

온도-엔탈피 관계를 이용한 응고과정의 유한요소 해석

조 성 수* · 하 성 규**

(1998년 7월 29일 접수)

Finite Element Analysis of Solidification Process Using the Temperature-Enthalpy Relationship

Seong Soo Cho and Sung Kyu Ha

Key Words: Phase Change(상변화), Latent Heat(잠열), Enthalpy Method(엔탈피법), Mushy Zone(2상 영역), Temperature-Enthalpy Relationship(온도-엔탈피 관계)

Abstract

A finite element method is developed for calculating the temperature and enthalpy distribution and accordingly the solid, liquid and mushy zone in a three-dimensional body subjected to any heat boundary conditions. The method concurrently consider both temperature and enthalpy for consideration of the latent heat effect, differently from other methods of using a special energy balance equation for solving a mushy zone. The developed brick element has eight nodes with one degree of freedom at each node. The numerical method and procedure are verified using the results of one and two dimensional analytic solutions and by other researchers. It is shown that the present method presents a consistent and stable results in either abrupt or ranged phase change problems. Moreover, the numerical results by the present method are hardly effected by the calculation time steps which otherwise are difficult to determine in most phase change problems. Finally, as a three-dimensional application, a "T"-shaped body of a phase change is presented and the temperature and enthalpy variation along the time are solved.

기호설명

c	: 비열	[J/kg°C]	q	: 열유속	[W/m ²]
c_l	: 액상 영역에서의 비열	[J/kg°C]	\dot{q}	: 경계면에 주어진 열유속	[W/m ²]
c_s	: 고상 영역에서의 비열	[J/kg°C]	t	: 시간	[sec.]
c^*	: 2상 영역(mushy zone)에서의 비열	[J/kg°C]	Δt	: 시간중분	[sec.]
h_c	: 대류열전달계수	[W/m ² °C]	x, y, z	: 직교좌표계	
k	: 열전도계수	[W/m°C]	C	: 열용량행렬	
k_l	: 액상 영역에서의 열전도계수	[W/m°C]	K	: 열전도행렬	
k_s	: 고상 영역에서의 열전도계수	[W/m°C]	F	: 열유동벡터	
n	: 단위 법선벡터		H	: 단위체적당 엔탈피	[J/m ³]
			L	: 단위질량당 잠열	[J/kg]
			L_v	: 단위체적당 잠열	[J/m ³]
			N_a	: 요소 각 절점에서 동대개	
				: 형상함수(a=1, 2, ..., 8)	
			Q	: 단위체적당 발생하는 에너지	[J/m ³ s]

* 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 회원, 한양대학교 기계공학과

T	: 온도	[°C]
T_a	: 요소 각 절점에서의 온도	[°C]
T_b	: 경계 온도	[°C]
T_i	: 초기 온도	[°C]
T_l	: 액상선 온도	[°C]
T_s	: 고상선 온도	[°C]
T_∞	: 외부 경계온도	[°C]
T^*	: 경계면에 주어진 온도	[°C]
ΔT	: 온도 증분량	[°C]
ΔT_m	: 상변화온도구간(mushy zone)	[°C]
ρ	: 밀도	[kg/m ³]
ξ, η, ζ	: 자연좌표계	
∇	: 구배 연산자	

1. 서론

주조제품 제작시 주형 내부에서의 주물의 응고, 물의 용해 혹은 응고, 또는 금속의 용접 등과 같이 어떤 물질이 열을 흡수하거나 방출함에 따라 발생하는 용해나 응고 같은 상변화(phase change) 문제는 비정상상태(unsteady state) 방정식을 해석하여야 한다. 그리고, 이러한 상변화 문제는 비선형의 문제로서 이에 대한 수치적 모델링 및 해석에 많은 관심이 기울어져 왔으며, 수치적 해를 구하기 위하여 여러 가지 방법이 제시되었다.

그런데, 상변화 문제는 고상에서 액상 또는 액상에서 고상으로 변화할 때, 즉 상의 변화가 생길 때 온도의 변화는 거의 없으나 고상과 액상사이의 열교환을 일으키는 잠열의 영향이 존재하기 때문에 이러한 열교환자로서의 잠열 처리 또한 중요한 문제가 된다.

일반적으로, 물과 같은 순수물질의 경우 용해점과 응고점이 일치하기 때문에 상변화가 하나의 특정 온도에서 일어나고 따라서 상경계면(phase interface)은 그 물질의 용해(용해)점을 기준으로 하나의 면으로 구해질 수 있다. 그리고, 이 경계면을 기준으로 잠열의 영향을 고려할 수 있다. 반면, 합금 등과 같은 비순수물질은 순수물질과 달리 용해점과 응고점이 일치하지 않아 상변화가 특정 온도구간에서 일어나기 때문에 상경계면이 하나의 면이 아닌 두개의 면(고상면, 액상면)으로 나누어지며 용해와 응고가 일어나는 상변화 온도구간에는 고상, 액상이 모두 존재하는 2상 영역

(mushy zone)이 된다. 그러므로, 2상 영역에서의 잠열의 영향을 고려하여야 한다.

본 연구와 관련하여 Rubinsky⁽¹⁾는 상경계면의 위치를 추적하면서 상경계면에서의 에너지 평형 방정식에 의하여 잠열의 영향을 고려하였다. 그러나, 상경계면을 찾기 위한 알고리즘이 필요할 뿐만 아니라 이 면을 매 시간마다 찾아야 한다는 단점이 있다. Morgan⁽²⁾은 열용량을 온도와 엔탈피의 구배를 이용하여 구하였다. 그러나, 이 방법은 절점에서의 온도변화가 상변화가 일어나는 온도 구간보다 클 경우 잠열의 영향이 무시될 수 있어 시간중분이 충분히 작거나 또는 상변화가 일어나는 구간에서는 요소수가 충분히 많아야 한다는 단점이 있다. 그리고, Roose⁽³⁾는 가상열유동법(fictitious heat flow)을 이용하여 상변화 문제를 해석하였다. 그리고, 이 방법을 이용함에 있어 수렴속도의 증가를 위하여 이완(relaxation)법을 이용하였다. 그러나, 수렴속도 증가를 위한 별도의 과정이 사용되지 않을 경우 수치적 불안정성의 위험이 따른다는 문제점이 있다.

본 연구에서는 엔탈피법을 기초로 상변화 온도 구간에서 비선형성을 가지는 비열(specific heat)을 온도의 함수이면서 선형성을 가지는 엔탈피로 변형시키는 물론, 유한요소정식화^(4,5)과정에서 자유도(degree of freedom)가 온도가 아닌 엔탈피로 바꾸는 기법을 이용하여 에너지방정식을 정식화하였다. 이는 엔탈피의 변화량과 온도의 변화량을 이용하여 비열의 값을 예측하는 과정이 포함되어 있는 기존의 엔탈피법⁽⁶⁻⁹⁾과 달리 비열을 내부적으로 포함하고 있는 선형의 엔탈피만을 계산함으로써 비선형 방정식이 아닌 선형 방정식을 이용하여 해를 구할 수 있다. 특히 이러한 일련의 과정에서 상변화가 한 점의 특정 온도에서는 물론 특정 온도구간에서 일어나더라도 엔탈피에 잠열의 영향이 고려되어, 상경계면에서 만족되어야 하는 에너지 평형조건을 확인하기 위한 별도의 평형식이 불필요할 뿐만 아니라 상경계면을 추적할 필요가 없다.⁽⁹⁻¹²⁾ 그리고, 고상과 액상의 실제영역을 각각 좌표변환에 의해 고정영역으로 변환한 후 고정영역상에서 문제를 푸는 계면고정방법⁽¹³⁾처럼 별도의 좌표변환식이 필요하지 않으며, 고상 영역과 액상 영역 그리고, 2상 영역에서 동일한 방정식으로 해를 구할 수 있다.

또한 시간해법으로 후방 Euler법(backward Euler

method)을 이용하였으며, 한 시간중분(time step)내에서의 비선형 반복 계산은 Newton-Raphson법을 이용하였다.⁽⁵⁾ 그리고, 요소당 8개의 절점과 각 절점에서 1개의 자유도를 갖는 육면체 요소들이 이용하였다.

2. 해석이론

2.1 열전달 이론

본 연구에서 이용한 3차원 비정상상태(unsteady state) 열전달 문제의 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^T k \nabla T + Q \quad (1)$$

여기서, ρ 는 밀도, c 는 비열, T 는 온도, Q 는 단위 체적당 발생하는 에너지이며, k 는 열전도계수이다. 그리고, 식 (1)과 같은 에너지 방정식은 온도 경계조건, 열유속 경계조건, 그리고/또는, 대류 경계조건을 가질 수 있으며, 이를 수식으로 표현하면 각각 다음과 같다.

$$T = T^* \quad (2)$$

$$n^T k \nabla T = q^* \quad (3)$$

$$n^T k \nabla T = h_c (T_\infty - T) \quad (4)$$

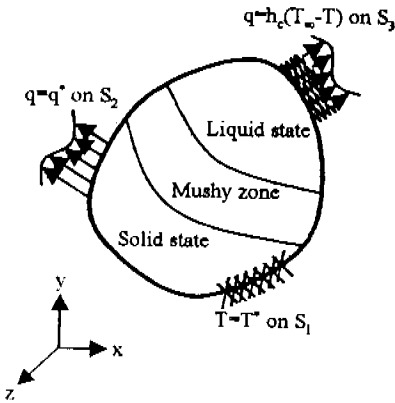


Fig. 1 Three-dimensional body of liquid, solid and mushy zone at an arbitrary time satisfying the external boundary conditions and the internal heat transfer equilibrium equation.

여기서, T^* 와 q^* 는 각각 경계면에 주어진 온도와 열유속을 나타내며, n 은 경계면에 수직하면서 면의 바깥을 향하는 단위 법선벡터, h_c 는 대류열 전달계수, 그리고, T_∞ 는 외부 경계온도이다.

Fig. 1에는 식 (2)~(4)로 표현되는 온도, 열유속, 그리고 대류 경계조건이 임의의 형상의 3차원 물체에 존재할 경우를 도시하였으며, 여기서 S_1 , S_2 그리고 S_3 는 각각 온도, 열유속, 그리고 대류 경계조건이 존재하는 임의의 위치의 영역을 나타낸다. 그리고, 물체 내부에서는 임의의 시간에 에너지 방정식을 만족하면서 액상, 고상 그리고 2상 영역(mushy zone)이 존재할 수 있다.

일반적으로 온도와 엔탈피의 중분관계식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta H = \rho c \Delta T \quad (5)$$

여기서, ΔT 와 ΔH 는 각각 온도의 증분량과 단위부피당 엔탈피의 증분량을 나타내며, Fig. 2(a)와 (b)에는 각각 순수물질에서와 비순수물질에서의 온도-엔탈피의 중분관계를 고상, 2상(mushy zone), 그리고 액상 영역에 대하여 도시하였으며, 2상 영역에는 잠열의 영향이 고려된 것이다. Fig. 2에서 L 은 단위 질량당 잠열(latent heat per unit mass)을, T_s 와 T_l 는 각각 고상선 온도(solidus temperature)와 액상선 온도(liquidus temperature)를 나타낸다.

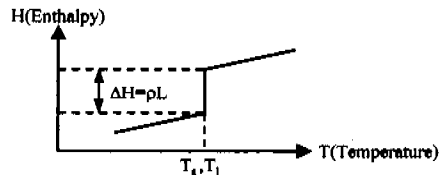


Fig. 2(a) Temperature-enthalpy relationship for a pure substance ($\Delta T_m = T_l - T_s = \text{zero}$).

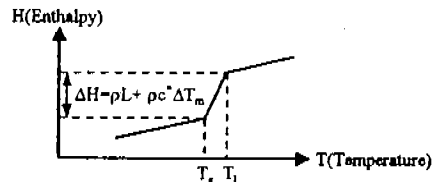


Fig. 2(b) Temperature-enthalpy relationship for an alloy ($\Delta T_m = T_l - T_s \neq \text{zero}$).

2.2 유한요소 정식화

3차원 비정상상태 열전달 문제의 유한요소해석을 위하여 요소당 8개의 절점과 각 절점에서 1개의 자유도를 가지는 육면체 요소를 개발하였다.

요소의 온도 T 를 8절점 요소의 형상함수(shape function)^(4,5)를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$T = \sum_{a=1}^8 N_a T_a \quad (6)$$

여기서, T_a 는 요소 각 절점($a=1,2,\dots,8$)에서의 온도를 나타낸다. 그리고, N_a 는 각 절점에서의 등매개형상함수(isoparametric shape function)를 나타내며, 이를 자연좌표계(natural coordinates; ξ, η, ζ)를 이용하여 표현하면 다음과 같다.^(4,5)

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_6 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_7 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_8 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (1)에 식 (2)~(4)의 경계조건과 Green 정리, 그리고, Galerkin법을 적용하고, 식 (6)과 (7)을 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_V \rho c N^T N dv \dot{T}^e + \int_V B^T k B dv T^e \\ &= \int_{S_2} N^T q^* dS_2 + T_\infty h_c \int_{S_3} N^T dS_3 \\ & \quad - h_c \int_{S_3} N^T N dS_3 T^e + Q \int_V N^T dv \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 N 은 요소 각 절점에서의 등매개형상함수를 나타내는 식 (7)을 요소로 하는 행벡터이며, B 는 N 의 구배(gradient)를 나타내며, $B = \nabla N$ 로 표현된다. 식 (8)을 간단히 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$C^e \dot{T}^e + K^e T^e = F^e \quad (9)$$

식 (9)에서 C^e 는 요소 열용량행렬(element heat capacity matrix), K^e 는 요소 열전도행렬(element heat conductivity matrix), 그리고, F^e 는 요소 열유동벡터(element heat flow vector)이며, 다음과 같이 정의된다.

$$C^e = \int_V \rho c N^T N dv \quad (10)$$

$$K^e = \int_V B^T k B dv + h_c \int_{S_3} N^T N dS_3 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F^e &= \int_{S_2} N^T q^* dS_2 + T_\infty h_c \int_{S_3} N^T dS_3 \\ & \quad + Q \int_V N^T dv \end{aligned} \quad (12)$$

식 (5)의 온도와 엔탈피 관계식을 식 (9)의 좌변 첫째 항에 적용하면, 식 (9)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{C}^e \dot{H}^e + K^e T^e = F^e \quad (13)$$

여기서, $\tilde{C}^e = \int_V N^T N dv$ 이다.

그리고, 식 (13)을 전체 요소에 대하여 합을 하면 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{C} \dot{H} + K T = F \quad (14)$$

여기서, $\tilde{C} = \sum_e \tilde{C}^e$, $K = \sum_e K^e$, $F = \sum_e F^e$ 이며,

H 와 T 는 각각 모든 절점에서의 엔탈피와 온도를 나타낸다.

식 (14)를 시간에 따라 계산할 때 비선형 관계식을 풀어야 한다. 비선형 관계식을 계산하기 위하여, 우선 식 (14)의 좌변항을 \dot{H} 와 T 의 함수인 h 로 치환하면, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h(\dot{H}, T) = F \quad (15)$$

시간이 임의의 시간증분, Δt ,만큼씩 증가한다고 할 때, 각각의 시간을 $t, 2t, \dots, mt, m+1t, \dots$ 로 표

시하자. 그리고, 임의의 시간 $m+1_t$ 에서 해의 수렴성을 위하여 하반복(subiteration)으로써 Newton-Raphson법을 이용할 때, 각 단계를 $m+1_t^1, m+1_t^2, \dots, m+1_t^{i-1}, m+1_t^i, \dots$ 로 표시한다고 하자.

식 (15)를 Taylor 급수전개하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} m+1_h^i &= m+1_h^{i-1} + \frac{\partial h^{i-1}}{\partial H} \Delta m+1_H^i \\ &\quad + \frac{\partial h^{i-1}}{\partial T} \Delta m+1_T^i \end{aligned} \quad (16)$$

$$= m+1_F$$

식 (16)에서 편미분항은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$m+1_{\tilde{C}}^{i-1} = \frac{\partial h^{i-1}}{\partial H} \quad (17)$$

$$m+1_{K}^{i-1} = \frac{\partial h^{i-1}}{\partial T} \quad (18)$$

식 (17)과 (18)의 관계식을 식 (16)에 적용하면, 식 (16)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} m+1_{\tilde{C}}^{i-1} \Delta m+1_H^i + m+1_{K}^{i-1} \Delta m+1_T^i \\ = m+1_F - m+1_h^{i-1} \end{aligned} \quad (19)$$

$$= m+1_R^i$$

여기서, R 은 불평형 에너지(residual energy)를 나타낸다.

식 (5)와 같이 온도와 엔탈피의 중분관계가 주어졌을 때, 그 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta T = S \Delta H \quad (20)$$

여기서, S 는 온도와 엔탈피의 관계를 나타내는 계수행렬이다.

시간해법으로 후방 Euler법(backward Euler method)을 이용하고, 식 (20)의 관계식을 적용하면 식 (19)는 식 (21)과 같이 나타낼 수 있다. 그리고, $m+1$ 번째 시간을 나타내는 좌측 위첨자 $m+1$ 은 이하의 식에서는 생략한다.

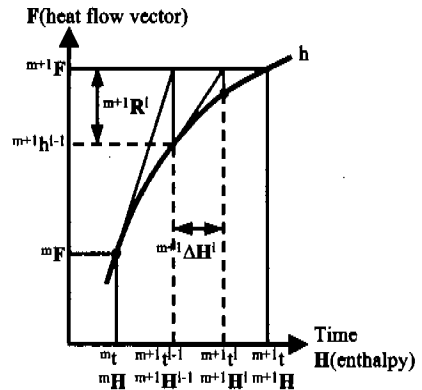


Fig. 3 Newton-Raphson method used in calculating the enthalpy $m+1_H$ at time $= m+1_t$.

$$\left(-\frac{\tilde{C}^{i-1}}{\Delta t} + K^{i-1} S^{i-1} \right) \Delta H^i = R^i \quad (21)$$

식 (21)에서 괄호 안의 항을 $\tilde{K}^{i-1} = \frac{\tilde{C}^{i-1}}{\Delta t} + K^{i-1} S^{i-1}$ 라고 정의하면, 식 (21)은 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{K}^{i-1} \Delta H^i = R^i \quad (22)$$

엔탈피 변화량 ΔH^i 를 이용하여, 각 단계에서의 엔탈피를 나타내면 다음과 같다.

$$H^i = H^{i-1} + \Delta H^i \quad (23)$$

임의의 시간 내에서 이뤄지는 일련의 반복절차를 Fig. 3에 나타내었다.

3. 프로그램 검증 및 해석결과

2절의 이론을 근거로 요소당 8개의 절점과 각 절점에서 1개의 자유도를 갖는 3차원 육면체 요소를 이용하여 상변화 열전달 해석 프로그램을 개발하였으며, 프로그램 검증을 위하여 1차원, 2차원 상변화 문제로 나누어 계산하였다. 그리고, 각각의 검증모델로서는 기존의 해는 물론 엄밀해(exact solution)도 제시되어 있는 문제물 이용하여 해를 검증하였다.

3.1 1차원 상변화 문제 I

Morgan⁽²⁾이 사용한 모델을 이용하여 1차원 상변화 문제에 대한 해를 검토하였다. 모델의 형상과 물성치, 그리고 경계조건을 Fig. 4에 도시하였다. 초기온도(T_i)가 0°C 인 물체의 좌측면, 즉 $x = 0$ m에 위치한 면을 -45°C 로 유지하였을 때, 물체 내부에서의 온도변화를 관찰하기 위하여 $x = 1$ m에 위치한 절점을 선택, 이 절점에서의 시간에 따른 온도변화를 구하였다. Fig. 4에서 T_b 는 경계 온도를 의미하며, c_s 와 c_l 은 각각 고상과 액상 영역에서의 비열, k_s 와 k_l 은 각각 고상과 액상 영역에서의 열전도계수, 그리고, L_v 는 단위 체적당 잠열을 나타낸다.

Morgan⁽²⁾은 해를 구함에 있어 시간중분은 0.01 초로하고 상변화 온도구간(ΔT_m)을 0.5, 1.0, 2.0 $^\circ\text{C}$ 로 변화시키면서 해를 구하였으며, ΔT_m 가 0°C 인 경우에 대한 엄밀해도 제시하였다. Morgan⁽²⁾은 시간중분과 상변화 온도구간의 적절한 조합이 엄밀해에 대한 근사화에 있어서의 중요성을 언급하였으며, 이것은 임의의 절점에서의 온도변화가 상변화가 일어나는 온도구간보다 클 경우 잠열의 영향이 무시될 수 있어 시간중분이 충분히 작거나 또는 상변화가 일어나는 구간에서는 요소수가 충분히 많아야 한다는 사실을 나타내고 있다. 그런데, 이러한 문제점은 Morgan⁽²⁾이 사용한 알고리즘의 문제점일 수 있다. 그러므로, 이러한 문제점이 본 연구에서 사용한 알고리즘에서도 발생할 수 있는지를 검토하기 위하여 Morgan⁽²⁾이 사용한 조건과 동일하게 해석하여 보았다. 즉, 시간중분은 0.01초로 하였으며, 상변화 온도구간은 0.5, 1.0, 2.0 $^\circ\text{C}$ 로 변화시키면서 해를 구하여 보았다. 본 연구의 수치해석 결과는 각각의 경우에 있어 그 값에 차이가 거의 없으며, 이러한 결과는 상변화 온도구간이 크지 않아 시간에 따른 온도 변화에 커다란 영향을 미치지 않은 것으로 판단된

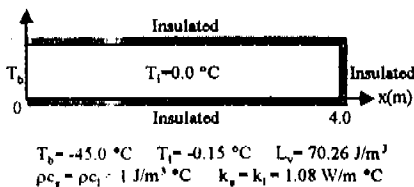


Fig. 4 One-dimensional phase change problem I of the solidification of a slab.

다. 그리고, 본 연구의 수치해석 결과물 Morgan⁽²⁾이 제시한 결과 및 엄밀해와 비교, 검토하였으며 엄밀해에 유사함을 알 수 있었다. 이는 본 연구에서 사용한 알고리즘은 상변화 문제의 수치적 모델시 상변화 온도구간과 시간중분의 적절한 조합 없이도 엄밀해에 근사한 해를 구할 수 있음을 나타낸다. Fig. 5에 Morgan⁽²⁾이 제시한 결과와 엄밀해, 그리고 $\Delta T_m = 0.5^\circ\text{C}$ 인 경우에 대하여 본 연구의 수치해석 결과물 도시하였다.

3.2 1차원 상변화 문제 II

Morgan⁽²⁾은 수치적 해를 구함에 있어, 엄밀해를 구할 때 사용한 물성치와 동일하게 사용한 것이 아니라, 물성치를 수정하며 엄밀해에 근사한 해를 구하였다. 상변화 문제를 해석함에 있어 모든 문제에 대하여 엄밀해를 구할 수 있는 것은 아니기 때문에, 상변화 온도구간을 변화시키면서 엄밀해에 근사한 수치적 해를 얻는다는 것은 엄밀해를 알지 못할 경우 불가능한 일이다. 그러므로, 엄밀해와 수치적 해를 구함에 있어 동일한 물성치를 사용하여 해의 정확도를 검증할 필요가 있다. 이러한 목적으로 Pham⁽⁶⁾이 사용한 모델을 이용하였다.

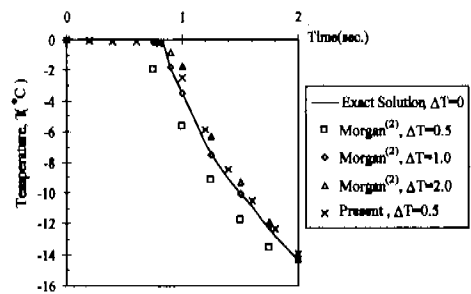


Fig. 5 Temperature variation with time at $x = 1$ m of the one-dimensional phase change problem I.

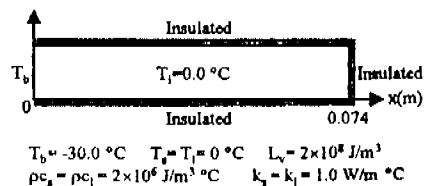


Fig. 6 One-dimensional phase change problem II of the freezing of a liquid slab.

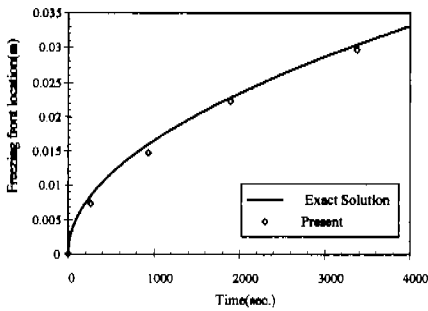


Fig. 7 Variation of a freezing front location with time : one-dimensional phase change problem II.

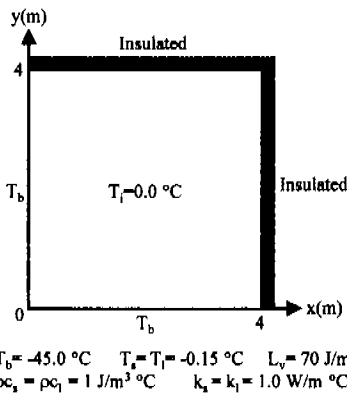


Fig. 8 Two-dimensional phase change problem of the solidification of a slab.

Fig. 6에 형상, 물성치, 그리고 경계조건을 도시하였다. 초기온도(T_l)가 0°C 인 물체의 좌측면, 즉 $x = 0$ m에 위치한 면을 -30°C 로 유지하면서, 물체가 완전히 고상화가 되는데 소요되는 시간, 즉 초기 액상의 물체가 고상화되면서 고상면이 $x = 0.074$ m의 위치에 도달하는데 소요되는 시간을 시간중분을 달리하며 해를 구하였으며, 시간중분 크기가 해에 미치는 영향도 고찰하였다. Fig. 6에 도시한 물체가 완전히 고상화되는데 소요되는 시간에 대한 엄밀해^(6,7,14,15)는 2002초로 기존에 제시된 해^(6,7)와 본 연구의 수치해석 결과물 Table 1에 표시하였으며, 각 결과에 대한 오차도 같이 나타내었다. 본 연구의 결과인 A부분은 엄밀해에 대한 오차가 1%미만으로 다른 결과들에 비하여 전체적으로 엄밀해에 잘 일치함을 알 수 있다. 그리고, 시간중분이 커짐에 따라 오차가 조금씩 증가하는 것은 해가 시간중분에 따라 얻어지므로

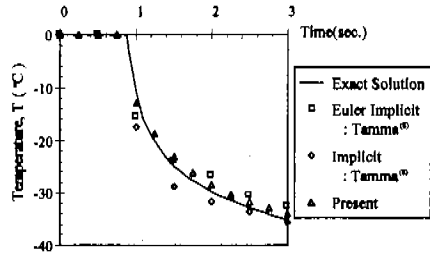


Fig. 9(a) Temperature variation with time at $x = 1$ m and $y = 1$ m of the two-dimensional phase change problem.

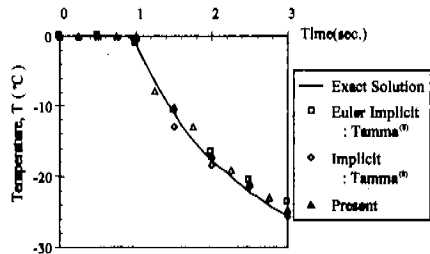


Fig. 9(b) Temperature variation with time at $x = 2$ m and $y = 1$ m of the two-dimensional phase change problem.

해가 엄밀해를 지나칠 수 있기 때문이다. 따라서 본 연구에서 사용한 알고리즘은 시간중분의 크기에 커다란 영향을 받지 않음을 알 수 있다. Fig. 7에는 시간에 대한 고상면의 이동을 엄밀해와 같이 4000초까지 표시하였다.

3.3 2차원 상변화 문제

Tamma⁽⁶⁾가 사용한 모델을 이용하여 2차원 상변화 문제를 검증하였다. 형상, 물성치 그리고 경계조건을 Fig. 8에 도시하였다. Fig. 8과 같은 형상을 가진 초기 온도 0°C 물체의 $x = 0$ m에 위치한 면과 $y = 0$ m에 위치한 면을 -45°C 로 유지시킬 때 물체 내부에서의 온도 변화를 검토하기 위하여 $x = 1$ m이며 $y = 1$ m인 지점과, $x = 2$ m이며 $y = 1$ m인 지점에서의 온도변화를 시간에 따라 구한 후 기존에 제시된 결과⁽⁶⁾와 엄밀해^(6,16) 그리고 본 연구의 수치해석 결과물 각각 Fig. 9(a)와 9(b)에 나타내었다. 전체적으로 엄밀해에 근사한 안정적인 해를 얻었으며, 고상화는 x, y 가 각각 $0, 0$ m이고 $4, 4$ m인 두 지점을 이은 대각선을 기준으로 대칭적인 고상화면이 형성된다. 이는 형상과 경계조건이 대각선을 기준으로 서로

Table 1 Comparison of the calculated duration required for a complete solidification of a liquid slab by various finite element methods(an analytical solution : 20020 sec.).

Time step(sec.)	Results(sec.)					
	A	B	C	D	E	F
2	20026	20127	33994	19869	22651	19925
5	20030	20122	30402	19861	22530	19919
10	20040	20123	24273	19875	22440	19924
20	20060	20126	26500	19880	20860	19938
50	20100	20140	24950	19829	19500	19973
100	20200	20163	22400	19926	19500	19834

Time step(sec.)	Error(%)					
	A	B	C	D	E	F
2	0.03	0.53	69.80	0.75	13.14	0.47
5	0.05	0.51	51.86	0.79	12.54	0.50
10	0.10	0.51	21.24	0.72	12.09	0.48
20	0.20	0.53	32.37	0.70	4.20	0.41
50	0.40	0.60	24.63	0.95	2.60	0.23
100	0.90	0.71	11.89	0.47	2.60	0.93

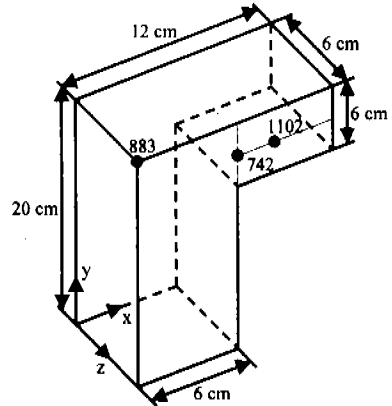
- A: Two-Level Scheme, Linear Element (Present Method)
- B: Finite Element Method with Lumped Capacitance (Pham⁽⁶⁾)
- C: Three-Level Scheme, Linear Element (Pham⁽⁶⁾)
- D: Three-Level Scheme, Linear Element and Corrector Step (Comini, Giudice and Saro⁽⁷⁾)
- E: Three-Level Scheme, Parabolic Element(Pham⁽⁶⁾)
- F: Three-Level Scheme, Parabolic Element and Corrector Step (Comini, Giudice and Saro⁽⁷⁾)

대칭성을 가지기 때문이다.

3.4 3차원 상변화 문제의 적용 예

검증된 유한요소해석 프로그램을 3차원 상변화 문제에 적용하였다. 해석 모델을 Fig. 10에 도시하였으며, 이 모델은 $x = 0$ 에 위치한 면과 $z = 6$ cm에 위치한 면에 각각 대칭한 형상을 가지는 T자 형상의 1/4만을 해석 대상으로 선정한 것이다. 대칭면은 단열로 처리하였으며, y 축 방향의 제일 윗면, 즉 $y = 20$ cm위치의 면은 대류경계조건을, 그리고 대칭면과 대류경계면을 제외한 나머지 면은 모두 온도경계조건을 사용하였다. 물성치와 경계조건을 Fig. 10에 형상과 함께 도시하였다.

고상선 온도는 850 K, 액상선 온도는 930 K인 재료로서, 초기온도는 930 K이며, 시간증분은 0.5



- Insulated boundary conditions face at $x = 0$ cm, face at $z = 6$ cm
- Convection boundary conditions face at $y = 20$ cm $h_b = 8.5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ $T_\infty = 293 \text{ K}$
- Temperature boundary conditions face at $x = 12$ cm, face at $x = 6$ cm face at $y = 0$ cm, face at $z = 0$ cm face at $6 \text{ cm} \leq x \leq 12 \text{ cm}$ and $y = 14 \text{ cm}$ $T_b = 300 \text{ K}$

$T_i = 930 \text{ K}$ $T_s = 850 \text{ K}$ $T_l = 930 \text{ K}$
 $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ $c_s = c_l = 1066 \text{ J/kg K}$
 $L = 3.95 \times 10^5 \text{ J/kg}$ $k_s = k_l = 168 \text{ W/m K}$

Fig. 10 Application problem of a three-dimensional phase change problem.

- Node 1102 : $x=8.25$, $y=17$ and $z=6$ cm
- Node 742 : $x=6$, $y=17$ and $z=6$ cm
- Node 883 : $x=0$, $y=20$ and $z=6$ cm

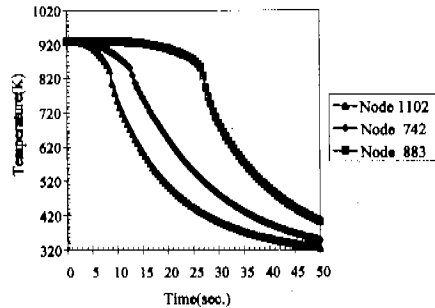


Fig. 11 Temperature variation with time of the three-dimensional phase change problem.

초로 하여 x, y, z 좌표가 각각 6, 17, 6 cm인 지점과 0, 20, 6 cm인 지점 그리고, 8.25, 17, 6 cm인 세 지점에 대하여 시간에 대한 온도변화율 50초까지 Fig. 11에 도시하였다. 여기서, 온도 변화가 급격히 변하는 지점을 찾을 수 있으며, 이 지점은 온도가 850 K인 곳으로 고상화가 되었음을

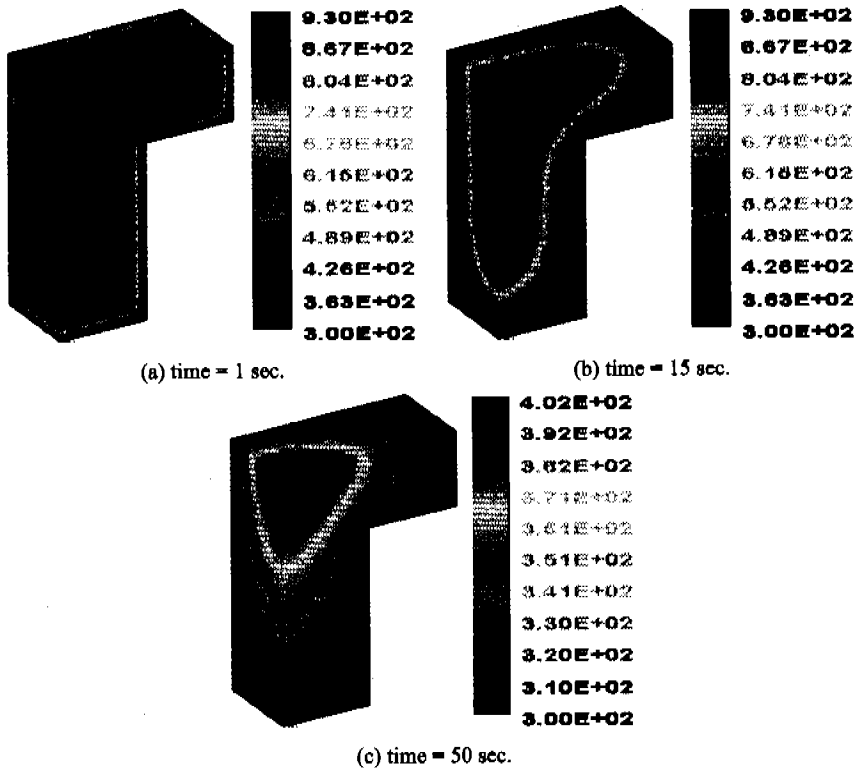


Fig. 12 Temperature distribution of the three-dimensional phase change.

의미한다. 그리고, 용고 과정을 현시적으로 나타내기 위하여 1, 15, 50초일 때의 온도분포를 Fig. 12에 도시하였다. Fig. 12에서 알 수 있듯이 x, y, z좌표가 각각 0, 20, 6 cm인 지점을 향하여 고상화가 되며, 이 지점은 대칭면의 교차 지점으로, 표면부에서 내부로, 그리고 아래 면에서 윗면 방향으로 용고가 되고 있음을 나타낸다.

4. 결 론

엔탈피법을 이용한 상변화 문제의 유한요소해석인 본 연구에서 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 상변화 문제의 유한요소해석을 위하여 8절점을 가지며, 각 절점에서 1개의 자유도를 가지는 3차원 육면체 요소를 개발하였다.
- (2) 상변화 문제 해석시 해의 정확성을 위하여 시간중분과 상변화 온도구간을 적절히 조합하지 않아도 안정적인 해를 구할 수 있다.

(3) 비정상상태 문제를 수치해석 할 경우 시간중분은 해의 정확도에 많은 영향을 미치나, 본 연구에서 사용한 알고리즘은 시간중분에 많은 영향을 받지 않고 안정적인 해를 구할 수 있다.

(4) 상변화 온도구간이 하나의 특정 온도일 경우는 물론 특정 온도구간일 경우에도 해를 용이하게 구할 수 있다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소와 (주)두레어메탈 기술연구소의 지원에 의해 수행되었으며, 본 연구에 도움을 주신 분들께 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Rubinsky, B. and Cravahlo, E. G., 1981, "A Finite Element Method for the Solution of One-Dimensional Phase Change Problems," *Int. J. Heat*

- Mass Transfer*, Vol. 24, No. 12, pp. 1987~1989.
- (2) Morgan, K., Lewis, R. W. and Zienkiewicz, O. C., 1975, "An Improved Algorithm for Heat Conduction Problems with Phase Change," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 12, pp. 1191~1195.
- (3) Roose, J. and Storrer, O., 1984, "Modelization of Phase Changes by Fictitious Heat Flow," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 20, pp. 217~225.
- (4) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Vol. 1, McGraw-Hill Book Co.
- (5) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Vol. 2, McGraw-Hill Book Co.
- (6) Pham, Q. T., 1986, "The Use of the Lumped Capacitance in the Finite-Element Solution of Heat Conduction Problems with Phase Change," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 285~291.
- (7) Comini, G., Giudice, S. Del and Saro, O., 1990, "A Conservative Algorithm for Multidimensional Conduction Phase Change," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 29, pp. 969~984.
- (8) Tamma, K. K. and Namburu, R. R., 1990, "Recent Advances, Trends and New Perspectives via Enthalpy-Based Finite Element Formulations for Application to Solidification Problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 30, pp. 803~820.
- (9) Dalhuijsen, A. J. and Segal, A., 1986, "Comparison of Finite Element Techniques for Solidification Problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 1807~1829.
- (10) Crivelli, L. A. and Idelsohn, S. R., 1986, "A Temperature-Based Finite Element Solution for Phase-Change Problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 99~119.
- (11) Pardo, E. and Weckman, D. C., 1990, "A Fixed Grid Finite Element Technique for Modeling Phase Change in Steady-State Conduction-Advection Problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 29, pp. 969~984.
- (12) Rolph III, W. D. and Bathe, K. J., 1982, "An Efficient Algorithm for Analysis of Nonlinear Heat Transfer with Phase Changes," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 18, pp. 119~134.
- (13) 황기영, 이진호, 1995, "수직용고 시스템에서 밀도차와 냉각률이 열전달 및 열용력에 미치는 영향," 대한기계학회논문집, 제19권, 제4호, pp. 1095~1101.
- (14) Voller, V. R. and Cross, M., 1981, "Accurate Solution of Moving Boundary Problems Using the Enthalpy Method," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 545~556.
- (15) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford.
- (16) Budhia, H. and Krieth, F., 1973, "Heat Transfer with Melting or Freezing in A Wedge," *Int. J. of Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp.195~211.