

등분포 축하중을 받고 첨가질량이 재하된 적층복합판의 고유진동수

Natural Frequencies of Laminated Composite Plates Attached Point Mass Under an Uniform Axial-Loading

박 제 선* 홍 창 우** 이 정 호** 이 주 형**
Park, Jae-Sean Hong, Chang-Woo Lee, Jung-Ho Lee, Joo-Hyung

Abstract

Vibration analysis for some of simple supported antisymmetric composite laminated plate loaded uniformly distributed axial force and attached mass was carried out. Because it is complicated to analysis this type of plate by theory of antisymmetric laminate, possibility for application of theory of special orthotropic laminate was studied, and natural frequency of laminated plate attached mass was calculated. Stiffness $B_{16}, B_{26}, D_{16}, D_{26}$ for this type of antisymmetric laminated plate converge on zero as the number of ply increases and it is possible to use classical theory by reason that considered plate has quasi-homogeneity without relevance to variation of angle. Difference between results by theory of antisymmetric and special orthotropic laminate is 0.36~1.96%, therefore it is convenient to analyze this by use of theory of special orthotropic laminate. When composite laminated plate with attached mass is analyzed range that was able to neglect self-weight of plate was proposed.

Keywords : *Antisymmetric composite laminated plate, Quasi-homogeneity*

1. 서론

복합재료는 부식에 대한 저항이 크고 경량이면서 고강도 일뿐만 아니라 충격 및 피로 하중에 강한 특성을 지니고 있어 우주, 항공분야 및 특수분야에 주로 사용되던 것이 점차 일반화되어 스포츠 용품 및 산업용품, 그리고 건축 및 토목 구조물에 이르기까지 그 응용범위가 점차 확대되어 가고 있는 추세이다. 복합재료 사용은 보강재 각도변화에 따른 최적화 설계가 가능하며, 공장제작이 가능하여 공기의 단축과 시공후 유지, 보수에 측면까지 고려한다면 기존 건설재료에 비하여 경제성에서 결코 뒤지지 않는다는 것이 일반적인 견해이다.[1] 특히 자중의 감소는 지진이나 기타 진동 발생시 그 무게비 만큼 감소된 관

성력을 받게 되어 구조물에 가해지는 동적 외력을 최소화 할 수 있는 장점을 가지고 있다. 그런데 복합재료는 소재 자체로서의 우수한 장점에도 불구하고 적극적인 활용이 아직 이루어지지 않고 있는데 그 이유는 보강섬유의 가격이 일반 건설재료에 비하여 고가라는 점과 복합재료의 이론이 일반 설계자들이 다소 다루기 쉽지 않다는 것이다.[2, 3]

그러나 금속 및 화학공학의 급속한 발달로 소재의 가격은 현저히 내려가고 있으며, 복합재료의 이론은 토목구조물과 같이 단면이 커지면 이론이 비교적 다루기 쉬운 특별직교 이방성 복합판의 이론으로 해석이 가능하다는 중요한 사실이 김덕현에 의해 입증되었다.[1, 3]

따라서 이 연구에서는 김덕현의 이론을 사용하여

* 강원대학교 토목공학과 교수, 공학박사

** 강원대학교 산업기술연구소 연구원

단순지지된 슬래브에 축하중이 작용할 때 침하질량 [6]의 영향을 분석하여 예비설계시 기초자료로 제공하고자 한다.

2. 단순지지된 적층복합판의 처짐

판의 네 변에 대한 경계조건이 단순지지인 경우 Navier의 해석 방법이 매우 효과적으로 적용될 수 있다. 즉, 경계조건을 만족시키는 횡처짐 $w(x, y)$ 와 재하된 횡 하중 $q(x, y)$ 를 Fourier급수로 확장 할 수 있으며, 경계 조건을 만족시키는 함수는 식(1)과 식(2)와 같이 가정될 수 있으며, 이러한 판의 평형방정식은 식(3)과 같다.[1]

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1)$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2)$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (3)$$

식(1)과 식(2)를 식(3)에 대입하면 주어진 m, n 에 대하여 식(4)로 나타낼 수 있다.

$$\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left[D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \times \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4)$$

식(4)에서 양변의 각 항을 비교하여 정리하면 식(5)와 같다.

$$w_{mn} = \frac{\left(\frac{q_{mn}}{\pi^4}\right)}{D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^4} \quad (5)$$

여기서 $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ 이다.

식(5)의 우변에 있는 하중의 진폭, q_{mn} 은 함수의 직교성(orthogonality)을 이용하여 식(2)로부터 식(6)과 같이 구할 수 있다.

즉, 식(2)의 양변에 $\sin(n\pi y/b)dy$ 를 곱하여 0에서 b 까지 적분된 방정식에 $\sin(m\pi x/a)dx$ 를 양변에 곱하여 0에서 a 까지 적분한다.

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (6)$$

주어진 하중 $q(x, y)$ 에 대하여 식(6)을 적분함으로써 식(2)에 있는 q_{mn} 을 대입하면 w_{mn} 을 구할 수 있다. 이것을 식(1)에 대입하면 단순 지지된 특별 직교형 적층 복합판에서의 수직 처짐을 구할 수 있다. 본 연구에서는 두가지의 하중조건, 등분포 하중과 집중하중에 대하여 예로서 적용하여 보았다.

첫째로, 그림 1과 같이 하중 $q(x, y)$ 가 전단면에 걸쳐 등분포 하중 q_0 로 재하되는 경우를 고려하면 다음 식(7)을 얻을 수 있다.

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (7)$$

그러므로 식(5)에 식(7)을 대입하면 등분포 하중 q_0 가 전단면에 재하된 경우의 처짐 $w(x, y)$ 는 식(8)과 같다.

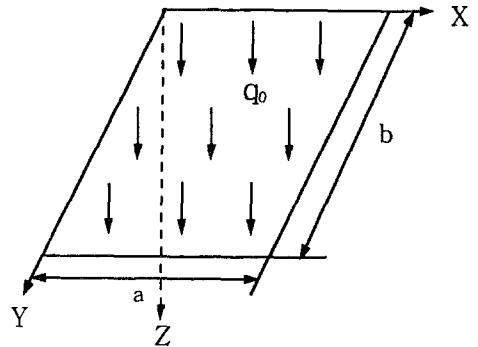


그림 1. 등분포 하중으로 재하된 적층복합판

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6} \times \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn \times DEN} \quad (8)$$

여기서,

$$DEN = D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^4 \text{이다.}$$

그림 2와 같이 등분포 축하중 P_1 과 P_2 가 수직하중 q 를 받고 판의 옆면을 따라 분포할 경우는 다음 식(9)와 같다.[4]

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 \times DEN} \quad (9)$$

여기서,

$$DEN = D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^4 + [P_1 \left(\frac{m}{\pi}\right)^2 + P_2 \left(\frac{n}{\pi}\right)^2] \text{ 이다.}$$

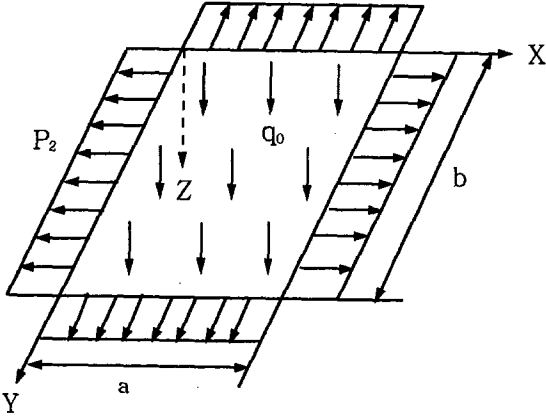


그림 2. 등분포 축하중 P_1 과 P_2 를 갖는 직충복합판

앞의 경우와 달리 단순지지된 특별 직교 적층복합판의 집중하중 P 를 받는다고 하자. 이때 집중하중 P 는 그림 3에서 나타낸 바와 같이 미소 직사각형 면적 uv 에 등분포 하중이 재하된 경우로 정의한다. 식(6)에서 q_{mn} 을 다음 식(10)으로 나타낼 수 있다.[1]

$$q_{mn} = \frac{4P}{abuv} \int_{\xi-u/2}^{\xi+u/2} \int_{\eta-v/2}^{\eta+v/2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

$$= \frac{16P}{\pi^2 mn uv} \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{2b}\right) \quad (10)$$

영향계수는 판에 주어진 점 $x=\xi$ 와 $y=\eta$ 에 집중하중 $P=1$ 이 작용할 경우이다. 집중 하중의 경우 $u \rightarrow 0, v \rightarrow 0$ 이다.

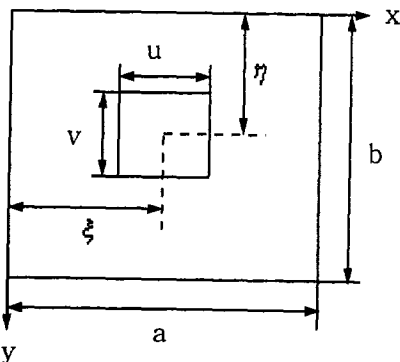


그림 3. 부분하중을 받는 단순지지된 직충복합판
 따라서, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = \theta$ 이므로

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) = \frac{m\pi u}{2a}$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \sin\left(\frac{n\pi v}{2b}\right) = \frac{n\pi v}{2b} \text{ 이다.}$$

이 결과를 식(10)에 대입하면 식(11)과 같다.

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \quad (11)$$

그러므로 식(1), 식(5) 그리고 식(11)을 정리하면 식(12)와 같이 집중하중이 재하된 특별 직교 적층복합판의 처짐, $w(x, y)$ 를 구할 수 있다.

$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 ab} \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (12)$$

식(12)에서 $P(\xi, \eta)$ 가 단위하중이라면 $w(x, y)$ 는 영향면을 나타낸다. 즉, 점 (ξ, η) 에서의 단위 하중으로 인한 점 (x, y) 에서의 처짐이다. 그러므로 영향계수, $\Delta(x, y | \xi, \eta)$ 는 다음 식(13)으로 표시된다.

$$\Delta(x, y | \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 ab} \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{DEN} \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right\} \quad (13)$$

$\Delta(x, y | \xi, \eta)$ 를 수학적으로 Green함수라고 한다.

Whitney 방정식에 의한 단순지지되고 집중하중 P 가 재하된 역대칭 적층복합판의 처짐은 식(14)와 같다.[5]

$$\bar{w}_{mn} = \bar{q}_{mn} \frac{R^4 b^4}{\pi^4 DEN} [(A_{11} m^2 + A_{66} n^2 R^2) (A_{66} m^2 + A_{22} n^2 R^2) - (A_{12} + A_{66})^2 m^2 n^2 R^2] \quad (14)$$

여기서, $R = a/b$

$$\bar{q}_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right),$$

$$DEN = [(A_{11}m^2 + A_{66}n^2R^2)(A_{66}m^2 + A_{22}n^2R^2) - (A_{12} + A_{66})^2m^2n^2R^2] \times [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4] + 2m^2n^2R^2(A_{12} + A_{66}) \times (3B_{16}m^2 + B_{26}n^2R^2) (B_{16}m^2 + 3B_{26}n^2R^2) - n^2R^2(A_{66}m^2 + A_{22}n^2R^2) (3B_{16}m^2 + B_{26}n^2R^2)^2 - m^2(A_{11}m^2 + A_{66}n^2R^2) (B_{16}m^2 + 3B_{26}n^2R^2)^2$$

3. 수치해석

수치해석에 사용된 적층판의 형상은 그림 4와 같이 $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 로 보강된 형태이다. 이때 각 층 (ply)의 두께는 0.00125m로 동일하며, $r=9(54\text{층})$ 일 때를 고려하였다. 해석에 사용된 물성은 $E_1=38.6\text{GPa}$, $E_2=8.27\text{GPa}$, $G_{12}=4.14\text{GPa}$, $\nu_{12}=0.26$, $\nu_{21}=0.0557$ 이다. 그림 5는 첨가질량에 대해서 나타낸 것으로서 Case-A는 축하중 P_1 , P_2 와 첨가질량 $P(i, j)$ 을 갖는 판이며, Case-B는 축하중 P_1 , P_2 , 첨가질량 $P(i, j)$ 와 등분포 하중 q 를 갖는 적층 복합판이다. 여기서, $P_1 = P_{11} \times D(1, 1)$, $P_2 = P_{22} \times D(1, 1)$ 을 나타내며, P_{11} , P_{22} 는 -0.5에서 0.5까지 0.1씩 증가시켰다. 첨가질량 $P(i, j) = N \cdot q \cdot a \cdot b$ 이며, N 은 하중매개변수로서 판의 자중에 대한 정수배를 의미하는 것이다. 또한 (i, j) 와 q 는 각각 첨가질량(mass · g)의 위치와 적층복합판의 등분포 하중($\rho \cdot h \cdot g$)을 나타낸다. 하중 작용점 (i, j) 는 그림 6과 같다.

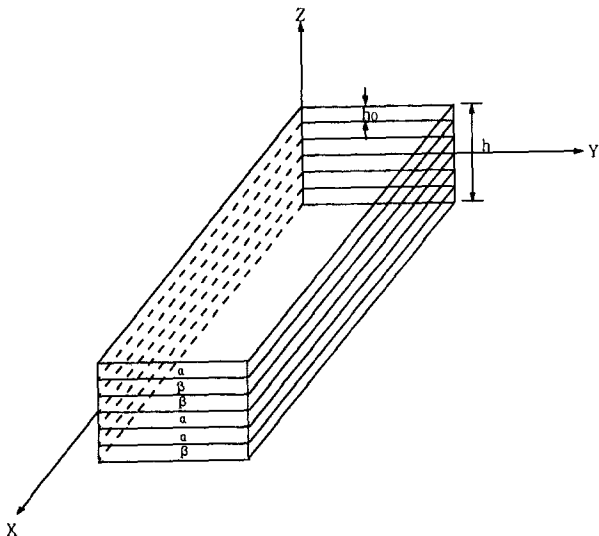


그림 4. $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 로 보강된 적층복합판 형상

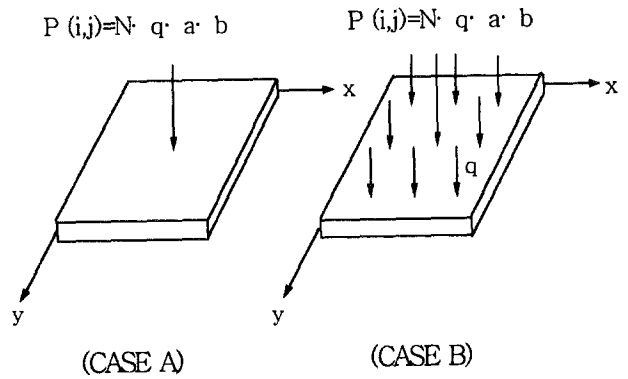


그림 5. 첨가질량의 영향

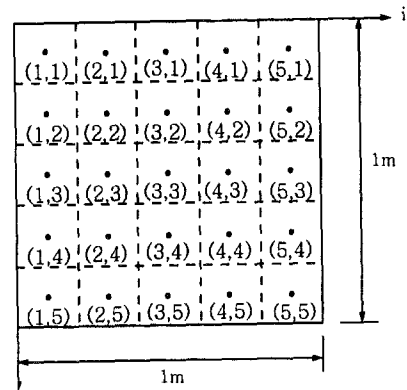


그림 6. 요소분할에 따른 하중작용점

4. 해석결과 및 고찰

4.1 적층수에 따른 강성분석

$[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 형태로 보강된 역대칭 적층복합판에 대하여 보강각도, $\alpha = -\beta$ 에 대하여 강성값을 계산하였으며, 적층수(r)를 1에서 27까지 증가시켜 층수 증가에 따른 강성값을 적층판의 두께를 단위두께로 했을 때 강성을 기준화(normalized)하여 비교하였다.

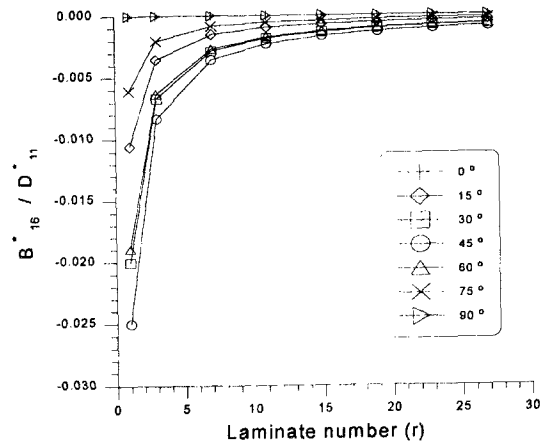


그림 7. 층수증가에 따른 강성비교 (B^*_{16} / D^*_{11})

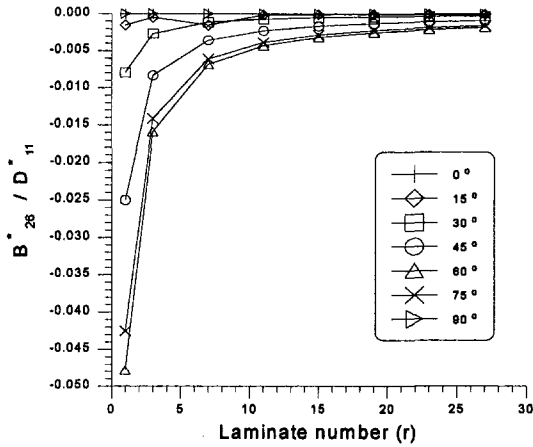


그림 8. 층수증가에 따른 강성비교 (B_{26}^* / D_{11}^*)

그림 7, 8에서와 같이 휨-전단과 팽창-뒤틀림 (twisting)을 발생시키는 B_{16} , B_{26} 항과 휨-뒤틀림을 발생시키는 D_{16} , D_{26} 항이 휨강성 D_{11} 값과 비교하였을 때 0에 수렴되었으며, 층수가 증가함에 따라 보강각도에 관계없이 $B_{ij} \approx 0$ 이 되었다. 그리고 D_{16}^* , D_{26}^* 항은 0이 되고, 층수에 관계없이 D_{11} 에 대한 B_{16}^* , B_{26}^* , D_{16}^* , D_{26}^* 의 값의 비율이 보강각도 0° , 90° 인 경우 즉 특별직교 이방성 형태로 보강된 경우는 0이 됨을 확인하였다. 이외의 보강각도에서도 층수가 증가됨에 따라 특별직교 이방성 형태로 나타남을 알 수 있었다. 따라서 역대칭 형태로 보강된 적층판에서도 층수가 증가함에 따라 특별직교 이방성 적층판으로 해석이 가능하다.

4.2 보강재 각도 변화에 따른 강성분석

적층판의 층수가 $54(r=9)$ 일 때 모든 보강각도 α , β 에 대하여 α 의 각도를 고정시키고, β 의 각도를 변화시킨 경우의 값으로서 B_{16}^* , B_{26}^* , D_{16}^* , D_{26}^* 을 D_{11}^* 과 비교하여 보강각도 0° , 15° , 30° , 45° 에 대한 결과는 그림 9~12와 같다. 모든 α , β 의 각도변화에 대하여 $(B_{16}^*, B_{26}^*)/D_{11}^*$ 은 0에 수렴되었지만 $(D_{16}^*, D_{26}^*)/D_{11}^*$ 의 값은 0에 수렴되지 않았다. 그러나 $\alpha = -\beta$ 인 경우의 보강각도에서는 모든 $(B_{16}^*, B_{26}^*, D_{16}^*, D_{26}^*)/D_{11}^*$ 값은 공학적으로 무시할 정도로 0에 수렴되었다. 또한 $A_{11}^*/D_{11}^*=1$ 이므로 고전이론의 사용이 가능하다.

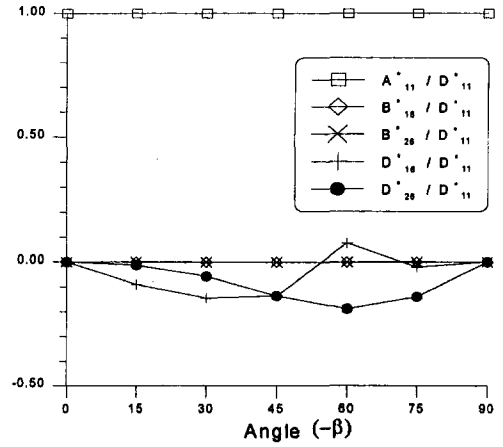


그림 9. 보강각도에 따른 강성비 (A_{11}^* , B_{16}^* , B_{26}^* , D_{16}^* , D_{26}^*)/ D_{11}^* ($\alpha=0^\circ$, $r=9$)

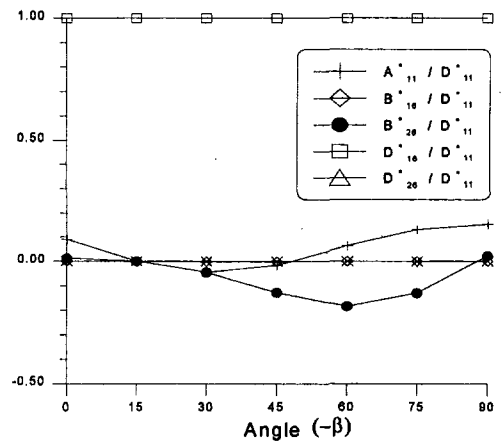


그림 10. 보강각도에 따른 강성비 (A_{11}^* , B_{16}^* , B_{26}^* , D_{16}^* , D_{26}^*)/ D_{11}^* ($\alpha=15^\circ$, $r=9$)

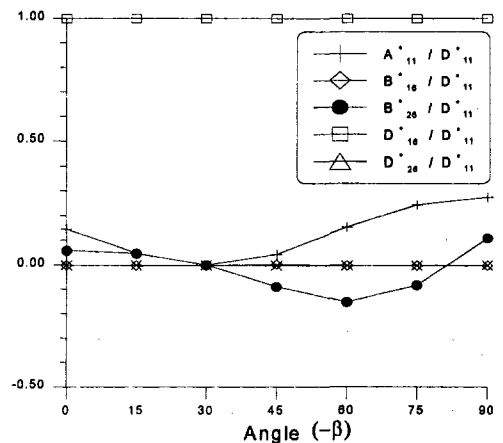


그림 11. 보강각도에 따른 강성비 (A_{11}^* , B_{16}^* , B_{26}^* , D_{16}^* , D_{26}^*)/ D_{11}^* ($\alpha=30^\circ$, $r=9$)

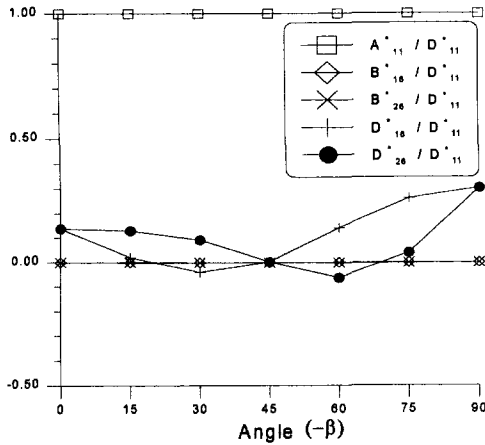


그림 12. $(A'_{11}*, B'_{16}*, B'_{26}*, D'_{16}*, D'_{26}*)/D'_{11}*$ ($\alpha=45^\circ, r=9$)

4.3 적층형태에 따른 처짐분석

역대칭 형태로 보강된 적층판에 대해서 Whitney에 의한 역대칭 적층판의 처짐값과 특별직교 적층판의 처짐값을 계산하여 표 1 및 그림 13에 비교하였다. Whitney에 의한 역대칭 적층판의 처짐 계산결과 값과 보강각도 $\alpha = -\beta$ 인 특별직교형 공식에 의한 처짐 해석결과는 0.36~1.96%의 차이만을 나타내었다. 본 연구에서 적용된 적층판의 보강재 각도 $30^\circ \sim 45^\circ$ 사이에서 직교이방성 적층판과 역대칭 적층판의 처짐이 일치하는 것으로 나타났다. 따라서 역대칭 적층복합판일지라도 비교적 쉽고 간편한 특별직교형 적층판으로 처짐계산이 가능하다.

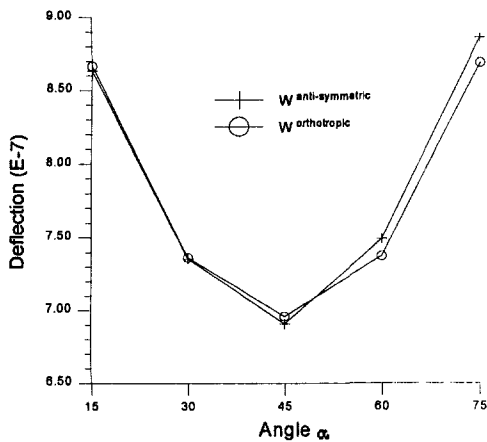


그림 13. 적층형태에 따른 처짐비교 ($\alpha = -\beta$)

4.4 첨가질량에 따른 고유진동수 영향

첨가질량이 적층복합판의 중앙점에 작용할 때, 하중매개변수 N을 1~20까지와 축하중 P_1, P_2 를 강성 $D(1,1)$ 의 $-0.5 \sim 0.5$ 배로 작용할때의 고유진동수를 계산하였다. 여기서 $D(1,1)=438781.969N \cdot m$ 이고, -0.5 는 판의 옆면을 따라 등분포로 압축 작용하는 것이

며, 0.5 는 판에 인장으로 작용하는 것을 의미하는 것이다. 보강재가 45° ($\alpha = -\beta$)로 보강된 적층복합판의 처짐 및 고유진동수를 계산한 결과 그림 14, 15와 같다. 임의의 등분포 축하중을 받는 판의 경우 축하중이 인장으로 크게 작용할수록 강성의 증가로 인해 처짐이 감소하는 경향을 나타내며, 이로 인해 고유진동수가 증가하였다. 반면, 축하중이 압축으로 작용할수록 강성의 감소로 인해, 처짐은 증가하였고 고유진동수는 감소하는 경향을 나타내었다. 표 2는 축하중의 변화에 따른 첨가질량이 중앙점에 재하되었을 때 고유진동수를 첨가질량만 재하된 경우(Case A)와 첨가질량과 적층판 자중을 동시에 고려한 경우(Case B)의 고유진동수의 결과를 비교한 것이다. 첨가질량이 판 중앙점에 적층판 자중의 배수로 재하되면 적층복합판의 자중을 무시하고 첨가질량만으로도 진동 해석이 가능함을 확인하였다.

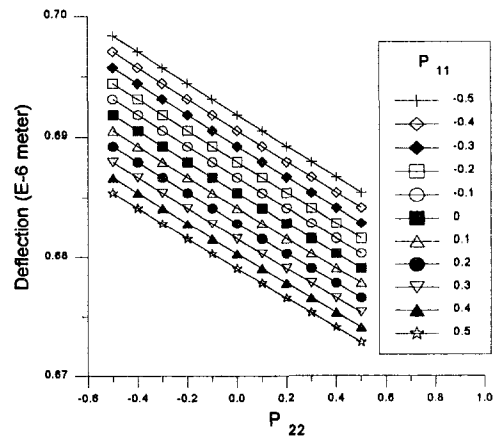


그림 14. $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_9$ 적층복합판의 처짐 ($\alpha=45^\circ, \beta=-45^\circ$)

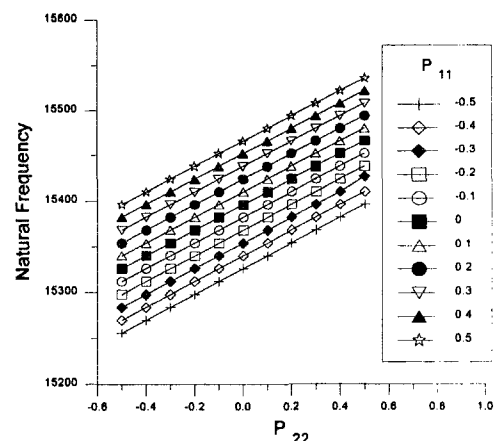


그림 15. $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_9$ 적층복합판의 고유진동수 ($\alpha=45^\circ, \beta=-45^\circ$)

5. 결론

등분포 축하중을 받고 첨가질량이 재하된 경우의 4변 단순지지된 역대칭 적층복합판에 대한 진동해석을 하였다. 축하중이 작용하는 역대칭 적층복합판의 해를 구하는 것이 어렵기 때문에 적층판의 층수의 증가, 보강재 각도에 따른 강성의 영향을 분석하여, 특별직교 이방성 적층판 이론의 적용가능성에 대하여 분석하였으며, 첨가질량이 재하된 적층판의 보강재 각도변화에 따른 고유진동수를 계산한 결과 다음과 같다.

1) 역대칭으로 적층된 판은 적층수가 증가됨에 따라 횡-전단 연계강성과 인장-비틀림 연계강성이 현저히 감소되며, 각도의 변화에 관계없이 유사균질성(Quasi-homogeneous)을 나타내었으므로 고전이론의 사용이 가능하다.

2) 수치해석에 사용된 적층복합판의 경우, 보강재 각도에 따라 역대칭과 특별직교형으로 치밀해석시 0.36~1.96%의 차이를 나타내므로, 진동해석시 특별직교 이방성 적층복합판 이론을 사용해 간편한 해석이 가능하다.

3) 첨가질량이 재하된 적층복합판의 진동해석시 판의 자중을 무시하고 첨가질량만을 고려하여 해석이 가능한 범위를 제시하였다.

참고문헌

- [1] Duk-Hyun Kim, *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E&FN SPON, 1995.
- [2] Duk-Hyun Kim, "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements", *JISSE-1*, Tokyo, Nov., 1989.
- [3] Duk-Hyun Kim, "Vibration Analysis of Laminated Thick Composite Plates", *3rd EASEC*, Shanghai, China, Apr., 1991.
- [4] Lekhnitskii, S. G., Tsai, S. W., Cheron, T., *Anisotropic Plates*, Gprdpm and Breach Science Publishers, 1968.
- [5] Whitney, J. M., "Bending-Extension Coupling in Laminated Plate under Transverse Loading", *J. Composite Materials*, Jan., 1969.
- [6] Pretlove, A. J., "A Simple and Accurate Method for Calculating the Fundamental Natural Frequencies of Beams with Attached Masses", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 15, No. 4, Ellis Horwood Ltd, Chichester, England, pp. 257~266, 1987.

표 1. 역대칭 적층판과 특별직교 이방성 적층판의 처짐비교 ($\alpha = -\beta$)

Angle Deflection	15	30	45	60	75
$W_{anti-symmetric}$	0.8634E-6	0.7356E-6	0.6906E-6	0.7490E-6	0.8861E-6
$W_{orthotropic}$	0.8666E-6	0.7364E-6	0.6958E-6	0.7374E-6	0.8687E-6
W_{anti}/W_{ortho}	1.0036	1.0011	0.9925	0.9845	0.9804

표 2. 첨가질량에 따른 고유진동수 [$P_1 = -0.5 \times D(1,1)$, $P_2 = -0.5 \times D(1,1)$]

Angle ($\alpha = -\beta$)	Classify	Loading parameter (N)								
		0	1	2	3	5	7	10	15	20
0	Case-A	-	5947.9	4205.8	3434.0	2660.0	2248.1	1880.9	1535.7	1330.0
	Case-B	12234.2	5380.8	4010.5	3326.5	2609.3	2217.3	1862.8	1525.8	1323.5
	B / A	-	0.9047	0.9536	0.9687	0.9809	0.9863	0.9904	0.9936	0.9951
15	Case-A	-	6255.3	4423.1	3611.4	2797.4	2364.2	1978.0	1615.1	1398.7
	Case-B	12884.1	5660.1	4218.7	3498.9	2744.4	2332.0	1959.1	1604.7	1391.9
	B / A	-	0.9049	0.9538	0.9689	0.9811	0.9864	0.9905	0.9936	0.9951
30	Case-A	-	6839.1	4835.9	3948.5	3058.5	2584.9	2162.7	1765.8	1529.2
	Case-B	14107.0	6189.9	4613.6	3826.2	3000.9	2549.9	2142.1	1754.6	1521.9
	B / A	-	0.9051	0.9540	0.9690	0.9812	0.9865	0.9905	0.9937	0.9952
45	Case-A	-	6866.9	4855.6	3964.6	3070.9	2595.4	2171.5	1773.0	1535.4
	Case-B	14171.1	6215.5	4632.7	3841.9	3013.2	2560.3	2150.9	1761.8	1528.1
	B / A	-	0.9051	0.9541	0.9691	0.9812	0.9865	0.9905	0.9937	0.9952
60	Case-A	-	6894.7	4875.2	3980.6	3083.4	2605.9	2180.2	1780.2	1541.7
	Case-B	14235.2	6241.1	4651.7	3857.6	3025.5	2570.7	2159.6	1768.9	1534.3
	B / A	-	0.9052	0.9541	0.9691	0.9812	0.9864	0.9906	0.9937	0.9952
75	Case-A	-	6360.8	4497.8	3672.4	2844.6	2404.1	2011.4	1642.3	1422.3
	Case-B	13126.2	5757.4	4291.1	3558.7	2791.1	2371.6	1992.3	1631.9	1415.5
	B / A	-	0.9051	0.9540	0.9690	0.9812	0.9865	0.9905	0.9937	0.9951
90	Case-A	-	6076.5	4296.7	3508.2	2717.5	2296.7	1921.5	1568.9	1358.7
	Case-B	12527.8	5499.2	4098.6	3399.2	2666.1	2265.5	1903.2	1558.9	1352.2
	B / A	-	0.9050	0.9539	0.9689	0.9811	0.9864	0.9905	0.9936	0.9952

표 3. 첨가질량에 따른 고유진동수 [$P_1=0.5 \times D(1,1)$, $P_2=0.5 \times D(1,1)$]

Angle ($\alpha = -\beta$)	Classify	Loading parameter (N)								
		0	1	2	3	5	7	10	15	20
0	Case-A	-	6268.4	4432.4	3619.0	2803.3	2369.2	1982.2	1618.4	1401.6
	Case-B	12968.6	5675.9	4230.2	3507.8	2750.9	2337.4	1963.5	1608.2	1395.0
	B / A	-	0.9055	0.9544	0.9693	0.9813	0.9866	0.9906	0.9937	0.9953
15	Case-A	-	6531.0	4618.1	3770.7	2920.7	2468.5	2065.2	1686.3	1460.3
	Case-B	13518.4	5914.3	4407.8	3655.0	2866.3	2432.4	2045.8	1675.6	1453.4
	B / A	-	0.9056	0.9545	0.9693	0.9814	0.9866	0.9906	0.9937	0.9953
30	Case-A	-	7027.9	4969.4	4057.5	3142.9	2656.3	2222.4	1814.6	1571.4
	Case-B	14543.8	6364.0	4743.2	3933.1	3084.4	2620.7	2201.5	1803.1	1564.0
	B / A	-	0.9055	0.9545	0.9693	0.9814	0.9866	0.9906	0.9937	0.9953
45	Case-A	-	7000.8	4950.3	4041.9	3130.8	2646.1	2213.9	1807.6	1565.4
	Case-B	14481.0	6339.1	4724.6	3917.8	3072.4	2610.6	2193.0	1796.2	1558.0
	B / A	-	0.9055	0.9544	0.9693	0.9813	0.9866	0.9906	0.9937	0.9953
60	Case-A	-	6973.7	4931.2	4026.3	3118.7	2635.8	2205.3	1800.6	1559.3
	Case-B	14418.2	6314.1	4706.0	3902.4	3060.4	2600.4	2184.4	1789.2	1551.9
	B / A	-	0.9054	0.9543	0.9692	0.9813	0.9866	0.9905	0.9937	0.9953
75	Case-A	-	6429.2	4546.1	3711.9	2875.2	2430.0	2033.0	1660.0	1437.6
	Case-B	13283.4	5820.4	4337.9	3597.4	2821.3	2397.2	2013.8	1649.4	1430.7
	B / A	-	0.9053	0.9542	0.9692	0.9813	0.9865	0.9906	0.9936	0.9952
90	Case-A	-	6145.1	4345.2	3547.9	2748.1	2322.6	1943.2	1586.6	1374.0
	Case-B	12685.1	5562.4	4145.7	3438.0	2696.4	2291.2	1924.7	1576.5	1367.5
	B / A	-	0.9052	0.9541	0.9690	0.9812	0.9865	0.9905	0.9936	0.9953