

## 유한 요소법과 부분 구조 합성법을 이용한 회전 디스크-스핀들 계의 진동 해석

정 명 수\* · 장 건 희\*\*  
(1999년 9월 29일 접수)

### Vibration Analysis of Rotating Disk-Spindle System Using Finite Element Method and Substructure Synthesis

Myung Soo Jung and Gun Hee Jang

**Key Words :** Disk-Spindle System(디스크-스핀들 시스템), Hamilton's Principle(해밀턴의 원리), FEM(유한 요소법), Substructure Synthesis(부분 구조 합성법), Vibration Analysis(진동 해석)

#### Abstract

Vibration of a rotating disk-spindle system is analyzed by using Hamilton's principle, FEM and substructure synthesis. A rotating disk undergoes the rigid body motion and the elastic deformation. Its equation of motion is derived by Kirchhoff plate theory and von Karman nonlinear strain. A rotating shaft is described by Rayleigh beam theory considering the axial rigid body motion. The stationary shaft supporting the rotating disk-spindle-bearing system is modeled by Euler beam theory, and the stiffness of ball bearing is determined by A.B.Jones' theory. FEM is used to solve the derived governing equations, and substructure synthesis is introduced to assemble each structure of the rotating disk-spindle system. The developed theory is applied to the spindle system of a 3.5" computer hard disk drive with 3 disks to verify the simulation results. The simulation results agree very well with the experimental ones. The proposed theory may be effectively expanded to the complex structure of a disk-spindle system.

#### 1. 서 론

회전하는 디스크-스핀들 시스템은 터보 기계 등의 대형 회전 기기뿐 아니라, 컴퓨터 하드디스크 드라이브와 같은 소형 정밀기기 등 다양한 분야에 응용되어 왔다. 특히 유연한 디스크와 회전축계의 동특성 간섭 및 회전속도 증가에 따른 디스크의 면내 변위와 면외 변위의 연성 효과 등을 고려한 시스템의 정확한 동특성 해석에 관한 연구는 많은 사람들의 관심의 대상이 되어 왔다.

Kirkhope 와 Wilson<sup>(1)</sup>은 유한 요소법을 이용하여 회전 디스크의 진동과 응력을 해석하였으며

Nelson 과 McVaugh<sup>(2)</sup>는 유한 요소 해석을 통하여 강체 디스크를 장착한 회전축 계의 동특성을 고찰하였다. 이들 연구가 회전 디스크와 회전축 계의 해석이 별개로 이루어 진데 비해 Dopkin 과 Shoup<sup>(3)</sup>은 디스크의 유연성이 회전축 계의 첫번째 모드에 대한 공진 주파수를 현저히 떨어뜨린다는 것을 규명하였다. 그 외 유연 디스크와 유연 회전축이 연성된 시스템에 대하여 많은 연구가 진행되어 왔다.<sup>(4-6)</sup>

최근에 와서 Shen 과 Ku<sup>(7)</sup>는 스핀들을 강체로 가정하여 다중 유연 디스크와 연성된 시스템의 고유 진동을 해석하였으며, 이를 이용하여 하드 디스크 드라이브의 진동 모드 연성을 고찰하였다. Chun 와 Lee<sup>(8)</sup>는 부분 구조 합성법과 모드 가정법을 이용하여 유연한 블레이드-디스크-축 시스템의 진동을 해석하였으며 Lee 와 Chun<sup>(9)</sup>은 모드 가정법을 이용하여 유연 디스크와 유연한 스핀들이 연성된 시스템에 대하여 고유 진동수를 해석하였다.

\* LG 전자

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : ghjang@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0431 FAX : (02)2292-3406

이들의 연구에서는 디스크의 운동을 묘사할 때 Lagrange 방법을 이용한 일반화된 좌표로 나타내었다.<sup>(7-9)</sup> 즉 디스크의 운동 방정식은 일반화된 좌표를 이용한 이산화 된 형식으로 표현되었다.

본 연구에서는 미소 병진 변위 및 회전 변위를 갖는 강체 운동과 탄성 변형이 연성된 회전 디스크의 편미분 운동 방정식을 Hamilton의 원리를 이용하여 유도하였다. 유도된 운동 방정식에 유한 요소법과 부분 구조 합성법을 적용하여 회전하는 유연한 디스크-스핀들 시스템의 고유 진동을 해석할수 있는 방법을 제시하였다. 또한 해석의 타당성을 검증하기 위하여 3.5" 하드디스크 드라이브에 모달 실험을 수행하였으며, 회전 속도가 증가함에 따른 디스크의 비선형성과 고정 지지축의 강성이 시스템의 고유 진동수 변화에 미치는 영향을 고찰하였다.

## 2. 운동 방정식

Fig. 1과 같은 회전하는 디스크-스핀들 시스템의 경우 디스크의 변형은 디스크를 제외한 시스템의 운동에 의한 디스크의 강체 변위와 디스크 자체의 탄성 변형의 합으로 나타낼 수 있고, 회전하는 스핀들의 경우도 축 방향의 강체 운동과 스핀들 자체의 탄성 변형의 합으로 나타낼 수 있다. 따라서 강체 운동을 포함하는 디스크와 스핀들의 운동 방정식의 유도는 회전하는 디스크-스핀들 시스템을 해석하는데 필수적이다.

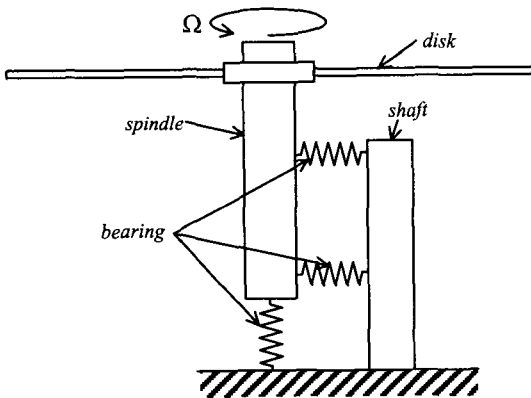


Fig. 1 Rotating disk-spindle system

### 2.1 미소 강체 운동과 탄성 변형을 하는 회전 디스크의 운동 방정식

Fig. 2는 공간상에서 미소 강체 운동을 하며 일정한 각속도 Ω로 회전하는 디스크를 나타낸다.  $x_1, y_1, z_1$ 은 공간에 고정된 관성 좌표계(inertia reference frame)이며  $x_2, y_2, z_2$ 는 관성 좌표계에 대해 미소 병진 변위와 회전 변위를 갖는 local reference frame 이다. 디스크의 탄성 변형은 이 local reference frame 으로부터 표현된다.

스핀들의 회전 속도가 일정하면 디스크 중앙면에서의 반경 방향 변위는 축 대칭하며 원주 방향 변위는 무시할 수 있으므로 디스크 내 임의 한 점의 변위는 Kirchhoff 평판 이론에 따라 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= u_D(r) - z \frac{\partial w_D(r, \theta, t)}{\partial r} \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= -z \frac{\partial w_D(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \\ u_z(r, \theta, z, t) &= w_D(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $u_r, u_\theta$  와  $u_z$ 는 각각 디스크 내 임의 한 점의  $r, \theta$  와  $z$  방향의 변위를 나타내고,  $u_D$  와  $w_D$ 는 각각 중앙면(middle surface)상에 있는 점의 면내(in-plane) 및 면외(transverse) 변위를 나타낸다. 디스크가 고속으로 회전하게 되면 반경 방향의 변위가 커지고 강성을 증가 시킨다. 이는 결국 면외 방향의 변위에 영향을 미쳐 면외 방향의 강성도 증가 시키는데 속도가 증가할수록 비선형성을 띠게 된다. 따라서 회전 디스크의 기하학적 비선형성을 고려하기 위해서 von Karman 비선형 변형률을 사용하였으며 변형률-변위 관계식은 다음과 같다.

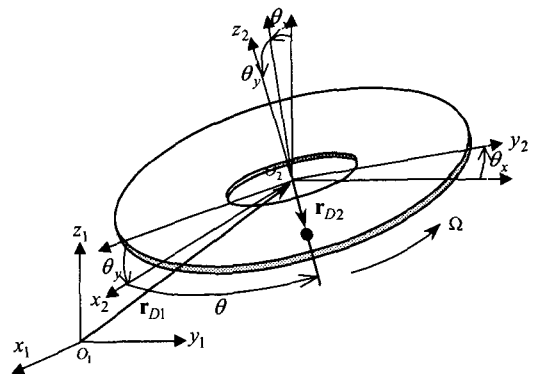


Fig. 2 Rotating elastic disk with rigid body motion

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right)^2 \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  와  $\varepsilon_{r,\theta}$  는 각각 디스크 단면에서의  $r, \theta$  방향의 변형률과 전단 변형률을 나타내며 변위 관계식 (1)을 이용하면 식 (2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i - z \tilde{\varepsilon}_i \quad (i = r, \theta, r\theta) \quad (3)$$

여기서  $\bar{\varepsilon}$  는  $z$  와 무관한 디스크 중앙면에서의 변형률이며  $z \tilde{\varepsilon}$  은 디스크 중앙면으로부터의 변형률로  $z$  에 비례한다.

디스크의 두께가 반경 방향에 비해 매우 작기 때문에 평면 응력 상태로 가정할 수 있고 Hooke의 법칙을 적용하면 디스크의 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E_D}{1-\nu_D^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_D & 0 \\ \nu_D & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_D}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $E_D$  와  $\nu_D$  는 각각 디스크의 영률과 프아송비이며 식 (3)을 이용하여 식 (4)를 다시 쓰면  $z$  와 무관한 디스크 중앙면에서의 응력항  $\bar{\sigma}$  와  $z$  에 비례하는 디스크 중앙면으로부터의 응력항  $z \tilde{\sigma}$  로 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_i = \bar{\sigma}_i - z \tilde{\sigma}_i \quad (i = r, \theta, r\theta) \quad (5)$$

식 (2)와 (4)를 이용하면 디스크의 변형 에너지  $U_D$  는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_D = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_{r\theta} \varepsilon_{r\theta}) dV \quad (6)$$

여기서  $V$  는 디스크의 체적이다.

Fig. 2 에서 변형 후 디스크 내 임의 한 질점의 위치 벡터  $\mathbf{R}_D$  는 관성 좌표계에 대한 local reference frame 중심의 변위 벡터  $\mathbf{r}_{D1}$  와 local reference frame 에 대한 변형 후 디스크 한 질점의 위치 벡터  $\mathbf{r}_{D2}$  의 합으로 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{r}_{D1} + \mathbf{r}_{D2} \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_{D1} = X_D \mathbf{i}_1 + Y_D \mathbf{j}_1 + Z_D \mathbf{k}_1 \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_{D2} = (r + u_r)(\cos \theta \mathbf{i}_2 + \sin \theta \mathbf{j}_2) + u_z \mathbf{k}_2 \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$  과  $\mathbf{k}_1$  은 관성 좌표계의 단위 벡터를,  $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2$  와  $\mathbf{k}_2$  는 local reference frame 의 단위 벡터를 나타낸다.  $X_D, Y_D$  와  $Z_D$  는 각각 관성 좌표계에 대한 local reference frame 중심의 병진 변위이고  $r$  은 디스크 중심에서 변형 전 질점까지의 반경 방향의 위치이다. 디스크내 질점의 속도  $\mathbf{v}_D$  는 위치 벡터의 시간에 대한 전미분으로 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{v}_D = \frac{d\mathbf{R}_D}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{D1} + \omega_2 \mathbf{r}_{D2} + \omega_D \times \mathbf{r}_{D2} \quad (10)$$

여기서  $\omega_2 \mathbf{r}_{D2}$  는 local reference frame 에 대한 시간 미분이며  $\omega_D$  는 local reference frame 의 각속도를 local reference coordinates 로 아래와 같이 표현한 것이다.

$$\omega_D = \dot{\theta}_x \cos \theta_y \mathbf{i}_2 + \dot{\theta}_y \mathbf{j}_2 + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \mathbf{k}_2 \quad (11)$$

여기서  $\theta_x$  와  $\theta_y$  는 각각 local reference frame 의 Euler 각이다. 식 (1)과 식 (8), (9) 그리고 (11) 을 이용해 식 (10)을  $z$  와 무관한 디스크 중앙면에서의 속도항  $\bar{\mathbf{v}}_D$  와  $z$  에 비례하는 디스크 중앙면으로부터의 속도항  $z \tilde{\mathbf{v}}_D$  로 나누어 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v}_D = \bar{\mathbf{v}}_D - z \tilde{\mathbf{v}}_D \quad (12)$$

식 (12)로부터 속도의 내적을 구하고 디스크의 두께가 얇다는 가정하에 두께 방향으로 적분을 수행하면 디스크의 운동 에너지  $T_D$  는 다음과 같이 근사화 된다.

$$T_D = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{v}_D dm \approx \frac{1}{2} \rho_D h_D \int \bar{\mathbf{v}}_D \cdot \bar{\mathbf{v}}_D dA \quad (13)$$

여기서  $\rho_D$  와  $h_D$  는 각각 디스크의 밀도와 두께이다.

식 (6)과 (13)에 Hamilton 의 원리를 적용하여 미소 강체 운동과 탄성 변형이 연성된 회전 디스크의 비선형 방정식을 구하였다.  $\theta_x$  와  $\theta_y$  가 미소각이라는 가정하에 구해진 비선형 방정식을  $\theta_x$  와  $\theta_y$  에 관하여 선형화시키면 다음과 같은 7 개의 디스크 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$X_D$ 에 대한 식

$$\rho_D h_D \ddot{X}_D = 0 \quad (14)$$

$Y_D$ 에 대한 식

$$\rho_D h_D \ddot{Y}_D = 0 \quad (15)$$

$Z_D$ 에 대한 식

$$\rho_D h_D \left( \ddot{Z}_D + \frac{\partial^2 w_D}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (16)$$

$\theta_x$ 에 대한 식

$$\begin{aligned} & \rho_D h_D (\ddot{\theta}_x r^2 \sin^2 \theta + \Omega \dot{\theta}_y r^2 + \Omega^2 w_D r \sin \theta) \\ & + \rho_D h_D \left( \frac{\partial^2 w_D}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta^2} \right) r \sin \theta \\ & = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$\theta_y$ 에 대한 식

$$\begin{aligned} & \rho_D h_D (\ddot{\theta}_y r^2 \cos^2 \theta - \Omega \dot{\theta}_x r^2 - \Omega^2 w_D r \cos \theta) \\ & - \rho_D h_D \left( \frac{\partial^2 w_D}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta^2} \right) r \cos \theta \\ & = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$w_D$ 에 대한 식

$$\begin{aligned} & \rho_D h_D \left( \ddot{Z}_D + \frac{\partial^2 w_D}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta^2} \right) \\ & - \rho_D h_D (\ddot{\theta}_x r \sin \theta - \ddot{\theta}_y r \cos \theta) + 2\Omega (\dot{\theta}_x r \cos \theta + \dot{\theta}_y r \sin \theta) \\ & + \frac{\partial}{r \partial r} \left\{ r \left( q_r \frac{\partial w_D}{\partial r} \right) \right\} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( q_\theta \frac{\partial w_D}{r \partial \theta} \right) \\ & - \frac{\partial}{r \partial r} \left\{ r \left( \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + 2 \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} \right) \right\} \\ & - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} + 2 \frac{M_{r\theta}}{r} \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$u_D$ 에 대한 식

$$\frac{q_r - q_\theta}{r} + \frac{\partial q_r}{\partial r} + \rho_D h_D \Omega^2 r = 0 \quad (20)$$

여기서  $M_i, q_i (i=r, \theta, r\theta)$ 는 각각 중앙면에서의 내부 모멘트와 선형화 시킨 내부 힘을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} z \tilde{\sigma}_i dz \quad (21)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_1 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{linearized}$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E_D h_D}{1 - \nu_D^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_D & 0 \\ \nu_D & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_D}{2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{linearized}$ 는 식 (3)의 등호 오른쪽 첫번째 항에서 비선형 항이 다른 항에 비해 무시할 수 있을 정도로 작으므로 비선형 항을 무시하여 선형화한 중앙면에서의 변형률 벡터이며 변위의 식으로 표현해보면 다음과 같다.

$$[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\theta \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{r\theta}]^T linearized = \left[ \frac{\partial u_D}{\partial r} \quad \frac{u_D}{r} \quad 0 \right]^T \quad (23)$$

식 (14)와 (15)에서 디스크의 면내 방향의 강체 변위는 서로 비연성 되어 있음을 알 수 있으며 식 (16)은 디스크의 면외 방향 강체 변위와 탄성 변형이 연성 되어 있음을 나타낸다. 식 (17)과 (18)은 디스크의 미소 회전 강체 변위와 면외 탄성 변형이 연성 되어 있다는 것을 보여 주고 있다. 위 식이 모두 선형식인데 비해 식 (19)를 보면 디스크의 면내 변위와 면외 변위가 연성된 비선형 방정식을 알 수 있다. 일반적인 비선형 방정식의 해법은 반복법을 이용하여 평형 위치를 찾아내어 해를 구하는 것이다. 그런데 각속도가 일정한 정상 상태라는 가정하에 식 (20)은 면내 변위  $u_D$ 에 대한 선형식으로서 정적 해석 문제가 되어 쉽게 풀 수 있다. 이로부터 선형화된 내부 힘인  $q_r, q_\theta$ 를 구하게 되면 식 (19)는 일정 회전 속도에서 면외 방향 변위  $w_D$ 에 대한 선형 방정식이 되어 해석이 용이해 진다.

## 2.2 회전 스피ن들의 운동 방정식

회전하는 스피ن들은 회전관성을 고려한 Rayleigh 보로 모델링할 수 있으며,<sup>(2)</sup> 축 방향의 강체 운동을 고려한 아래의 식으로 표현할 수 있다.

$u_H$ 에 대한 식

$$\rho_H \left( A_H \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} - I_H \frac{\partial^4 u_H}{\partial t^2 \partial z^2} - 2I_H \Omega \frac{\partial^3 v_H}{\partial t \partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} = 0 \quad (24)$$

$v_H$ 에 대한 식

$$\rho_H \left( A_H \frac{\partial^2 v_H}{\partial t^2} - I_H \frac{\partial^4 v_H}{\partial t^2 \partial z^2} + 2I_H \Omega \frac{\partial^3 u_H}{\partial t \partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} = 0 \quad (25)$$

$Z_H$ 에 대한 식

$$m_H \ddot{Z}_H = 0 \quad (26)$$

여기서  $u_H$  와  $v_H$  는 각각 스피들의  $x_1$  과  $y_1$  방향으로의 굽힘 변형을 나타내며 단면 회전 변위는 굽힘 변형으로부터 구할 수 있다.  $Z_H$  는 스피들의  $x_3$  방향 강체 변위를 나타내고  $\rho_H, A_H$  와  $I_H$  는 각각 스피들의 밀도, 단면적 그리고 단면의 2 차 관성 모멘트이다.  $M_x$  와  $M_y$  는 스피들 단면의 내부 모멘트이며 다음과 같다.

$$M_x = E_H I_H \frac{\partial^2 u_H}{\partial x^2} \quad (27)$$

$$M_y = E_H I_H \frac{\partial^2 v_H}{\partial y^2}$$

여기서  $E_H$  는 스피들의 영률이다.

### 2.3 축의 운동 방정식

축은 디스크-스핀들-베어링 시스템을 지지하고 회전하지 않는 부분이며 Euler 보로 모델링하였다. 축의 운동 방정식은 스피들이 회전하지 않을 때의 단면 회전 관성을 제외한 식과 유사하며 다음과 같다.

$u_S$  에 대한 식

$$\rho_S A_S \frac{\partial^2 u_S}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} = 0 \quad (28)$$

$v_S$  에 대한 식

$$\rho_S A_S \frac{\partial^2 v_S}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} = 0 \quad (29)$$

여기서  $u_S$  와  $v_S$  는 각각  $x_1$  과  $y_1$  방향의 축 굽힘 변위를 나타내며  $\rho_S$  와  $A_S$  는 각각 축의 밀도 및 단면적을 의미한다.

### 3. 유한 요소에 의한 이산화

앞 절에서 구해진 디스크의 운동 방정식 (14)-(20)을 해석하기 위하여 Galerkin 방법을 도입하였고 Galerkin 방법에 의한 디스크 방정식의 weak form 은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{Bmatrix}$$

$$+ \Omega \begin{Bmatrix} W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 2I_D \\ -2I_D & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_4 \\ \psi_5 \end{Bmatrix}$$

$$+ \int_{\Phi} \begin{Bmatrix} W_3 \\ W_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \rho_D h_D \\ \rho_D h_D & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_3 \\ \psi_6 \end{Bmatrix} d\Phi$$

$$+ \rho_D h_D \int_{\Phi} \begin{Bmatrix} W_4 \\ W_5 \\ W_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \sin \theta \\ 0 & 0 & -r \cos \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{Bmatrix} d\Phi$$

$$+ 2\rho_D h_D \Omega \int_{\Phi} \begin{Bmatrix} W_4 \\ W_5 \\ W_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \cos \theta \\ 0 & 0 & -r \sin \theta \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{Bmatrix} d\Phi$$

$$+ \rho_D h_D \int_{\Phi} W_6 \psi_6 d\Phi$$

$$+ \rho_D h_D \Omega \int_{\Phi} \left( W_6 \frac{\partial \psi_6}{\partial \theta} - \frac{\partial W_6}{\partial \theta} \psi_6 \right) d\Phi$$

$$+ \int_{\Phi} \left\{ \begin{array}{l} -\rho_D h_D \Omega^2 \frac{\partial W_6}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_6}{\partial \theta} \\ + \tilde{\varepsilon}(W_6)^T \mathbf{D}_2 \tilde{\varepsilon}(\psi_6) \\ + \rho_D h_D \Omega^2 \frac{\partial W_6}{\partial r} r \psi_6 \\ - \tilde{\varepsilon}(W_6)^T \mathbf{D}_2 \tilde{\varepsilon}^{linearized}(\psi_7) \psi_6 \end{array} \right\} d\Phi$$

$$+ \int_{\Phi} \left\{ \tilde{\varepsilon}^{linearized}(W_7)^T \mathbf{D}_1 \tilde{\varepsilon}^{linearized}(\psi_7) \right\} d\Phi$$

$$= -\rho_D h_D \Omega^2 \int_{\Phi} W_7 r d\Phi \quad (30)$$

여기서  $\psi_i (i=1,2,\dots,7)$  은  $X_D, Y_D, Z_D, \theta_x, \theta_y, w_D$  와  $u_D$  에 대응하는 디스크 방정식의 근사해이며  $W_i (i=1,2,\dots,7)$  은 근사해를 대입한 후의 유수를 최소화하기 위한 가중 함수이다.

회전 디스크를 이산화하기 위해서 곡선 경계를 가지고 있어 디스크를 해석하는데 적합할 뿐 아니라 비교적 적은 요소수로도 만족할 만한 해를 제공하는 Fig. 3 과 같은 환형 섹터 요소를 사용하였다.<sup>(12)</sup> 디스크 면의 변위에 대한 형상 함수로는 적합 Hermite 보간 함수( $N_6$ )를 사용하여 절점에서 기울기 뿐만 아니라 비틀림(twist) 조건까지 만

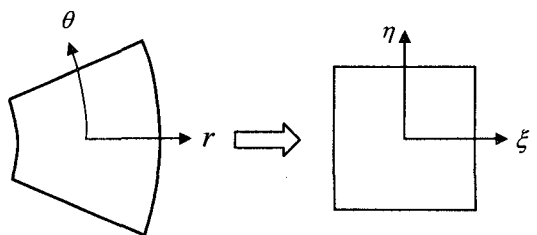


Fig. 3 Annular sector element

족하도록 하였으며 반경 방향 변위에 대한 형상함 수로는 Lagrange 보간 함수( $N_7$ )를 사용하였다.

디스크 요소에 대한 변위를 형상 함수와 절점 의 변위로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_i &= N_i d_i (i=1,2,\dots,5) \\ \psi_6 &= \mathbf{N}_6 \mathbf{d}_6 \\ \psi_7 &= \mathbf{N}_7 \mathbf{d}_7 \end{aligned} \quad (31)$$

여기서  $\psi_i (i=1,2,\dots,5)$  는 강체 변위이므로  $N_i (i=1,2,\dots,5)$  는 1 이 된다.  $\mathbf{d}_6$  와  $\mathbf{d}_7$  은 디스크 요소 의 면의 및 면내 방향의 절점 변위이며 각각 다음 과 같다.

$$\mathbf{d}_6 = \left[ w_1 \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} \quad \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \quad \frac{\partial w_1}{\partial r \partial \theta} \quad \dots \quad \frac{\partial w_4}{\partial r \partial \theta} \right]^T \quad (32)$$

$$\mathbf{d}_7 = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T$$

식 (31)을 식 (30)에 대입하고 이산화하여 디스크 요소 행렬을 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{m}_D^1 = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{g}_D^1 = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 2I_D \\ -2I_D & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{m}_D^2 = \rho_D h_D \int_{\Omega} \mathbf{N}_6^T d\Omega \quad (35)$$

$$\mathbf{m}_D^3 = \rho_D h_D \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{Bmatrix} \mathbf{N}_6^T d\Omega \quad (36)$$

$$\mathbf{g}_D^2 = 2\rho_D h_D \Omega \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{Bmatrix} \mathbf{N}_6^T d\Omega \quad (37)$$

$$\mathbf{m}_D^4 = \rho_D h_D \int_{\Omega} \mathbf{N}_6 \mathbf{N}_6^T d\Omega \quad (38)$$

$$\mathbf{g}_D^3 = \rho_D h_D \Omega \int_{\Omega} \left( \mathbf{N}_6 \frac{\partial \mathbf{N}_6^T}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{N}_6}{\partial \theta} \mathbf{N}_6^T \right) d\Omega \quad (39)$$

$$\mathbf{k}_D^1 = \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}_2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (40)$$

$$\mathbf{k}_D^3 = \rho_D h_D \Omega^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}_6}{\partial r} r \mathbf{N}_6^T d\Omega \quad (41)$$

$$\mathbf{k}_D^2 = -\rho_D h_D \Omega^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}_6}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{N}_6^T}{\partial \theta} d\Omega \quad (42)$$

$$\mathbf{k}_D^4 = -\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}_2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{linearized} \mathbf{N}_6^T d\Omega \quad (43)$$

$$\mathbf{k}_D^5 = -\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{linearized T} \mathbf{D}_1 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{linearized} d\Omega \quad (44)$$

$$\mathbf{f}_D = -\rho_D h_D \Omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{N}_7 r d\Omega \quad (45)$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{E_D h_D^3}{12(1-\nu_D^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_D & 0 \\ \nu_D & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_D}{2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

여기서  $m_D$  와  $I_D$  는 각각 디스크의 질량과 관성 모멘트이다. 식 (33)은 디스크의 강체 운동 ( $X_D, Y_D, Z_D, \theta_x, \theta_y$ )에 의한 관성 행렬이며 식 (34) 은 디스크의 미소 회전 강체 운동 ( $\theta_x, \theta_y$ )에 의한 gyroscopic 행렬이다. 디스크를 강체로 가정하게 되면 식 (33)와 (34)만 나타나게 된다. 식 (35)는 면외 방향 강체 운동과 면외 탄성 변형이 연성된 요소 관성 행렬이고 식 (36)는 미소 회전 강체 운동과 면외 탄성 변형이 연성된 요소 관성 행렬 이며 식 (37)은 미소 회전 강체 운동과 면외 탄성 변형이 연성된 요소 gyroscopic 행렬이다. 식 (38) 은 면외 탄성 변형에 의한 요소 관성 행렬이며 식 (39)은 면외 탄성 변형에 의한 요소 gyroscopic 행 렬이다. 식 (40)는 면외 굽힘 변형에 의한 요소 강 성 행렬이고 식 (41)과 (42)은 디스크 회전에 의한 요소 강성 행렬이며 식 (43)는 반경 방향 변위와 면외 방향 변위의 연성에 의한 요소 강성 행렬이 다. 식 (44)은 반경 방향의 요소 강성 행렬이며 식 (45)는 회전에 의한 원심력으로 생기는 요소 힘 벡터이다.

회전 스피ن들의 운동 방정식에 대해서도 Galerkin 방법을 적용하여 이산화하면 요소 행렬을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{m}'_H = \int_z \mathbf{N}_8 \mathbf{C}_1 \mathbf{N}_8^T dz \quad (47)$$

$$\mathbf{m}^r_H = \int_z \frac{\partial \mathbf{N}_8}{\partial z} \mathbf{C}_2 \frac{\partial \mathbf{N}_8^T}{\partial z} dz \quad (48)$$

$$\mathbf{g}_H = \Omega \int_z \frac{\partial \mathbf{N}_8}{\partial z} \mathbf{C}_3 \frac{\partial \mathbf{N}_8^T}{\partial z} dz \quad (49)$$

$$\mathbf{k}_H = \int_z \frac{\partial^2 \mathbf{N}_8}{\partial z^2} \mathbf{C}_4 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_8^T}{\partial z^2} dz \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} \rho_H A_H & 0 \\ 0 & \rho_H A_H \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_2 &= \begin{bmatrix} \rho_H I_H & 0 \\ 0 & \rho_H I_H \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 2\rho_H I_H \\ -2\rho_H I_H & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_4 &= \begin{bmatrix} E_H I_H & 0 \\ 0 & E_H I_H \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

여기서  $N_8$ 은 보 요소에 대한 형상 함수를 나타낸다. 식 (47)과 (48)은 각각 스핀들의 굽힘 변위와 단면 회전 변위에 의한 관성 행렬이며 식 (49)는 요소 gyroscopic 행렬 그리고 식 (50)은 요소 강성 행렬이다.

고정 축에 대해서도 Galerkin 방법을 적용하여 이산화하면 요소 행렬을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 회전 스핀들의 요소 행렬에서 단면 회전 관성에 의한 행렬과 gyroscopic 행렬을 제외한 것과 같다.

$$m_s = \int_z N_8 C_5 N_8^T dz \quad (52)$$

$$k_s = \int_z \frac{\partial^2 N_8}{\partial z^2} C_6 \frac{\partial^2 N_8^T}{\partial z^2} dz \quad (53)$$

식 (52)은 고정 축의 요소 관성 행렬이며 식 (53)은 요소 강성 행렬을 나타내고 행렬  $C_5$ 와  $C_6$ 는 식 (51)의  $C_1$ 과  $C_4$ 에서 고정 축의 물성치를 대입하면 된다.

#### 4. 부분 구조 합성법

회전 디스크-스핀들-베어링으로 구성된 시스템 각 구조물의 local reference frame 으로부터 유도된 운동 방정식 및 행렬-벡터 방정식은 전체 시스템으로 조합시 내부 경계라 불리는 부분 구조물의 연결 지점에서 기하학적 구속 조건을 만족시켜 주어야만 한다.<sup>(10,11)</sup> 즉 디스크와 스핀들의 경계에서 디스크의 병진 강제 운동과 스핀들의 변형 사이에는 식 (54)를 만족시켜야 하며, 디스크의 미소 회전 강제 운동과 스핀들의 단면 회전 각 변위 관계는 식 (55)를 만족하여야 한다.

$$\begin{cases} X_D = u_H^d \\ Y_D = v_H^d \\ Z_D = Z_H^d \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} \theta_x = -\frac{\partial v_H^d}{\partial z} \\ \theta_y = \frac{\partial u_H^d}{\partial z} \end{cases} \quad (55)$$

여기서 위첨자  $d$ 는 디스크가 장착되는 곳에서의 스핀들의 변형을 의미한다.

3장에서 유도한 요소 행렬과 식 (54)-(55)의 관계를 이용하여 전체 시스템 행렬-벡터 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{x} + G\dot{x} + Kx = 0 \quad (56)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_H + M_D^1 & M_D^3 & 0 & 0 \\ & M_D^4 & M_D^2 & 0 \\ \text{symm.} & & m_H + m_D & 0 \\ & & & M_S \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_H + G_D^1 & G_D^2 & 0 & 0 \\ & G_D^3 & 0 & 0 \\ \text{skew-symm.} & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_H & 0 & 0 & 0 \\ & K_D & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & 0 & 0 \\ & & & K_S \end{bmatrix} + K_{BR} \quad (59)$$

여기서  $M, G$ 와  $K$ 는 각각 전체 시스템의 관성, gyroscopic, 강성 행렬이다. 아래 첨자  $H, D, S$ 와  $BR$ 은 각각 스핀들, 디스크, 축과 베어링에 대한 요소 조합 행렬을 나타내며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_H &= \sum m_H & M_S &= \sum m_S & M_D^i &= \sum m_D^i (i=1,2,3,4) \\ G_H &= \sum g_H & G_D^i &= \sum g_D^i (i=1,2,3) \\ K_H &= \sum k_H & K_D &= \sum k_D & K_S &= \sum k_S \end{aligned} \quad (60)$$

#### 5. 수치해석 및 실험에 의한 검증

##### 5.1 수치 해석

앞 절에서 제안한 식 (56)을 상태 공간 행렬-벡터식으로 변환하고 이로부터 유도된 고유치 문제를 풀기 위해 QR 반복법을 사용하여 회전 디스크-스핀들 시스템의 고유 진동수를 해석할 수 있는 수치 해석 프로그램을 개발하였다.

개발된 프로그램을 이용하여 Fig. 4와 같은 3.5인치 하드디스크 드라이브의 디스크-스핀들 시스템을 해석하였다. Fig. 4와 같이 해석 모델로 사용된 하드디스크 드라이브는 3장의 디스크가 스핀들에 고정되어 있고, 2개의 볼 베어링에 의해 지지되어 있다. 베어링은 축에 의해 지지되어 있으며 축은 housing에 고정되어 있다.

해석 모델을 유한 요소로 나누기 위하여 디스크 1장은 반경 방향으로 2개 원주 방향으로 16개, 총 32개의 요소로 분할하였으며 디스크의 자유도는 240이다. 스핀들은 요소 수를 16개로 하여 68 자유도를 가지고 있고 축은 8개의 요소에 36 자유도로서 전체 시스템의 총 자유도는 824로 구성되어 있다. 디스크를 고정 시키는 클램프나 스페이스 그리고 영구 자석 등은 강체로 가정하여 스핀들의 절점에 관성 행렬을 추가하였다. 베어링의 강성은 본 연구실에서 A.B Jones의 이론을 이

용하여 회전축계의 5 자유도에 해당하는 등가 강성 계수를 계산 할 수 있도록 개발된 WinBAP 프로그램을 이용하여 계산하였다.<sup>(13)</sup>

그리고 수치 해석 결과를 검증하기 위하여 Fig. 3의 3.5 인치 하드디스크 드라이브의 디스크-스핀들 시스템에 모달 실험을 수행하였다. 실험시 모터 housing의 영향을 배제하기 위하여 모터 housing을 실험 지그에 접촉제로 고정하였다.

5.2 해석 결과

Fig. 5는 회전 속도 변화에 따른 고유진동수 변화를 해석한 것으로 실험 결과와 수치 해석결과가 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 5에서 B(M,N)와 U(M,N)은 절점 원과 절점 직경이 각각 M, N 개인 균형 및 비균형 모드<sup>(8)</sup>를 나타내며 아래 첨자 b와 f는 각각 후진과 전진 모드를 의미한다. U(0,0)으로 표시된 모드는 절점 직경과 절점 원이 없는 디스크 모드와 스핀들의 축 방향 운동이 연성된 비균형 모드이며 B(0,0)은 축 방향 균형 모드를 나타낸다. Fig. 6에 대표적인 저차 모드인 U(0,1), B(0,1), U(0,0)와 B(0,0)의 모드 형상을 도시하였다.

실험시 축 방향의 비균형 모드 U(0,0)와 균형 모드 B(0,0)의 고유진동수를 분리할 수 없었다. 그 이유는 해석 결과에서 보듯이 두 모드가 매우 근

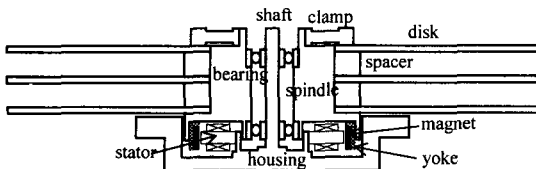


Fig. 4 Disk-spindle system of a hard disk drive

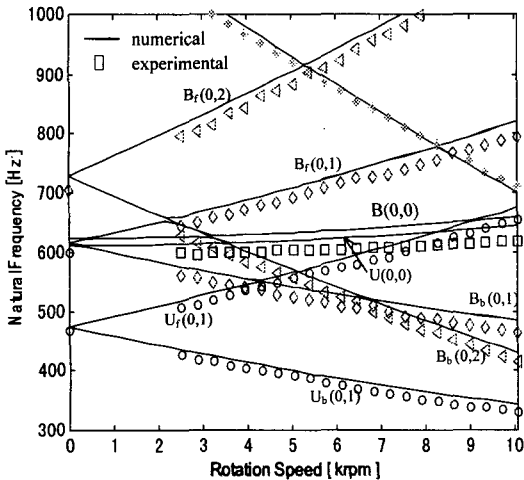
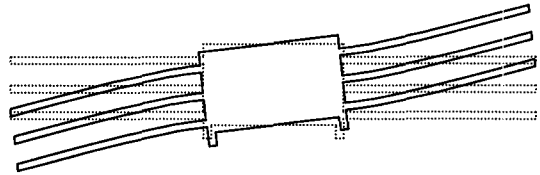
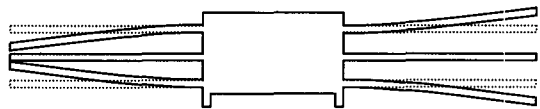


Fig. 5 Comparison of natural frequencies between numerical and experimental results

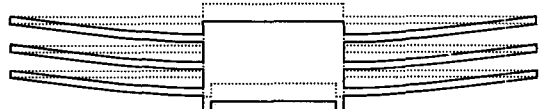
접해 있고 불베어링의 축방향 강성이 해석시 사용된 강성보다 커서 실제적으로 두 모드가 더욱 근접해 있으며 충격 망치로 직접 회전 디스크를 가격하기 때문에 가진력과 응답이 일정치 않아 실험 과정에서 주파수 분석기로부터 주파수를 추출할 때 오차가 발생하였기 때문인 것으로 사료된다.



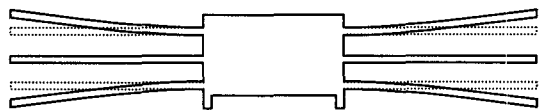
(a) U(0,1) mode



(b) B(0,1) mode



(c) U(0,0) mode



(d) B(0,0) mode

Fig. 6 Mode shapes of disk-spindle system

Table 1 Comparison of natural frequencies between numerical and experimental results ( $\Omega = 5400$  rpm)

Mode	Analysis [Hz]	Experiment [Hz]	Error [%]
1 U <sub>b</sub> (0,1)	396	388	2.02
2 B <sub>b</sub> (0,1)	536	520	2.99
3 U <sub>f</sub> (0,1)	574	564	1.74
4 B <sub>b</sub> (0,2)	560	544	2.86
5 U (0,0)	622	-	-
6 B (0,0)	635	604	4.88
7 B <sub>f</sub> (0,1)	716	700	2.23



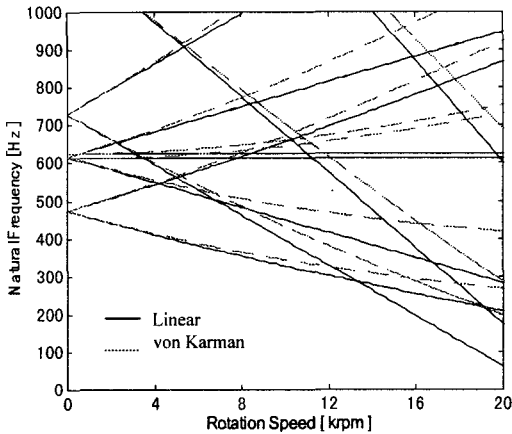


Fig. 7 Variation of natural frequencies of disk-spindle system due to the rotating speed

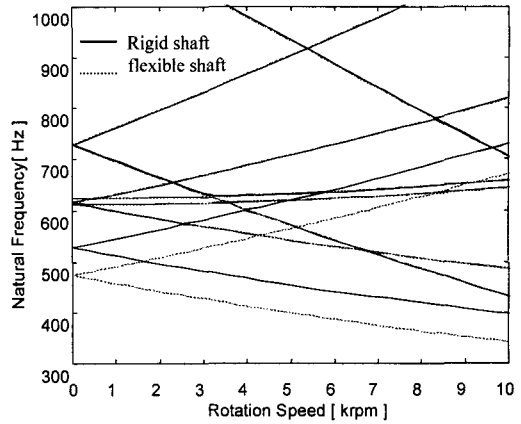


Fig. 8 Simulated natural frequencies between the rigid and the flexible shaft

Table 1 은 회전 속도 5400 rpm 에서의 해석 결과와 실험 결과를 정리한 것으로 결과가 오차 5% 이내에서 잘 맞고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7 는 스펀들의 회전수를 20000 rpm 까지 증가시켜 가면서 시스템 고유 진동수의 변화를 해석한 결과이다. 약 6000 rpm까지는 거의 선형적으로 고유 진동수가 변하지만 회전 속도가 증가함에 따라 디스크의 원심효과에 의해 고유 진동수가 비선형적으로 증가함을 알 수 있다. 하드디스크 드라이브가 고속화 되어 가는 추세에 비추어 분다면 디스크의 비선형 효과를 반드시 고려해 주어야 한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 8 은 강제 축과 유연 축에 경우에 대하여 회전 속도의 변화에 따른 고유 진동수를 해석한 결과이다. 축의 강성은 굽힘 연성 모드 U(0,1)의 고유 진동수를 현저히 저하시킨다는 것을 알 수 있다. 그 이유는 베어링의 강성에 축의 강성이 추가 되어 베어링과 축의 등가 강성은 결과적으로 감소 되기 때문이다.

## 6. 결 언

일반적인 회전축계의 5 자유도 미소 강제 운동과 탄성 변형이 연성된 회전하는 유연 디스크만의 편미분 운동방정식을 Hamilton의 원리를 이용하여 유도하였다. 그리고 유한요소법과 부분구조합성법을 이용하여 디스크-스핀들 시스템의 고유 진동수를 해석하였으며 모달 실험을 통하여 본 논문에서 제시된 해석 방법이 타당함을 확인하였다. 복잡한 구조의 디스크-스핀들 시스템이라도 단순 부분 구조물로 분해하면 쉽게 모델링 할 수 있고, 확장성이 뛰어나므로 유한요소법과 부분 구조 합성법은

회전 디스크-스핀들 시스템을 해석하는데 매우 효과적인 방법이다.

## 후 기

본 논문은 1999년 한양대학교 교내 연구비 지원에 의한 결과입니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Kirkhope, J. and Wilson, G. J., 1976, "Vibration and Stress Analysis of Thin Rotating Discs Using Annular Finite Elements," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 44, pp. 461~474.
- (2) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., May 1976, "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements," *Journal of Engineering for Industry*, pp. 593~600.
- (3) Dopkin, J. A. and Shoup, T. E., Nov. 1974, "Rotor Resonant Speed Reduction Caused by Flexibility of Discs," *Journal of Engineering for Industry*, pp. 1328~1333.
- (4) Chivens, D. R. and Nelson, H. D., Aug. 1975, "The Natural Frequencies and Critical Speeds of a Rotating, Flexible Shaft-Disk System," *Journal of Engineering for Industry*, pp. 881~886.
- (5) Wu, F. and Flowers, G. T., 1992, "A Transfer Matrix Technique for Evaluating the Natural Frequencies and Critical Speeds of a Rotor With Multiple Flexible Discs," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, pp. 242~248.
- (6) Flowers, G. T., and Ryan, S. G., 1993, "Development of a Set of Equations for Incorporation Disk Flexibility Effects in Rotordynamic Analyses," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*,

- Vol. 115, pp. 227~233.
- (7) Shen, I. Y. and Ku, C.-P. R., 1997, "A Nonclassical Vibration Analysis of a Multiple Rotating Disk and Spindle Assembly," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 165~174.
- (8) Chun, S. -B. and Lee, C. -W., 1996, "Vibration Analysis of Shaft-Bladed Disk System by Using Substructure Synthesis and Assumed Modes Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 189, No. 5, pp. 587~608.
- (9) Lee, C. -W and Chun, S. -B, 1998, "Vibration Analysis of a Rotor With Multiple Flexible Disks Using Assumed Modes Method," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 120, pp. 87~94.
- (10) Hale, A. L. and Meirovitch, L., 1980, "A General Substructure Synthesis Method For the Dynamic Simulation of Complex Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No. 2, pp. 309~326.
- (11) Meirovitch, L., 1980, "Computational Methods in Structural Dynamics," Alphen aan den Rijn, The Netherlands: Sijthoff-Noordhoff International Publishers.
- (12) Olson, M. D. and Lindberg, G. M., 1970, "Annular and Circular Sector Finite Elements for Plate Bending," *Int. J. Mech. Sci, Pergamon Press*, Vol. 12, pp. 17~33.
- (13) Jang, G. H., Jung, D. K., Park, N. Y. and Park, J. S., 1996, "Analysis of the Dynamic Characteristics of Ball Bearing in 3.5 inch HDD Spindle Motor," *Proceedings of Incremental Motion Control and Devices*, pp. 167~174.
- (14) Lamb., H and Southwell, R. V., 1921, "The Vibrations of a Spinning Disk," *Proceedings of the Royal Society*, Vol. 99, pp. 272~280
- (15) Lee, S. J., Chung, J. and Lee, J., M., 1998, "Free Vibrations of a Flexible Spinning Disk with Axial Translation and Rigid-Body Tilting," *JSME International Journal*, Series C, Vol. 41, No. 3, pp. 329~337.
- (16) Lee, C. -W., Jia, H. S., Kim, C.-S., Chun, S.-B., 1997, "Tuning of Simulated Natural Frequencies for a Flexible Shaft-Multiple Flexible Disk System," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 207, No. 4, pp. 435~451.