp(-(\lambda_3(y-x) - \lambda_2 y), & x \geq y \end{cases}, \end{aligned} \tag{4}$$

그리고 편의상 본 논문에서 사용되는 기호들을 소개하면 다음과 같다. $t_{x_i}(i=1,2,\cdots,n)$ X에 대한 i번째 관찰치의 중단시간(확률변수).
$t_{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$ Y에 대한 i번째 관찰치의 중단시간(확률변수).

$$C_{1i}=I(X_i>t_{x_i}),\quad C^*_{1i}=1-C_{1i},\ i=1,2,\cdots,n$$

$$C_{2i}=I(Y_i>t_{y_i}),\quad C^*_{2i}=1-C_{2i},\ i=1,2,\cdots,n$$

$$R_{1i}=I(X_i<Y_i),\quad R^*_{1i}=1-R_{1i},\ i=1,2,\cdots,n$$

$$R_{2i}=I(X_i>Y_i),\quad R^*_{2i}=1-R_{2i},\ i=1,2,\cdots,n$$

$$R_{3i}=I(X_i=Y_i),\quad R^*_{3i}=1-R_3i,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\underline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),\qquad \hat{\underline{\lambda}}=(\hat{\lambda_1},\hat{\lambda_2},\hat{\lambda_3}).$$

$\Theta=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\theta_1,\theta_2)^T$ 여기서 T는 벡터의 전치를 의미한다.
$\xrightarrow{d}$: 분포수렴.

3. 모수와 시스템 신뢰도에 대한 최우추정량

이변량 1종 중단된 자료가 관찰되는 경우, 각각의 부품들에 대해서 다음과 같은 세가지 경우가 발생할 수 있다.
(1) 두개의 부품들이 모두 관찰되는 경우 ($C^*_{1i}C^*_{2i}=1$).
(2) 하나의 부품만 관찰되고 다른 하나의 부품은 중단되는 경우($C_{1i}C^*_{2i}+C^*_{1i}C_{2i}=1$)
(3) 두개의 부품들이 모두 중단되는 경우($C_{1i}C_{2i}=1$).

그러면 부품들의 i번째 수명시간 $(x_i,y_i\ )$은 다음과 같이 관찰된다.

$$(x_i,y_i)\ =\ \begin{cases}(x_i,y_i),\quad x_i<t_{x_i}\ ,\ y_i<t_{y_i}\ (t_{x_i},y_i),\quad x_i>t_{x_i}\ ,\ y_i<t_{y_i}\\ (x_i,t_{y_i}),\quad x_i<t_{x_i}\ ,\ y_i>t_{y_i}\\ (t_{x_i},t_{y_i}),\quad x_i>t_{x_i}\ ,\ y_i>t_{y_i}\end{cases} \tag{5}$$

여기서 임의중단시간 t_{x_i}와 $t_{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$는 모수가 각각 θ_1,θ_2를 갖는 지수분포를 따르는 확률변수이며, 생존분포는 각각 $\bar{G}_1(t_x:\theta_1)$과 $\bar{G}_2(t_y:\theta_2)$이며 확률밀도함수는 각각 $g_1(t_x:\theta_1)$과 $g_2(t_y:\theta_2)$이며, $f(x_i,y_i)$ 와 $g_1(t_x:\theta_1)$과 $g_2(t_y:\theta_2)$는 서로 독립이라 가정하자. 그러면 $t_{x_i}=t_{y_i}$인 경우는 일변량 임의 중단모형이 되고, 중단시간 t_{x_i}와 $t_{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$이 미리 정해진 상수값이면 이변량 제1종 중단모형이 된다. 여기서 모수 θ_1,θ_2는 각각 모르는 값이다.
Θ에 대한 우도함수는 다음과 같이 계산되어진다.

$$
\begin{aligned}
L(\Theta) &= \prod_{i=1}^{n} \{[f(x_i, y_i) \cdot \bar{G}_1(t_{x_i}; \theta_1) \cdot \bar{G}_2(t_{y_i}; \theta_2)]^{C_{1i}^* C_{2i}^*} \cdot [\bar{F}(t_{x_i}, t_{y_i}) \cdot g_1(t_{x_i}; \theta_1) \cdot g_2(t_{y_i}; \theta_{2i})]^{C_{1i} C_{2i}} \\
&\quad \cdot [\bar{F}_{X|Y=y}(t_{x_i}) f_Y(y_i) \cdot g_1(t_{x_i}; \theta_1) \cdot \bar{G}_2(t_{y_i}; \theta_2)]^{C_{1i} C_{2i}^*} \\
&\quad \cdot [\bar{F}_{Y|X=x}(t_{y_i}) f_X(x_i) \cdot \bar{G}_1(t_{x_i}; \theta_1) \cdot g_2(t_{y_i}; \theta_2)]^{C_{1i}^* C_{2i}} \}^{(R_{1i}+R_{2i}+R_{3i})} \\
&= \lambda_1^{D_1} \lambda_2^{D_2} \lambda_3^{D_3} (\lambda_1 + \lambda_3)^{D_4} (\lambda_2 + \lambda_3)^{D_5} \exp[-\lambda_1 x_s - \lambda_2 y_s - \lambda_3 (x_s + y_s - t_s)] \\
&\quad \cdot \theta_1^{D_6} \cdot \theta_2^{D_7} \cdot \exp(-\theta_1 t_{1s} - \theta_2 t_{2s}) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

여기서 $D_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_{1i} C_{1i}^* C_{2i}^* + R_{2i}^* C_{1i}^* C_2 i)$, $D_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_{2i} C_{1i}^* C_{2i}^* + R_{1i}^* C_{1i} C_{2i}^*)$,

$D_3 = \sum_{i=1}^{n} R_{3i} C_{1i}^* C_{2i}^*$, $D_4 = \sum_{i=1}^{n} R_{2i} C_{1i}^*$, $D_5 = \sum_{i=1}^{n} (R_{1i} C_{1i}^* C_{2i}^* + R_{1i} C_{1i} C_{2i}^*)$,

$D_6 = \sum_{i=1}^{n} C_{1i}$, $D_7 = \sum_{i=1}^{n} C_{2i}$,

$x_s = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $y_s = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $t_s = \sum_{i=1}^{n} \min(x_i, y_i)$, $t_{1s} = \sum_{i=1}^{n} t_{1i}$, $t_{2s} = \sum_{i=1}^{n} t_{2i}$.

또한 로그-우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
\log L(\Theta) &= D_1 \log \lambda_1 + D_2 \log \lambda_2 + D_3 \log \lambda_3 + D_4 \log(\lambda_1 + \lambda_3) + D_5 \log(\lambda_2 + \lambda_3) \\
&\quad -\lambda_1 x_s - \lambda_2 y_s - \lambda_3 (x_s + y_s - t_s) + D_6 \log \theta_1 + D_7 \log \theta_2 - \theta_1 t_{1s} - \theta_2 t_{2s} \quad (7)
\end{aligned}
$$

따라서 (7)의 로그-우도함수를 모수들에 대해서 일차 편미분한 우도방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \log L(\Theta) = \frac{D_1}{\lambda_1} + \frac{D_4}{\lambda_1 + \lambda_3} - x_s = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \log L(\Theta) = \frac{D_2}{\lambda_2} + \frac{D_5}{\lambda_2 + \lambda_3} - y_s = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_3} \log L(\Theta) = \frac{D_3}{\lambda_3} + \frac{D_4}{\lambda_1 + \lambda_3} + \frac{D_5}{\lambda_2 + \lambda_3} - (x_s + y_s - t_s) = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \log L(\Theta) = \frac{D_6}{\theta_1} - t_{1s} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \log L(\Theta) = \frac{D_7}{\theta_2} - t_{2s} \qquad (12)$$

모수 $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$에 대한 최우추정량 $\hat{\underline{\lambda}} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)^T$은 위의 우도방정식 (8)-(10)을 뉴턴-랍슨과 같은 반복적 방법에 의해 얻을 수 있다. 그리고 (θ_1, θ_2)에 대한 최우추정량은 식(11)과 (12)에서 $\hat{\theta}_1 = D_6/t_{1s}$, $\hat{\theta}_2 = D_7/t_{2s}$ 로 얻을 수 있다.

따라서 $\sqrt{n}\,(\hat{\underline{\lambda}}-\underline{\lambda})$의 분포는 최우추정량의 성질에 의해, 표본의 크기가 커짐에 따라 근사적으로 평균벡터가 영이고 분산-공분산행렬이 $I^{-1}(\underline{\lambda})$인 다변량 정규분포를 따름을 알 수 있다 (Lehmann(1983), 6장 참조). 즉,

$$\sqrt{n}\,\left(\hat{\underline{\lambda}}-\underline{\lambda}\right) \ \xrightarrow{d}\ N\,(\underline{0}\ ,\ I^{-1}(\underline{\lambda})) \tag{13}$$

여기서 $I(\underline{\lambda}) = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\, logL(\underline{\lambda})\right] = ((I_{ij}));\quad i,j=1,2,3$ 이며

$$\begin{aligned}
&I_{11} = D_1/\lambda_1^2 + D_4/(\lambda_1+\lambda_3)^2,\ I_{12}=0,\quad I_{13} = D_4/(\lambda_1+\lambda_3)^2,\\
&I_{22} = D_2/\lambda_2^2 + D_5/(\lambda_2+\lambda_3)^2,\ \ I_{23} = D_5/(\lambda_2+\lambda_3)^2,\\
&I_{33} = D_3/\lambda_3^2 + D_4/(\lambda_1+\lambda_3)^2 + D_5/(\lambda_2+\lambda_3)^2
\end{aligned}$$

따라서 최우추정량의 불변성(invariance property)에 의해 어떤 시각 t(mission time)에서 시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량 $\hat{R}(t)$은 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{R}(t) = \exp[-(\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_3)t] + \exp[-(\hat{\lambda}_2+\hat{\lambda}_3)t] - \exp(-\hat{\lambda}t) \tag{14}$$

여기서 $\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2+\hat{\lambda}_3$.

한편 식 (13)와 Delta 방법을 이용한다면, $\sqrt{n}\,\left(\hat{R}(t)-R(t)\right)$의 분포는 n이 증가하면서 다음과 같은 근사적 정규분포를 따름을 알 수 있다(Lehmann(1983), 5장 참조). 즉,

$$\sqrt{n}\,\left(\hat{R}(t)-R(t)\right) \ \xrightarrow{d}\ N\,(0\ ,\ \Sigma\ ) \tag{15}$$

여기서 $\quad \Sigma = \left(\frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_1}, \frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_2}, \frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_3}\right)\cdot I^{-1}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\cdot\left(\frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_1},\ \frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_2},\ \frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_3}\right)^T,$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_1} &= -t\cdot\exp[-(\lambda_1+\lambda_3)t] + t\cdot\exp[-\lambda t],\\
\frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_2} &= -t\cdot\exp[-(\lambda_2+\lambda_3)t] + t\cdot\exp[-\lambda t],\\
\frac{\partial R(t)}{\partial\lambda_3} &= -t\cdot\exp[-(\lambda_1+\lambda_3)t] - t\cdot\exp[-(\lambda_2+\lambda_3)t] + t\cdot\exp[-\lambda t].
\end{aligned}$$

따라서 시스템의 신뢰도 $R(t)$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\left(\hat{R}(t) - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\hat{\Sigma}/n}\ ,\ \hat{R}(t) + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\hat{\Sigma}/n}\ \right) \tag{16}$$

여기서 $\hat{\Sigma} = \Sigma|_{\underline{\lambda}=\hat{\underline{\lambda}}}$ 이며 $z_{\alpha/2}$는 표준정규분포의 오른쪽 꼬리면적이 $\alpha/2$가 되는 값이다.

4. 동일성과 독립성 검정

우선 두 부품의 수명이 동일한 분포를 갖는가에 대한 근사적 검정법을 생각하자. 3장에서 식(13)의 근사적 정규성을 이용하여 동일성 검정을 할 수 있다. 즉, 귀무가설 $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$하에서 $\sqrt{n}\,(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)$는 평균이 0이고 분산이 $I^{11} + I^{22} - 2I^{12}$인 근사적 정규분포를 따른다는 것을 알 수 있다. 여기서 I^{ij}, $i, j = 1, 2, \cdots, 5$는 행렬 $I^{-1}(\Theta)$의 (i, j)번째 원소이다.
따라서 동일성 검정의 가설 $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ 대 $H_1 : \lambda_1 > \lambda_2$에 대한 검정법을 다음과 같이 제안한다.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)/\sqrt{\hat{I}^{11} + \hat{I}^{22} - 2\hat{I}^{12}} \ > \ z_\alpha \\ 0, & \text{그외.} \end{cases} \tag{17}$$

여기서 z_α는 표준정규분포의 오른쪽 꼬리면적이 α가 되는 값이며, $\hat{I}^{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$는 I^{ij}에서 λ_i 대신에 $\hat{\lambda}_i$를 대입한 값이다.
또한 가설 $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ 대 $H_1 : \lambda_1 < \lambda_2$에 대한 검정법을 다음과 같이 제안한다.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)/\sqrt{\hat{I}^{11} + \hat{I}^{22} - 2\hat{I}^{12}} \ < \ -z_\alpha \\ 0, & \text{그외.} \end{cases} \tag{18}$$

같은 방법으로 두 부품의 수명 분포에 대한 독립성 검정을 생각해 보자. 식(13)의 근사적 정규성을 이용하여, $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_3 - \lambda_3)$는 평균이 0이고 분산이 I^{33}인 근사적 정규분포를 따름을 알 수 있다. 따라서 가설 $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 > 0$에 대한 검정법을 다음과 같이 제안한다.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \cdot \hat{\lambda}_3/\sqrt{\hat{I}^{33}} \ > \ z_\alpha \\ 0, & \text{그외.} \end{cases} \tag{19}$$

5. 모의실험 및 결론

이 절에서는 앞절에서 제안한 추정량과 검정법을 몬테칼로 모의실험을 통하여 계산하고자 한다. 우선 Marshall-Olkin의 이변량 지수분포의 난수는 Friday와 Patil(1977)이 제안한 방법으로 표본의 크기는 30개 생성하였으며, 사용된 모수는 $\lambda_1 = 0.10$,$\lambda_2 = 0.30$,$\lambda_3 = 0.40$으로 하였다. 그리고 이변량 임의중단시간에 대한 분포로 지수분포의 모수가 $(\theta_1, \theta_2) = (0.03, 0.05)$인 경우를 사용하였으며, 관측된 자료는 < 표1 >과 같이 (x_i, y_i)의 모양으로 주어진다. 여기서 * 표시는 중단된 자료를 의미한다. 그리고 시스템 신뢰도에서 어떤 시각 t(mission time)의 값은 0.5로 하였다. 이 경우 시스템 신뢰도의 참값은 $R(t) = 0.8531$이 된다. 모수의 최우추정치는 $\hat{\lambda}_1 = 0.0741$, $\hat{\lambda}_2 = 0.2946$, $\hat{\lambda}_3 = 0.3357$이되며, 시스템 신뢰도에 대한 최우추정치는 $\hat{R}(t) = 0.8582$가 된다. 그리고 시스템 신뢰도에 대한 95% 신뢰구간은 식 (16)에 의해서 (0.7949 , 0.9215)로 계산될 수 있다.

한편 < 표1 >의 자료에 대한 동일성 검정을 위한 가설 $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ 대 $H_1 : \lambda_1 < \lambda_2$에 대한 검정을 하기 위해서 식(18)의 검정통계량의 값을 계산하면 -2.3946으로 유의확률(p-값)이 0.0083으로 유의수준 1%에서도 유의함을 알 수 있다. 그리고 독립성 검정을 위한 가설 $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 > 0$에 대한 검정을 하기 위해서 식(19)의 검정통계량의 값을 계산하면 4.3477로 유의확률이 거의 0.0000으로 유의수준 1%에서도 유의함을 알 수 있다.

표 1 이변량 임의중단시간이 지수분포인 경우 관측된 자료

i	(x_i, y_i)	i	(x_i, y_i)
1	(0.7602, 0.7602)	16	(4.0629, 7.4415)
2	(0.9377*, 2.9018)	17	(1.0008, 0.6272)
3	(0.3101, 0.2223*)	18	(0.5877, 1.3155)
4	(5.3236*, 1.872)	19	(1.5778, 0.2225*)
5	(2.1461, 1.7214)	20	(3.9643, 0.2978)
6	(5.9859, 5.9859)	21	(3.1665, 2.6937)
7	(2.6585, 2.4881)	22	(0.5182, 0.4380)
8	(5.8832, 2.1504)	23	(0.8180. 0.8180)
9	(1.1452, 0.2329)	24	(1.0926, 0.9004)
10	(2.1289, 0.8307)	25	(0.2332, 0.2332)
11	(2.9885, 0.8067)	26	(0.2388, 0.2388)
12	(1.5845*, 3.2029)	27	(0.4126, 0.4126)
13	(2.8414, 1.4195),	28	(3.8642, 3.8642)
14	(0.9213, 0.9213),	29	(1.1769, 1,1769)
15	(2.5498, 2.5498),	30	(0.2887*, 3.3189)

위에서 살펴본 바와 같이 임의중단시간이 각각 지수분포인 경우(이변량 임의중단된 자료를 갖는 경우)에 Marshall-Olkin의 이변량 지수모형에 대한 몇가지 추정량과 동일성 및 독립성 검정법을 제안하였다. 임의중단시간이 동일한 경우($t_{x_i} = t_{y_i}$)는 일변량 임의 중단된 자료를 갖는 모형이 되며, 또한 임의중단시간 t_{x_i}, t_{y_i}의 값이 고정된 경우는 이변량 제1종 중단된 자료를 갖는 모형이므로, 제안된 방법은 이러한 모형의 확장된 경우로서 그 의미를 찾을 수 있다. 또한 위에서 제안한 이변량 임의중단 자료를 갖는 이변량 지수모형의 시스템 신뢰도와 동일성 및 독립성 검정법이 타당성이 있음을 알 수 있다. 또한 다양한 모수들의 값과 표본의 크기에 대해서 제안된 추정량과 동일성 및 독립성 검정법의 비교와 다른 종류의 이변량 지수모형에 대해 적용하여 비교 것은 향후의 과제로 남겨둔다.

참고문헌

1. Arnold, B.C.(1968). Parameter Estimation for a Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 848-852.

2. Bemis, B.M., Bain, L.T. and Higgins, J.J.(1972). Estimation and Hypothesis Testing for the Parameters of a Bivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 67, 927-929.

3. Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R.A.(1973). On Test of Independence in a Bivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 68, 704-706.

4. Cho, J.S. and Kim, H.J(1997). The Reliability Estimation of Parallel System in Bivariate Exponential Model : Using Bivariate Type I Censored Data, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, 25(4), 79-87.

5. Friday, D.S. and Patil, G.P.(1977). A Bivariate Exponential Model with Applications to Reliability and Computer Generation of Random Variables, *The Theory and Applications of Reliability, ed. Tsokos, C.P. abd Shimi, I.N., Academic*, 527-549.

6. Hanagal, D.D. and Kale, B.K.(1991). Large Sample Tests for Testing Symmetry and Independence in Some Bivariate Exponential Models, *Communication in Statistics Theory and Methods*, 21(9), 2625-2643.

7. Hanagal, D.D. and Kale, B.K.(1992). Some Inference Results in Bivariate Exponential Distributions Based on Censored Samples, *Communication in Statistics Theory and Methods*, 21(5), 1273-1295.

8. Marshall, A.W. and Olkin, I.(1967). A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.

Inference for Bivariate Exponential Model with Bivariate Random Censored Data

Cho, Jang Sik [3] · **Shin, Im Hee**[4]

Abstract

In this paper, we consider two components system having Marshall-Olkin's bivariate exponential model. For the bivariate random censorship, we obtain maximum likelihood estimators of parameters and system reliability. And we propose the methods of homogeniety and independence tests using asymptotic normality. Also we compute the estimators and p-values of the testings through Monte Carlo simulation.

Key Words and Phrases: Marshal-Olkin's model, bivariate random censored model, maximum likelihood estimator, system reliability.

[3]Full-time Instructor, Department of Statistical Information Science, Kyungsung University, Pusan, 608-736, Korea

[4]Full time Instructor, Division of Medical Statistics, School of Medicine, Catholic University of Taegu-Hyosung, Taegu, 705-034