

# 역해석을 이용한 구형 공간 내의 산란계수 추정에 관한 연구

김우승\* · 곽동성\*\*

(1998년 8월 5일 접수)

## A Study on the Estimation of Scattering Coefficient in the Spheres Using an Inverse Analysis

Woo-Seung Kim and Dong-Seong Kwag

**Key Words:** Inverse Problem(역해석 문제), Conjugate Gradient Method(공액구배법), Scattering Coefficient(산란계수), Levenberg-Marquardt Method

### Abstract

A combination of conjugate gradient and Levenberg-Marquardt method is used to estimate the spatially varying scattering coefficient,  $\sigma(r)$ , in the solid and hollow spheres by utilizing the measured transmitted beams from the solution of an inverse analysis. The direct radiation problem associated with the inverse problem is solved by using the  $S_{12}$ -approximation of the discrete ordinates method. The accuracy of the computations increased when the results from the conjugate gradient method are used as an initial guess for the Levenberg-Marquardt method of minimization. Optical thickness up to  $\tau_0 = 3$  is used for the computations. Three different values of standard deviation are considered to examine the accuracy of the solution from the inverse analysis.

#### 기호설명

$a_1$  : 해석대상의 내부 반지름  
 $a_2$  : 해석대상의 외부 반지름  
 $b$  : 미지 산란계수의 계수벡터  
 $c, c^*$  : 해석대상을 결정하는 변수  
 $d^*$  : 식(14)로 정의되는 감소방향  
 $f_2$  : 외부 경계에 투사되는 복사  
 $I$  : 복사강도  
 $I_b$  : 흑체복사강도  
 $J$  : 식(7)과 식(20)으로 정의되는 범함수  
 $M$  : 방향의 총 개수  
 $p$  : 산란위상함수  
 $r$  : 반지름 방향의 좌표

$w_m$  : 각도구역에 대한 가중치  
 $Y$  : 측정된 복사강도

#### 그리스문자

$\beta$  : 매체의 소멸계수  
 $\beta^*$  : 식(17)로 정의되는 단계크기  
 $\gamma^*$  : 식(15)로 정의되는 공액계수  
 $\sigma$  : 매체의 산란계수  
 $\epsilon$  : 해석대상의 경계에서의 방사율  
 $\zeta$  : 무작위 값  
 $x$  : 매체의 흡수계수  
 $\mu$  : 복사강도의 방향여현  
 $\rho$  : 해석대상의 경계에서의 반사율  
 $\omega$  : 추정오차의 표준편차

\* 회원, 한양대학교 기계공학과  
 \*\* 한양대학교 대학원 기계공학과

상첨자

$k$  : 반복단계

하침자

$m, m'$  : 구분종좌표법의 각도구역에 대한 방향

## 1. 서론

열전달의 역해석 문제(inverse problems)는 실험에 의해 측정된 물리량은 이용하여 이론적인 해석을 통해 미지의 열적 상황 및 물성치 등을 추정한다. 이러한 역해석은 열관련 설계와 공학 시스템의 열적 조건의 모사에 있어 새로운 연구 방향을 제시하고 있으며, 우주선, 로켓발사장치, 엔진 등과 관련된 비정상 열전달 과정의 실험적인 연구와 물질의 물성치 결정 등에서 다양한 방법으로 적용되고 있다.<sup>(1)</sup> 예를 들면 대기권에 진입하는 우주선의 표면에는 대기와의 마찰에 의해 매우 큰 열유속이 존재한다. 따라서 우주선 표면에서의 열유속을 측정하는 것은 매우 어렵다. 그러나 역해석을 이용하면 우주선 표면의 내부에서 온도를 측정하여 외부의 열적 상황을 추정할 수 있다. 직접문제(direct problem)는 주어진 초기조건과 경계조건 및 물성치에 의해 해를 구할 수 있는 well-posed 문제인데 반해 역해석 문제는 실험에 의해 측정된 데이터를 바탕으로 미지의 경계조건이나 물성치 또는 형상을 추정하게 되므로 추정에 조그마한 오차가 포함되어도 해는 큰 변동을 가지는 ill-posed 문제이며, 이러한 특성을 가지는 역해석 문제를 해석하는 것은 쉽지 않다.<sup>(2)</sup>

전도열전달의 역해석으로는 Huang과 Wu<sup>(3)</sup>가 공액구배법(conjugate gradient method)을 적용하여 내연기관 실린더 내의 열유속을 추정하였으며 Huang과 Ju<sup>(4)</sup>는 열주조공정에서 볼 표면의 열적상황을 측정된 온도를 이용하여 추정하였다. 그리고 Dowding 등<sup>(5)</sup>은 탄소복합재의 열전도계수와 열용량을 열유속과 온도분포를 측정하여 추정하였다.

복사열전달의 역해석에서는 Freund<sup>(6)</sup>가 지표에서 태양조사를 측정하여 북극점에서 대기의 산란율을 추정하였고, Dobkin과 Son<sup>(7)</sup>은 가열된 반응로 내의 우라늄 불소화합물의 복사 열물성치를 추정하였다. Ho와 Ozisik<sup>(8,9)</sup>은 동방적으로 산란하는 유한한 두께의 평판 매체에서의 출구복사강도

를 이용하여 광학두께와 공간에 대해 일정한 값을 가지는 산란율과 공간에 따라 변하는 산란율을 비선형 최소자승법으로 추정하였다. Li와 Ozisik<sup>(10,11)</sup>은 흡수, 방사, 비동방적으로 산란하는 평판 매체에서 출구복사강도를 이용하여 복사생성항을 부가함수(adjoint function)를 사용한 공액구배법으로 추정하였고, 또한 매체 내의 온도분포와 확산적으로 반사하는 표면에서의 반사율도 계산하였다. 그리고 Bokar와 Ozisik<sup>(12)</sup>은 흡수, 방사, 등방적으로 산란하는 구 형태의 매체에서 출구복사강도를 이용하여 복사생성항을 공액구배법과 Levenberg-Marquardt법으로 계산하였다.

이전의 연구자들은 평판과 구 형태의 복사참여 매체에 대해 주로  $P_N$  법이나 수학적인 엄밀해를 이용하여 역해석 하였지만, 본 연구에서는 Tsai와 Ozisik<sup>(13)</sup>이 연구한 중실구(solid sphere)와 중공구(hollow sphere)에 대한 복사열전달 해석을 바탕으로  $S_{12}$  구분종좌표법(discrete ordinates method)을 직접문제로 적용하였고, 출구복사강도를 이용하여 흡수, 방사, 등방적으로 산란하는 중실구와 중공구 형태의 매체에서 반경방향의 광학두께(optical thickness)에 따라 변하는 산란계수를 공액구배법과 Levenberg-Marquardt법을 조합하여 추정하고자 한다.

본 연구의 경우 공액구배법은 초기가정값의 영향을 받지 않고 수렴하는 특성을 가지고 있으나 수렴성이 느리고 측정된 출구복사강도에 오차가 많이 포함된 경우 해에 대한 오차도 크다. 그러나 Levenberg-Marquardt법은 측정오차가 크더라도 비교적 정확한 해를 도출하며 수렴성도 빠른 반면 정확한 초기가정값 필요로 한다. 그러므로 본 연구에서는 공액구배법과 Levenberg-Marquardt법의 장점들을 조합하여 초기가정의 제한을 받지 않고 정확한 해를 도출할 수 있는 역해석방법을 적용하여 구 형태의 매체에서 반경방향의 광학두께에 따라 변하는 산란계수를 추정하고자 한다.

## 2. 직접문제

본 연구에서는 중실구와 중공구 형태의 복사참여매체에 대해 반경방향의 광학두께의 함수인 산란계수 추정을 위해 역해석을 수행하고자 한다. 역해석을 위해서는 고려한 해석대상에 대해 복사

**Table 1** Selection of the coefficients for various geometries.

Geometry	$c$	$c^*$	$a_1$	$a_2$
Hollow sphere	1	0	inner radius	outer radius
Solid sphere	1	1	0	radius

열전달 방정식을 해석할 수 있는 직접문제가 필요하다. 이를 위해 구 형태의 복사참여매체에 의 부로부터 투사되는 복사가 있고, 확산적으로 반사하는 경계를 가지는 해석대상에 대한 지배방정식과 경계조건을 다음과 같이 나타내었다.<sup>(13)</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{r^{2c}} \frac{\partial}{\partial r} [r^{2c} I(r, \mu)] \\ & + \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(1 - \mu^2) I(r, \mu)] + \beta(r) I(r, \mu) \\ & = x(r) I_b(T) + \frac{\sigma(r)}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(r, \mu') d\mu' \end{aligned}$$

, in  $a_1 < r < a_2, -1 < \mu < 1$  (1a)

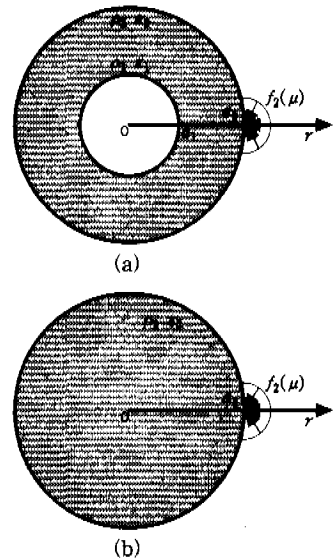
$$\begin{aligned} I(a_1, \mu) &= (1 - c^*) [\epsilon_1 I_{b,1} \\ & - 2\rho_1 \int_{-1}^0 I(a_1, \mu') \mu' d\mu'] \\ & + c^* I(a_1, -\mu) \end{aligned}$$

, at  $r = a_1, \mu > 0$  (1b)

$$\begin{aligned} I(a_2, \mu) &= f_2(\mu) + \epsilon_2 I_{b,2} \\ & + 2\rho_2 \int_0^1 I(a_2, \mu') \mu' d\mu' \end{aligned}$$

, at  $r = a_2, \mu < 0$  (1c)

여기서 Table 1과 같이  $c, c^*, a_1, a_2$ 에 의해 식(1)의 고려대상이 중실구와 중공구로 구분된다. 해석대상에 대한 형상과 좌표계는 Fig.1에 나타내었다. 식(1)에서  $r$ 은 반경방향에 대한 광학두께이고,  $\mu$ 는 복사강도  $I(r, \mu)$ 의 방향여현(directional cosine)이다. 식(1b)와 식(1c)로 주어지는 경계조건에서  $f_2(\mu)$ 는 경계의 외부로부터 투사되는 복사열전달이며,  $\epsilon, \rho$ 는 각각 경계에서의 확산 방사율과 반사율을 나타낸다.  $x(r), \sigma(r)$



**Fig. 1** Geometries and coordinates for (a) hollow sphere (b) solid sphere.

은 각각 광학두께에 의해 결정되는 매체의 흡수계수와 산란계수이다. 그리고 소멸계수  $\beta(r)$ 은 다음과 같다.

$$\beta(r) = x(r) + \sigma(r) \tag{2}$$

본 연구에서는 복사참여매체가 동방적으로 산란(isotropic scattering)하는 것으로 가정하였기 때문에 산란위상함수(scattering phase function)는 다음 값을 가진다.

$$p(\mu, \mu') = 1 \tag{3}$$

식(1a)의 지배방정식에 구분종좌표법을 적용하면 다음과 같이 표현된다.<sup>(14)</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_m}{r^{2c}} \frac{\partial}{\partial r} [r^{2c} I_m] + \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(1 - \mu^2) I_m] + \beta(r) I_m \\ & = x(r) I_b + \frac{\sigma(r)}{2} \sum_{m=-1}^M w_m d_{nm} I_m \end{aligned}$$

(4)

여기서 하첨자  $m, m'$ 은 각도구역에 대한 방향을 나타내고,  $M$ 은 방향의 총 개수를 나타낸다.  $w_m$ 은 각도구역에 따른 가중치이다.

경계조건인 식(1b)와 (1c)는 구분종좌표법에 의해 다음과 같이 변환된다.

$$I_m = (1 - c^*)[\varepsilon_1 I_{b,1} - 2\rho_1 \sum_m w_m \mu_m I_m'] + c^* I_m', \quad \mu_m > 0, \mu_m' < 0, r = a_1 \quad (5a)$$

$$I_m = f_{2,m} + \varepsilon_2 I_{b,2} + 2\rho_2 \sum_m w_m \mu_m I_m', \quad \mu_m < 0, \mu_m' > 0, r = a_2 \quad (5b)$$

### 3. 역해석

본 연구에서는 추정하고자 하는 미지의 산란계수를 다음과 같이 다항식으로 가정하였다.

$$\alpha(r) = \sum_{n=0}^N b_n r^n \quad (6)$$

다항식으로 가정된 산란계수의 계수를 추정하기 위한 역해석 과정은 다음의 민감도 문제(sensitivity problem)를 해석함으로써 이루어지게 된다.

#### 3.1 민감도 문제

미지의 산란계수  $\alpha(r)$ 가 포함된 지배방정식과 경계조건에 대해 측정된 출구 복사강도가 있다면, 산란계수를 추정하기 위한 역해석 문제는 다음의 범함수(functional)를 최소화시키는 문제로 귀결된다.

$$J(b) = \int_0^1 [K(a_2, \mu; b) - Y(\mu)]^2 d\mu \quad (7)$$

식(7)에서  $Y(\mu)$ 는 구의 외부 경계  $r = a_2$ 에서 측정된  $\mu_m > 0$ 인 방향의 출구복사강도이다. 그리고  $K(a_2, \mu; b)$ 는 역해석을 통해 추정된 다항식의 계수 벡터  $b = [b_0, b_1, \dots, b_N]^T$ 를 이용하여 직접문제로부터 계산한  $r = a_2$ 에서의 출구복사강도이다. 즉 역해석을 통해 추정된 산란계수를 이용하여 계산한 출구복사강도와 측정된 출구복사강도와의 차이를 최소화시킴으로써 역해석 문제에 대한 해를 얻을 수 있다. 범함수는 미지의 계수  $b_n$ 에 대

해 미분하여 최소화시킬 수 있다. 식(7)을  $b_n$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial b_n} = \int_0^1 2[K(a_2, \mu; b_n) - Y(\mu)] \frac{\partial K(a_2, \mu; b_n)}{\partial b_n} \quad (8)$$

식(8)은 민감도 계수(sensitivity coefficient)  $\partial I / \partial b_n$ 를 포함하고 있으며, 민감도 계수값은 식(4), (5a), (5b)를  $b_n$ 에 대해 미분하여 얻은 다음 민감도 문제를 풀어 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_m}{r^{2c}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^{2c} \frac{\partial I_m}{\partial b_n} \right] \\ & + \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial I_m}{\partial b_n} \right] + \beta \frac{\partial I_m}{\partial b_n} \\ & = \frac{r^n}{2} \sum_{m=1}^M w_m \rho_{mm'} I_m' \\ & + \frac{\alpha(r)}{2} \sum_{m=1}^M w_m \rho_{mm'} \frac{\partial I_m'}{\partial b_n} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial I_m}{\partial b_n} = -2(1 - c^*)\rho_1 \sum_m w_m \mu_m \frac{\partial I_m'}{\partial b_n} + c^* \frac{\partial I_m'}{\partial b_n}, \quad \mu_m > 0, \mu_m' < 0, r = a_1 \quad (10a)$$

$$\frac{\partial I_m}{\partial b_n} = 2\rho_2 \sum_m w_m \mu_m \frac{\partial I_m'}{\partial b_n}, \quad \mu_m < 0, \mu_m' > 0, r = a_2 \quad (10b)$$

본 연구에서는 소멸계수  $\beta(r) = 1$ , 매체의 흡재 복사강도  $I_b(r) = 0$ 으로 설정하였기 때문에 식(4)에 있는  $x(r)I_b$ 는 고려되지 않았다. 민감도 문제는 지배방정식의 함수항과 경계조건만 약간 변경되었을 뿐 형태가 직접문제와 유사하므로 직접문제와 같은 방법으로 해를 구할 수 있다.

민감도 문제의 해석을 통해 다음과 같이 민감도 계수 벡터를 얻을 수 있다.

$$\nabla I = \left[ \frac{\partial I}{\partial b_0}, \frac{\partial I}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial I}{\partial b_N} \right] \quad (11)$$

#### 3.2 공역구배법

범함수를 식(8)과 같은 방법으로  $b_n$ 에 대해 미분하여 최소화하여 벡터의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\nabla J = \left[ \frac{\partial J}{\partial b_0}, \frac{\partial J}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial b_N} \right] \quad (12)$$

식(12)는 민감도 계수  $\partial I / \partial b_n$ 를 구한 후 측정된 출구복사강도  $Y(\mu)$ 를 이용하여 식(8)로부터 구할 수 있다.

공액구배법을 이용하여 미지의 계수 벡터  $b$ 를 구하기 위해서는 다음의 반복과정이 이용된다.

$$b^{k+1} = b^k - \beta^k d^k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$d^k = \nabla J^T(b^k) + \gamma^k d^{k-1}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$\gamma^k = \frac{\nabla J(b^k) \nabla J^T(b^k)}{\nabla J(b^{k-1}) \nabla J^T(b^{k-1})}, \quad \gamma^0 = 0 \quad (15)$$

여기서  $\beta^k$ 는 반복단계  $k$ 에서  $k+1$ 로 가는 단계 크기(step size)이고,  $d^k$ 는 반복단계  $k$ 에서의 감소방향(direction of descent)이며,  $\gamma^k$ 는 공액계수(conjugate coefficient)이다.

단계 크기  $\beta^k$ 는 다음과 같이 범함수를 최소화하는 과정을 통해 계산된다.

$$\min_{\beta} J(b^{k+1}) = \min_{\beta} J(b^k - \beta^k d^k) \quad (16)$$

식(16)의 우변을 Taylor 급수 전개한 후  $\beta^k$ 에 대해 미분하고 그 값을 '0'으로 놓으면 단계 크기에 대한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\beta^k = \frac{\int_0^1 [K(a_2, \mu; b) - Y(\mu)] \nabla K(a_2, \mu; b) d^k d\mu}{\int_0^1 [\nabla K(a_2, \mu; b) d^k]^2 d\mu} \quad (17)$$

공액구배법을 이용하여 미지의 계수 벡터  $b$ 를 구하기 위한 반복 계산 과정은 측정에 오차가 포함된 경우 불일치 원칙<sup>(16)</sup>(discrepancy principle)

에 의해 다음의 수렴조건이 만족되면 종료된다.

$$J^{k+1} < \omega^2 \quad (18)$$

여기서  $\omega$ 는 오차의 표준편차이다. 그러나 표준편차가 큰 경우 식(18)의 수렴조건만으로는 충분한 수렴이 이루어지지 않으므로 다음의 수렴조건을 추가로 이용하였다.

$$\left| \frac{J^{k+1} - J^k}{J^{k+1}} \right| < \eta \quad (19)$$

여기서  $\eta$ 는 공액구배법만으로 역해석 하는 경우에는  $10^{-8}$ 을 적용하였고, 공액구배법과 Levenberg-Marquardt법을 조합한 경우에는  $10^{-6}$ 을 적용하여, Levenberg-Marquardt법의 초기 가정값으로 이용하였다.

#### 반복 계산 과정

공액구배법을 이용하여 미지의 산란계수를 추정하기 위한 반복 계산 과정은 다음과 같다.

① 현재 계산된  $b^k$ 를 이용하여 식(4)의 직접문제를 풀어  $r=a_2$ 에서의 복사강도  $K(a_2, \mu; b)$ 를 계산한다

② 식(9)의 민감도 문제를 풀어서 민감도 계수 벡터  $\nabla I$ 를 계산한다.

③  $\nabla I, K(a_2, \mu; b), Y(\mu)$ 를 이용하여 식(8)과 (12)로부터 구배  $\nabla J(b^k)$ 를 계산한다.

④ 단계 ③으로부터 구해진  $\nabla J(b^k)$ 를 이용하여 식(15)와 (14)로부터 각각  $\gamma^k$ 와 감소방향  $d^k$ 를 계산한다.

⑤  $\nabla I, K(a_2, \mu; b), Y(\mu), d^k$ 를 이용하여 식(17)로부터 단계 크기  $\beta^k$ 를 구한다.

⑥  $\beta^k, d^k$ 를 이용하여 식(13)으로부터  $b^{k+1}$ 을 계산한다.

⑦ 식(18)과 (19)의 수렴조건을 만족하면 프로그램 종료하고, 만족하지 않으면 단계 ①로 돌아가서 계산 과정을 반복한다.

### 3.3 Levenberg-Marquardt법

Levenberg-Marquardt법에서는 공역구배법에서 적용되었던 직접문제와 민감도 문제를 이용하여 역해석 하였다. Levenberg-Marquardt법에서의 범함수의 정의는 다음과 같다.

$$J(b) = \sum_{\mu=1}^M [I_r(a_2, \mu; b) - Y_r(\mu)]^2 \quad (20)$$

여기서  $M$ 은 총 측정개수이다.

Levenberg-Marquardt법으로 미지의 계수벡터  $b$ 를 구하기 위해서는 다음의 반복계산식이 사용된다.

$$b^{k+1} = b^k + (\nabla I^T \nabla I + \lambda_k I)^{-1} \nabla I^T (Y(\mu) - I(a_2, \mu; b^k))$$

,  $k=1, 2, \dots$  (21)

여기서  $\lambda_k$ 는 감쇄변수(damping parameter)이고,  $I$ 는 단위행렬이다. 본 연구에서는 공역구배법을 이용하여  $b$ 에 대한 해를 어느 정도 수렴시킨 후 계산된  $b$ 를 Levenberg-Marquardt법의 초기가정으로 이용하였기 때문에 감쇄변수  $\lambda_k$ 는 '0'으로 설정하였다. Levenberg-Marquardt법의 수렴조건은 식(19)와 같으며  $\eta$ 는  $10^{-8}$ 을 이용하였다.

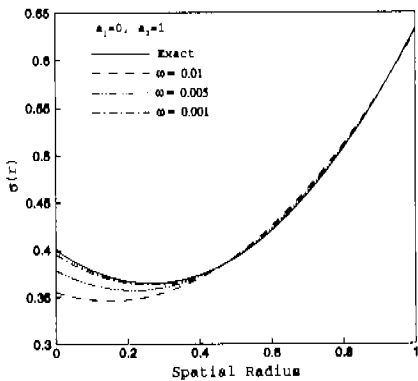
반복 계산 과정

Levenberg-Marquardt법을 이용하여 미지의 산란계수를 추정하기 위한 반복 계산 과정은 다음과 같다

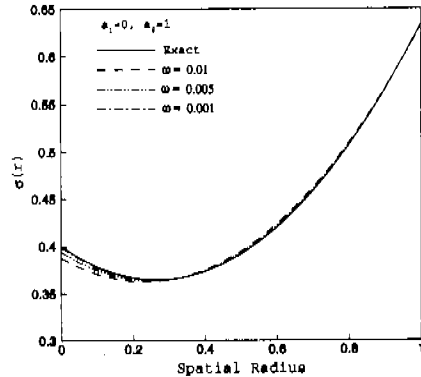
- ① 현재 계산된  $b^k$ 를 이용하여 식(4)의 직접문제를 풀어  $r=a_2$ 에서의 복사강도  $I(a_2, \mu; b)$ 를 계산한다
- ② 식(9)의 민감도 문제를 풀어서 민감도 계수 벡터  $\nabla I$ 를 계산한다.
- ③  $\nabla I, I(a_2, \mu; b), Y(\mu)$ 를 이용하여 식(21)로부터 다음 단계의  $b^{k+1}$ 을 계산한다.
- ④ 식(19)의 수렴조건을 만족하면 프로그램을 종료하고, 만족하지 않으면 단계 ①로 돌아가서 계산 과정을 반복한다.

4. 결과 및 고찰

미지의 산란계수 추정에 대한 역해석의 정확도를 검증하기 위해 주어진 산란계수에 대해 직접문제를 풀어 수치적으로 계산된  $r=a_2$ 에서의 출구복사강도에 실제 실험에서 발생하는 측정오차를 포함시킨 값을 역해석에서 사용되는 측정된 출구복사강도로 이용하였다.



(a)



(b)

Fig. 2 Estimated scattering coefficient for a solid sphere with optical thickness=1 and  $\sigma(r) = 0.4 - 4\xi/15 + \xi^2/2$  (a) conjugate gradient method (b) combination of conjugate gradient method and Levenberg-Marquardt method.

측정오차가 포함되어 있는 측정 출구복사강도는 다음과 같은 방법으로 얻을 수 있다.

$$Y(\mu) = I(a_2, \mu)_{exact} + \omega \zeta \quad (22)$$

여기서  $I(a_2, \mu)_{exact}$ 는 수치적으로 계산된 엄밀해이다.  $\omega$ 는 오차의 표준편차(standard deviation)이며,  $\zeta$ 는 정규분포에 의한 무작위 값(random variable)으로 IMSL의 서브루틴 DRNNOR<sup>(16)</sup>을 이용하여 계산하였다. 그리고 무작위 값이 99%의 신뢰도를 갖게 하기 위해 다음 범위의 값을 선택하였다.

$$-2.576 < \zeta < 2.576 \quad (23)$$

본 연구에서는 식(22)를 이용하여 측정된 출구복사강도를 수치적으로 얻었으나 역해석의 실제 응용에서는 실험을 통해  $Y(\mu)$ 를 측정하게 된다.

본 연구에서는 직접문제의 해석에  $S_{12}$  구분종과 표법을 적용하였으므로  $0 < \mu < 1$ 일 때의 측정된 출구복사강도의 개수는 6개이다. 사용된 구분종 좌표와 각도구역에 따른 가중치는 참고문헌<sup>(17)</sup>의 값을 사용하였다. 직접문제의 해석에서 경계의

외부로부터 투사된 복사는  $f_2(\mu) = 1$ 로 설정하였다.

Fig.2와 Fig.3은 중실구 형태의 참여매체에 대해 오차의 표준편차  $\omega$ 가 0.01, 0.005, 0.001인 경우에 대해 미지의 산란계수를 역해석으로 추정된 결과를 나타내었다. 가정한 미지의 산란계수는 다음과 같다.

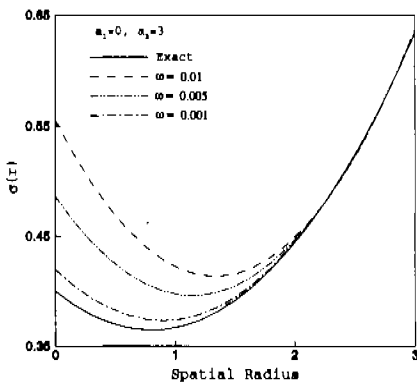
$$\alpha(r) = 0.4 - \frac{4}{15} \xi + \frac{1}{2} \xi^2, \quad \xi = \frac{r}{a_2} \quad (24)$$

본 연구에서 가정한 산란계수는 참고문헌<sup>(6)</sup>에서 인용하였으며, 전체 영역에 대하여 약 0.5의 평균값을 가진다.

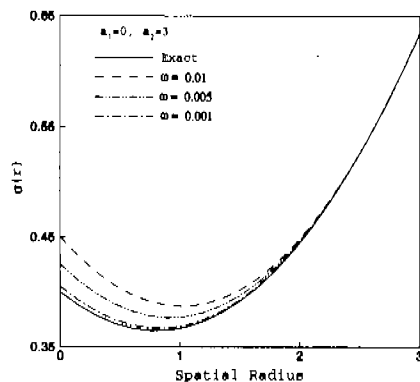
Fig.2는 광학두께가 1인 중실구에 대한 역해석 결과이다. 측정오차의 표준편차가  $\omega = 0.01$ ,  $\omega = 0.005$ ,  $\omega = 0.001$ 일 때 측정에 포함된 오차는 각각 4.40%, 2.20%, 0.44%이며, 오차는 다음과 같이 계산되었다.

$$\text{측정오차 (\%)} = \frac{2.576 \omega}{Y_{avg}} \times 100 \quad (25)$$

여기서  $Y_{avg}$ 는 측정된 출구복사강도의 평균이다.



(a)



(b)

Fig. 3 Estimated scattering coefficient for a solid sphere with optical thickness=3 and  $\alpha(r) = 0.4 - 4\xi/15 + \xi^2/2$  (a) conjugate gradient method (b) combination of conjugate gradient method and Levenberg-Marquardt method.

Fig.2(a)에는 공역구배법을 사용하여 측정오차의 여러 표준편차 값에 따라 추정된 산란계수와 실제 산란계수를 나타내었다. 측정 오차의 표준 편차가 작을수록 실제 산란계수에 가까워지는 것을 알 수 있으며, 출구복사강도를 측정하는 지점인  $r=a_2$ 에서는 매우 정확한 산란계수가 추정됨을 알 수 있다. 그러나  $r=0$  인 중실구의 내부에서는 실제 산란계수와는 큰 차이를 보이고 있다. 이는 해석대상의 내부로 갈수록 측정된 출구복사강도에 대한 정보가 점점 감소하게 되어 중실구의 내부에서 일어나는 복사열전달의 상황을 알 수 없어서 정확한 산란계수의 추정이 어렵기 때문이다. 본 연구에서는 보다 정확한 산란계수를 추정하기 위하여 먼저 초기 가정값이 필요하지 않은 공역구배법을 이용하여 추정하고자 하는 산란계수에 대해 어느 정도 수렴시킨 후, 이 값을 초기가정으로 설정하여 Levenberg-Marquardt법으로 산란계수를 추정하는 방법을 사용하였다. Fig.2(b)는 공역구배법과 Levenberg-Marquardt법을 조합하여 추정한 산란계수와 실제 산란계수를 나타내었다. Fig.2(b)를 보면 중실구의 내부로 갈수록 추정된 산란계수의 값이 공역구배법만을 이용하여 추정한 Fig.2(a)의 결과보다 개선되었음을 알 수 있다.

Fig.3은 산란계수의 추정에 미치는 광학두께의

영향을 알아보기 위하여 광학두께가 3인 중실구 형태의 참여매체에 대해 산란계수를 역해석으로 추정한 결과를 나타내었다. 표준편차가  $\omega=0.01$ ,  $\omega=0.005$ ,  $\omega=0.001$ 일 때 측정에 포함된 오차는 각각 7.33%, 3.67%, 0.73%이다. Fig.3(a)에는 공역구배법만을 이용하였을 때의 결과를 나타내었고, Fig.3(b)에는 공역구배법과 Levenberg-Marquardt법을 조합하였을 때의 결과를 나타내었다. Fig.3(a)를 보면 중실구의 내부로 갈수록 실제 산란계수와 상당히 큰 오차를 나타냄을 알 수 있다. 그러나 Fig.3(b)에서는 오차가 많이 감소되었음을 알 수 있다. 그러나 광학두께가 1인 Fig.2의 결과와 비교해 볼 때 중실구의 내부에서 산란계수의 추정이 어려움음을 알 수 있다. 이러한 현상은 Fig.3에서 고려한 해석대상의 광학두께가 Fig.2에서 고려한 해석대상의 광학두께보다 커서 출구복사강도에 대한 정보가 상대적으로 부족함으로 인해 생기게 된다. 그러므로 광학두께가 커질수록 역해석은 정확한 해를 추정하지 못하게 되며 본 연구의 경우 광학두께의 값이 약 5에서부터 산란계수의 추정이 불가능하였다.

Fig.4과 Fig.5에는 중공구 형태의 참여매체에 대해 산란계수를 추정한 결과를 나타내었다. 가정된 산란계수는 다음과 같다.

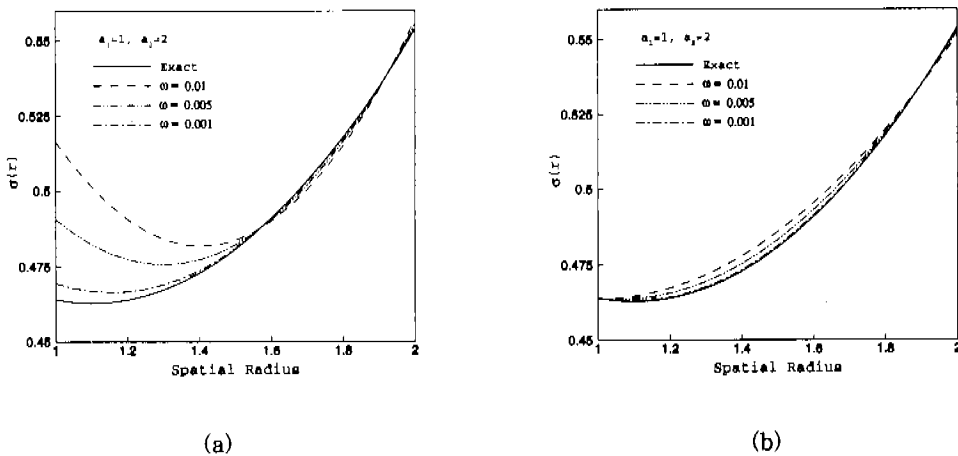


Fig. 4 Estimated scattering coefficient for a hollow sphere with optical thickness=1 and  $\alpha(r) = 0.6 - 8r/15F_1 + r^2/2F_2$  (a) conjugate gradient method (b) combination of conjugate gradient method and Levenberg-Marquardt method.



$$\alpha(r) = 0.6 - \frac{8}{15F_1}r + \frac{1}{2F_2}r^2 \quad (26a)$$

여기서

$$F_1 = (a_2^4 - a_1^4)/(a_2^3 - a_1^3) \quad (26b)$$

$$F_2 = (a_2^5 - a_1^5)/(a_2^3 - a_1^3) \quad (26c)$$

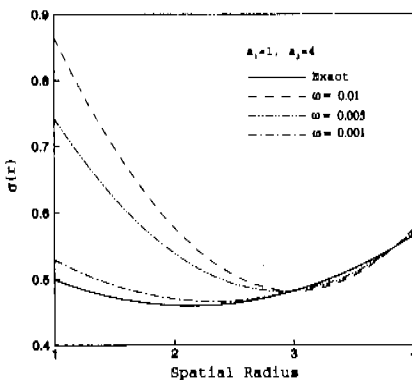
Fig.4에는 광학두께가 1인 경우의 추정된 산란계수를 나타내었으며, 추정오차의 표준편차가  $\omega=0.01$ ,  $\omega=0.005$ ,  $\omega=0.001$ 일 때 추정에 포함된 오차는 각각 6.86%, 3.44%, 0.69%이다. Fig.4(a)에서는 중공구의 내부 경계로 갈수록 오차가 많이 발생하게 되지만 Fig.4(b)에서는 거의 정확한 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. Fig.5에는 광학두께가 3일 때의 역해석 결과를 나타내었다. 추정오차의 표준편차가  $\omega=0.01$ ,  $\omega=0.005$ ,  $\omega=0.001$ 일 때 추정에 포함된 오차는 각각 8.82%, 4.42%, 0.89%이다. Fig.5(a)에는 공역구배법만으로 추정한 산란계수를 나타내었는데 실제 산란계수와는 상당히 많은 오차가 발생하였다. 그러나 공역구배법과 Levenberg-Marquardt법을 조합하여 추정한 Fig.5(b)에서는 오차가 많이 감소되었음을 볼 수 있다. 특히 추정지점으로부터 멀어지고, 추정에 포함되는 오차가 클수록 공역구배법과 Levenberg-Marquardt법을 조합하여 사

용하였을 때 만족할 만한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

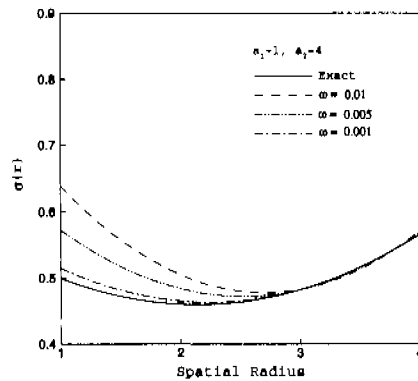
### 5. 결론

본 연구에서는 중실구와 중공구의 형상을 가진 복사 참여 매체에서 반경방향의 광학두께에 따라 값이 변하는 미지의 산란계수  $\alpha(r)$ 을 공역구배법과 Levenberg-Marquardt법을 조합한 역해석을 통해 추정한 결과 만족할만한 해를 구할 수 있었으며, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 공역구배법만으로 미지의 산란계수를 추정하는 경우에는 추정에 포함된 오차가 크거나 구의 내부로 갈수록 해의 추정이 어려워짐을 알 수 있었다.
- (2) 공역구배법과 Levenberg-Marquardt법의 조합을 적용하였을 경우에는 공역구배법에서 나타나는 단점을 보완하여, 초기가정값의 영향을 받지 않는 보다 정확한 해를 얻을 수 있었다.
- (3)  $P_N$ 법이나 수학적인 엄밀해물 이용하여 역해석을 수행하는 경우 대개  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 에서 20개 정도의 추정된 복사강도를 필요로 한다. 그러나 본 연구에서는  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ 에서 6개의 추정값



(a)



(b)

Fig. 5 Estimated scattering coefficient for a hollow sphere with optical thickness=3 and  $\alpha(r) = 0.6 - 8r/15F_1 + r^2/2F_2$  (a) conjugate gradient method (b) combination of conjugate gradient method and Levenberg-Marquardt method.

만을 사용하여  $S_{12}$  구분종좌표법을 이용하여 직접문제를 풀고, 역해석을 수행하여 만족할 만한 해를 얻을 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 '95 국제공동과제 (956-1000-001-2)와 일부로서 수행되었으며, 이에 관계자 제위께 감사드립니다. 또한 미국 측의 공동 연구자이며, 본 논문에 조언을 준 North Carolina 주립대학의 M. N. Ozisik 교수님께도 감사말 표합니다.

참고문헌

(1) Oleg M. Alifanov, 1995, *Inverse Heat Transfer Problem*, Springer-Verlag.  
 (2) M. N. Ozisik, 1993, *Heat Conduction*, 2nd ed., Wiley Interscience.  
 (3) C. H. Huang and J. Y. Wu, "Two-dimensional Inverse Problem in Estimating Heat Fluxes of an Enclosure with Unknown Internal Heat Source", *J. Appl. Phys.*, Vol.76, No.1, pp.133-141, 1994.  
 (4) C. H. Huang and T. M. Ju, "The Estimation of Surface Thermal Behavior of the Working Roll in Hot Rolling Process", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.38, No.6, pp.1019-1031, 1995.  
 (5) K. J. Dowding, J. V. Beck and B. F. Blackwell, "Estimation of Directional-Dependent Thermal Properties in a Carbon-Carbon Composite", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.39, No.15, pp.3157-3164, 1996.  
 (6) J. Freund, "Aerosol Single Scattering Albedo in the Arctic Determination from Ground-based Nonspecial Solar Irradiance Measurements", *J. Atmos. Sci.*, Vol.40, pp.2724-2731, 1983.  
 (7) S. V. Dovkin and E. E. Son, "Determining the Radiative Thermal Conductivity of

Uranium Hexafluoride by Reactor Heating", *J. High Temper.*, Vol.29, No.3, pp.468-473, 1991.  
 (8) C. H. Ho and M. N. Ozisik, "Inverse Radiation Problems in Inhomogeneous Media", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol.40, No.5, pp.553-560, 1988.  
 (9) C. H. Ho and M. N. Ozisik, "An Inverse Radiation Problem", *Int. J. of Heat Mass Transfer*, Vol.32, No.2, pp.335-341, 1989.  
 (10) H. Y. Li and M. N. Ozisik, "Estimation of the Radiation Source Term with a Conjugate-Gradient method of Inverse Analysis", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol.48, No.3, pp.237-244, 1992.  
 (11) H. Y. Li and M. N. Ozisik, "Inverse Radiation Problem for Simultaneous Estimation of Temperature Profile and Surface Reflectivity", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol.7, No.1, pp.88-93, 1993.  
 (12) J. C. Bokar and M. N. Ozisik, "An Inverse Problem for the Estimation of Radiation Temperature source Term in a Sphere", *Inverse Problems in Engineering*, Vol.1, pp.191-205, 1995.  
 (13) J. R. Tsai and M. N. Ozisik, "Radiation in Spherical Symmetry with Anisotropic Scattering and Variable Properties", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol.42, No.3, pp.187-199, 1989.  
 (14) Michael F. Modest, 1993, *Radiative Heat Transfer*, McGraw-Hill, Inc.  
 (15) O. M. Alifanov, "Solution of an Inverse Problem of Heat Conduction by Iteration methods", *Journal of Engineering Physics*, Vol.26, No.4, pp.471-476, 1974.  
 (16) *IMSL Library*, Edition 10, Houston, TX, 1987.  
 (17) James J. Duderstadt and William R. Martin, 1979, *Transport theory*, A Wiley-interscience publication.