

## 유한 요소법을 사용한 강체운동을 하는 다중보계의 동적 해석

최 신\* · 유 흥 희\*\*  
(1999년 12월 24일 접수)

### Dynamic Analysis of a Multi-beam System Undergoing Overall Rigid Body Motion Employing Finite Element Method

Shin Choi and Hong Hee Yoo

**Key Words:** Dynamic Analysis(동적 해석), Multi-beam(다중보), F.E.M.(유한요소법), Rigid Body Motion(강체 운동), Modal Analysis(모드 해석법), Modal Coordinate Reduction(모드 좌표 축약법)

#### Abstract

Equations of motion of a multi-beam system undergoing overall rigid body motion are derived by employing finite element method. An orientation angle is employed to allow the arbitrary orientation of the beam element. Modal coordinate reduction technique, which has been successfully utilized in the conventional linear modeling method, is employed for the present modeling method to reduce the computational effort. Different from the conventional linear modeling method, the present modeling method captures the motion-induced stiffness variations which are important for the dynamic analysis of structures undergoing overall rigid body motion. The numerical results are compared to those of a commercial program to verify the reliability of the present method.

#### 1. 서 론

구조물이 대변위 강체운동을 할 경우에는 강체운동과 탄성변형을 동시에 고려할 필요에 의해 적절한 동적 모델링이 필요하다. 특히 인공위성 등 우주구조물이나 회전운동을 하는 정밀기계 등에서는 그 해석의 정확성을 확보하기 위하여 강체운동을 하는 구조물의 탄성변형에 의한 효과를 포함한 동적 시스템의 거동에 대한 연구의 필요성이 일찍부터 부각되어 왔다.

구조물의 탄성변형 예측을 위한 모델링은 현재까지 고전적 선형 모델링이<sup>(1,2)</sup> 가장 널리 사용되

고 있다. 이 모델링은 그 간명성과 더불어 모드 좌표 축약법 등을 적용하여 시스템의 자유도를 현격히 줄일 수 있는 동적 해석에 필요한 중요한 장점을 가지고 있다. 그러나 이 방법은 구조물이 강체운동을 할 때 발생하는 강체운동에 의한 시스템의 강성변화 현상을 모델링에 반영할 수 없다는 단점을 가지고 있다. 따라서 우주 구조물과 같이 강체운동을 하는 구조물들의 해석의 경우에는 종종 그러한 단점이 결정적 문제점으로 등장할 수 있다.

강체운동과 관련된 고전적 선형 모델링의 문제점을 극복하기 위해 여러 가지 비선형 모델링들이<sup>(3,4)</sup> 등장하였다. 이 모델링 방법들은 고전적 선형모델링에서 무시되었던 비선형항들을 추가로 고려함으로써 강체운동에 의한 강성변화효과를 정확히 예측할 수 있었다. 그러나 이 방법들은 더 이상 고전적 선형모델링에서 가능하던 자유도

\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

축소를 위한 방법을 사용할 수 없어서 엄청난 계산시간이 소요되었다. 이러한 문제를 극복하기 위해서 새로운 선형 모델링 방법들이<sup>(5~8)</sup> 좀더 최근에 제시되어 왔는데 이들은 기존의 탄성 모델링에서 사용하는 직교변형 변수들이 아닌 일반 변형변수들을 섞어서 사용하거나 강제운동에 의해 발생하는 강성 스트레스를 계산하여 대입하는 방법으로, 비선형 모델링이 가지고 있는 정확성과 고전적 선형 모델링이 가지고 있는 효율성을 동시에 가지게 하였다. 그런데 비선형 모델링에 근거한 종래의 진동해석 모델링 방법은 일정각속도 운동과 같은 정상상태 운동 시 발생하는 인장 변위율을 굽힘방향 운동방정식에 대입하여 선형화 하는 과정으로 요약될 수 있다. 그러나 이 방법은 그 유도과정에 일관성이 부족하고 매우 복잡하여 대부분의 문헌에서 자세히 기술되지 않는다. 이러한 종래의 방법에 비해 참고문헌 [6]에 제시된 모델링은 유도되는 운동방정식이 인장 방향을 포함하여 모두 선형이므로 동적 해석 시 시스템의 계산시간을 현저히 낮출 수 있음은 물론 진동해석 시 인장방향과의 연성효과도<sup>(9)</sup> 고려할 수 있다는 장점을 가진다.

Kane 등에 의해 제시된 선형 모델링 방법은 그러나 현재까지 단순한 보 형상을 위주로 적용되어 왔다. 본 논문에서는 보 형상의 변화를 고려할 수 있도록 보의 자세각을 도입한 유한 요소법을 적용하였다. 본 논문에 제시된 해석방법은 운동방정식의 유도가 용이할 뿐 아니라 기존의 유한요소 해석프로그램에서 구하여진 질량행렬이나 강성행렬을 사용할 수 있는 장점을 가지고 있다. 또한 단순 보의 해석뿐 아니라 다양한 모양의 보 구조물의 해석에도 응용할 수 있다.

## 2. 운동방정식

### 2.1 모델링을 위한 가정

본 연구에서는 운동방정식의 유도과정을 간명하게 하고 연구의 초점을 강제운동에 의한 강성 변화 효과를 갖는 유한요소 모델링의 유도에 맞추기 위하여 다음과 같은 가정들을 사용하였다. 첫째, 보는 균질(homogeneous)하고 등방성(isotropic)이며 단면은 대칭으로 일정하다. 둘째, 보는 세장보이며 따라서 전단 및 단면관성효과(rotary inertia effect)는 고려하지 않는다. 셋째, 보는 평

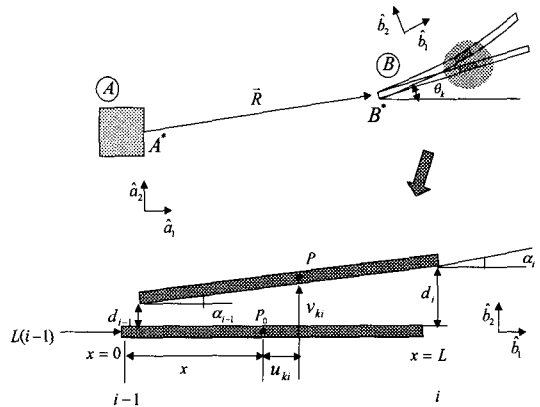


Fig. 1 Configuration of a beam element in a multi-beam system

면운동을 하며 따라서 변형은 회전 평면 내에서만 일어난다고 가정한다.

### 2.2 운동방정식의 유도

본 절에서는 여러 개의 직선 보들이 결합되어 구성된 평면운동을 하는 다중 보 시스템의 유한 요소법에 근거한 운동방정식을 유도하기 위하여 필수적인 과정을 설명하려 한다. Fig. 1은 다중 보 시스템을 구성하는 k번째 직선 보와 그를 구성하고 있는 여러 개의 보 요소들 중 한 요소의 변형 전과 후의 모습을 보여주고 있다. k번째 보는 (k-1)번째 보와 (k+1)번째 보에 고정된다. k번째 보의 변형을 나타내기 위한 좌표계는 보 좌측 단면에 고정된 단위벡터  $\hat{b}_1$ 와  $\hat{b}_2$ 로 구성되며 그림에서  $\theta_k$ 는 이 좌표계와 첫 번째 보의 좌표계인  $\hat{a}_1$ 와  $\hat{a}_2$  사이의 각도를 나타낸다.  $\vec{R}$ 은 첫 번째 보 좌측단면에 위치한 기준점  $A^*$ 에서 k번째 보의 좌측 단면의 기준점  $B^*$ 까지의 위치벡터를 나타낸다. Fig. 1의 아래쪽 그림은 k번째 보를 구성하는 유한요소중 i번째 요소의 변형전과 변형후의 모습을 보여주는데 임의의 점  $P_0$ 의 탄성 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{P}_0 \vec{P} = u_{ki} \hat{b}_1 + v_{ki} \hat{b}_2 \quad (1)$$

본 모델링에서 변형 변수는  $v_{ki}$  만을 사용하며 이는 다음같이 나타낼 수 있다 (상세한 내용은 참고문헌 (10)을 참조).

$$v_{ki}(x, t) = \{N_k(x)\}^T \{q_i(t)\} \quad (2)$$

여기서 각 직선보 별로 요소들의 길이를 일정하게 잡으면

$$\{N_k\} = \frac{1}{L_k} \begin{bmatrix} 2x^3 - 3x^2L_k + L_k^3 \\ x^3L_k - 2x^2L_k^2 + xL_k^3 \\ -2x^3 + 3x^2L_k \\ x^3L_k - x^2L_k^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\{q_i\} = [d_{i-1} \quad \alpha_{i-1} \quad d_i \quad \alpha_i]^T \quad (4)$$

위 식에서  $d_{i-1}$ 과  $d_i$ 는 각각  $i$ 번째 요소의  $x=0$ 과  $x=L_k$ 에서의 굽힘 변위를  $\alpha_{i-1}$ 과  $\alpha_i$ 는 굽힘 각을 각각 나타낸다. 보의 인장변형은 굽힘변형에 비하여 작다 가정하여 무시한다면  $u_{ki}$ 는 기하학적 제한 조건에 의해 다음과 같이 결정된다.

$$u_{ki}(x, t) = - \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^{L_k} \frac{1}{2} \left( \frac{dv_{kj}}{d\sigma} \right)^2 d\sigma \quad (5)$$

$$- \int_0^x \frac{1}{2} \left( \frac{dv_{ki}}{d\sigma} \right)^2 d\sigma + HDT$$

그리고  $u_{ki}$ 를 시간에 대해 미분하면,

$$\dot{u}_{ki}(x, t) = - \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^{L_k} \left( \frac{dv_{kj}}{d\sigma} \right) \left( \frac{dv_{kj}}{d\sigma} \right) d\sigma \quad (6)$$

$$- \int_0^x \left( \frac{dv_{ki}}{d\sigma} \right) \left( \frac{dv_{ki}}{d\sigma} \right) d\sigma + HDT$$

여기서 HDT는 3차 이상 항들을 의미하며 본 논문에서는 선형 운동방정식을 유도하려 하므로 수식 전개 과정에서 이를 무시해도 최종적인 결과에 영향을 미치지 않는다.

이 다중보 시스템의 강체 운동은 병진운동과 회전운동으로 구성되며 따라서 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{v}^{A^*} = V_1 \hat{a}_1 + V_2 \hat{a}_2 \quad (7)$$

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \hat{a}_3 \quad (8)$$

여기에서  $V_1, V_2, \omega_3$ 는 시간에 대한 함수로 주어진다. 또한  $k$ 번째 보의 자세는 기준틀에 대하여  $\theta_k$ 의 각을 유지하므로 이를 수식으로 나타내면  $\hat{a}_i$ 와  $\hat{b}_i$ 간의 관계는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$k$ 번째 보의  $i$ 번째 요소에 의하여 발생하는 일반관성력과 일반작용력을 Kane의 운동방정식 유도방법을 이용하여 구하려 한다. 보와 보 사이에 작용하는 힘에 의한 영향은 전체 운동방정식에서 서로 상쇄되어 나타나지 않으므로 여기서 일반작용력은 시스템의 강성에 의한 항만을 고려하여 구한다.

$$\{F_i^*\} = - \int_{\Omega} \rho \vec{a}^P \cdot \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \{q_i\}} d\Omega \quad (10)$$

$$\{F_i\} = - \frac{\partial U}{\partial \{q_i\}} \quad (11)$$

여기서  $\rho$ 는 보의 단위길이당 질량을 나타내며  $\vec{v}^P$ 와  $\vec{a}^P$ 는  $k$ 번째 보의  $i$ 번째 요소상의 임의 점  $P$ 의 속도와 가속도를 나타낸다. 기준점  $A^*$ 로부터 측정된 임의 점  $P$ 의 위치 벡터를 우선 구하면,

$$\overrightarrow{A^*P} = R_1 \hat{a}_1 + R_2 \hat{a}_2 + (x + u_{ki}) \hat{b}_1 + v_{ki} \hat{b}_2 \quad (12)$$

위 식과 식 (7, 8)을 이용하여 점  $P$ 의 속도와 가속도를 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{v}^P = & [ V_1 + (\dot{u}_{ki} \cos \theta_k - \dot{v}_{ki} \sin \theta_k) - \omega_3 R_2 \\ & - \omega_3 \sin \theta_k \{ L_k(i-1) + x + u_{ki} \} \\ & - \omega_3 \cos \theta_k v_{ki} ] \hat{a}_1 \\ & + [ V_2 + (\dot{u}_{ki} \sin \theta_k + \dot{v}_{ki} \cos \theta_k) \\ & + \omega_3 R_1 - \omega_3 \sin \theta_k v_{ki} \\ & + \omega_3 \cos \theta_k \{ L_k(i-1) + x + u_{ki} \} ] \hat{a}_2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial t} = \frac{A}{dt} (\vec{v}^P) + \vec{\omega}^A \times \vec{v}^P \quad (14)$$

또한 식 (10)에 나타난 편속도 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \{q_i\}} = & [ - \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^{L_k} \left( \frac{dv_{kj}}{d\sigma} \right) \left( \frac{d\{N_j\}}{d\sigma} \right) d\sigma \\ & - \int_0^x \left( \frac{dv_{ki}}{d\sigma} \right) \left( \frac{d\{N_i\}}{d\sigma} \right) d\sigma ] \cos \theta_k \hat{a}_1 \\ & + [ - \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^{L_k} \left( \frac{dv_{kj}}{d\sigma} \right) \left( \frac{d\{N_j\}}{d\sigma} \right) d\sigma \\ & - \int_0^x \left( \frac{dv_{ki}}{d\sigma} \right) \left( \frac{d\{N_i\}}{d\sigma} \right) d\sigma ] \sin \theta_k \hat{a}_2 \\ & - \{N_i\} \sin \theta_k \hat{a}_1 + \{N_i\} \cos \theta_k \hat{a}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

한 보 요소의 탄성에너지  $U_{ki}$ 는 인장 및 전단 변형을 무시하고 굽힘 변형만 고려하여 구하면 다음과 같다.

$$U_{ki} = \frac{1}{2} \int_0^{L_k} EI \left( \frac{\partial^2 v_{ki}}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (16)$$

여기서  $E$ 는 영의 계수,  $I$ 는 단면면적모멘트를 각각 나타낸다. 식 (14)-(16)을 식 (10)과 (11)에 대입하여 일반관성력과 일반작용력을 각각 구하면,

$$\{F_i\}^* = -[M]_i \{ \ddot{q}_i \} - [K^G]_i \{q_i\} + \{\Psi\}_i \quad (17)$$

$$\{F_i\} = -[K^B]_i \{q_i\} \quad (18)$$

여기서

$$[M]_i = \int_0^{L_k} \rho \{N_i\} \{N_i\}^T dx \quad (19)$$

$$[K^B]_i = \int_0^{L_k} EI \{N_i'\} \{N_i'\}^T dx \quad (20)$$

$$\begin{aligned} [K^G]_i = & -\omega_3^2 [M]_i \\ & + \omega_3^2 \left\{ L_k(i-1) + \frac{1}{2} L_k \right\} L_k [A]_i \\ & + \omega_3^2 L_k(i-1) [B]_i + \omega_3^2 [C]_i \\ & - \Gamma_1 L_k \cos \theta_k [A]_i - \Gamma_1 \cos \theta_k [B]_i \\ & - \Gamma_2 L_k \sin \theta_k [A]_i - \Gamma_2 \sin \theta_k [B]_i \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi\}_i = & -\dot{\omega}_3 L_k(i-1) \{P\}_i - \dot{\omega}_3 \{Q\}_i \\ & + \Gamma_1 \sin \theta_k \{P\}_i + \Gamma_2 \cos \theta_k \{P\}_i \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,

$$\Gamma_1 = [ \dot{V}_1 - \dot{\omega}_3 R_2 - \omega_3 V_2 - \omega_3^2 R_1 ] \quad (23)$$

$$\Gamma_2 = [ \dot{V}_2 + \dot{\omega}_3 R_1 + \omega_3 V_1 - \omega_3^2 R_2 ] \quad (24)$$

$$[A]_i = \sum_{j=i+1}^{\mu_k} \int_0^{L_k} \rho \{N_j\} \{N_j\}^T dx \quad (25)$$

$$[B]_i = \int_0^{L_k} \rho (L_k - x) \{N_i\} \{N_i\}^T dx \quad (26)$$

$$[C]_i = \int_0^{L_k} \frac{1}{2} \rho (L_k^2 - x^2) [N_i] [N_i]^T dx \quad (27)$$

$$\{P\}_i = \int_0^{L_k} \rho [N_i] dx \quad (28)$$

$$\{Q\}_i = \int_0^{L_k} \rho x [N_i] dx \quad (29)$$

식 (25)에서  $\mu_k$ 는  $k$ 번째 직선 보의 유한요소 개수를 의미한다.

전체 시스템의 운동방정식은 식 (17)과 (18)에 주어진 요소행렬들을 조합하여 구할 수 있으며 이러한 조합 방법은 유한요소법에서 일반적으로 널리 사용되고 있다.

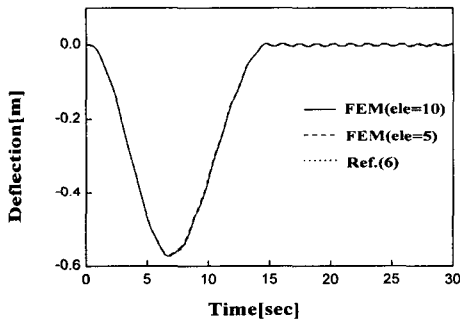
**Table 1** Numerical data used for the simulation

Notations	Description	Numerical Data
$\rho$	mass per unit length	1.2 [kg/m]
$E$	Young's modulus	7.0E10 [N/m <sup>2</sup> ]
$A$	cross section area	4.0E-4 [m <sup>2</sup> ]
$I$	Second area moment of inertia	2.0E-7 [m <sup>4</sup> ]
$\Omega_s$	Steady state angular velocity	6 [rad/sec]
$T_s$	Steady state settling time	15 [sec]

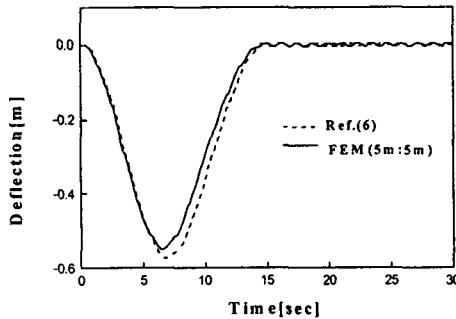
3. 수치 해석

본 절에서는 시스템의 평면 회전운동이 시간에 따라 주어지는 예제들에서 보들의 선단 변위를 조사하려 한다. 다중보가  $A^*$ 점을 중심으로 다음과 같은 시간함수로 주어진 회전운동을 한다고 가정한다.

$$\Omega = \begin{cases} \frac{\Omega_s}{T_s} [t - (\frac{T_s}{2\pi}) \sin(\frac{2\pi t}{T_s})] & \text{if } 0 \leq t \leq T_s \\ \Omega_s & \text{if } t \geq T_s \end{cases} \quad (30)$$



**Fig. 2** Lateral deflection of a single straight beam (at the free end)



**Fig. 3** Lateral deflection of a double straight beam (at the free end of the second beam)

여기서  $T_s$ 는 정상각속도에 도달하기 위한 시간이며,  $\Omega_s$ 는 그 때의 각속도,  $t$ 는 시간을 의미한다. 일반적으로 이러한 운동을 Spin-up 운동이라고 하며 강체운동을 하는 구조물의 수치해석에 자주 사용된다. Table 1에는 각종 수치해석 데이터가 나타나있으며 시스템을 구성하는 보의 길이  $L_k$ 와 결합각  $\theta_k$ 는 각 수치해석 예제에 따라 바뀐다

3.1 모델링 정확성의 검증을 위한 수치해석

본 논문에서 제시한 모델링의 정확성을 검증하기 위하여 본 절에서는 세 가지 예제의 수치해석을 수행하여서 기존의 연구결과와 비교하였다. 첫 번째 예제는 단일한 보로 이루어진 회전 외팔보의 동적 해석이며, 두 번째 예제는 단일한 보를 두 개의 보로 나눈 경우의 (즉 보간 사이 각이 0°) 해석이며, 세 번째 예제는 서로 직각을 이루는 이중 보를 해석한 결과를 타 방법의 결과와 비교한 것이다.

Fig. 2는 유한요소법을 이용한 모델링의 정확성을 검증하기 위해 한 개의 외팔보 끝에서의 탄성 변위를 구한 결과이다. 이것은 10m의 길이를 가지는 회전 외팔보의 모델링인데 이에 대한 정확한 해석결과는 참고문헌 (6)에 잘 알려져 있다. 그럼에서 볼 수 있는 것같이 유한요소의 개수가 어느 정도 이상이면 거의 결과가 수렴함을 볼 수 있으며 이는 이 논문에 제시된 모델링 방법의 신뢰성을 보여주고 있다.

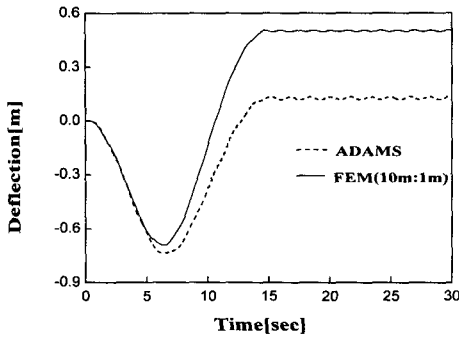


Fig. 4 Lateral deflection of a right angle beam (at the end of the first beam)

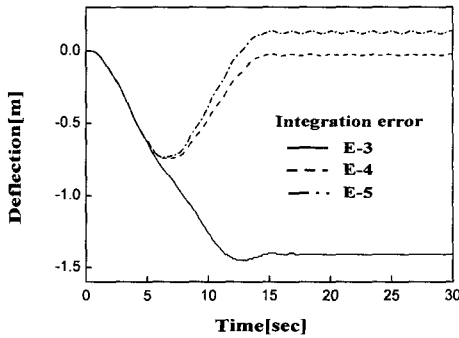


Fig. 5 Lateral deflection of a right angle beam by ADAMS (at the end of the first beam)

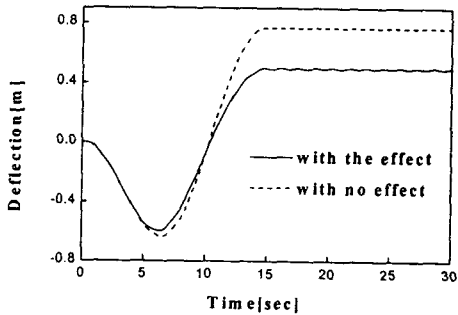


Fig. 6 Lateral deflection of a right angle beam (at the end of the first beam)

Fig. 3은 보간 결합각이  $0^\circ$  인 경우  $5m$  길이의 보가 두 개 연결되어 있다고 가정하고 해석한 결과와  $10m$  길이의 보가 1개 있다고 가정하여 해석한 결과를 비교한 그림이다. 이 그림을 보면 시스템을 보 두개로 가정하여 해석한 결과와 보 한 개로 가정하여 해석한 결과가 약 1-2% 오차범위에서 서로 일치하고 있다. 여기에서 발생한 해석결과의 차이는 연결보의 경우 단위보의 경우와 달리 2개의 기준틀을 사용하는데 따라 발생하는 것으로 판단된다.

Fig. 4는 보간 결합각이  $-90^\circ$  이고 첫 번째 보의 길이가  $10m$ , 두 번째 보의 길이가  $1m$  일 때의 첫 번째 보와 두 번째 보가 연결되는 점에서의 수치해석 결과를 상용 프로그램인 ADAMS에 의한 결과와 비교한 그림이다. 그림에서 보면 과도상태에서의 반응은 비슷한 양상을 가지나 정상상태에 도달하였을 때는 상당한 차이가 존재하는 것을 볼 수 있으며 이에 대한 검증이 필요하다. 이를 위해서 Fig. 5는 허용오차에 따른 ADAMS의 결과를 동일한 모델링에 대하여 구한 것인데 결과를 살펴보면 ADAMS의 적분기에서 정의된 허용오차의 범위에 따라 결과 값이 많은 차이가 나는 것을 알 수 있다. 또한 적분기의 허용오차가 작아질수록 ADAMS의 결과가 본 논문에서 제시된 모델링의 결과 값에 근접하는 것을 볼 수 있는데 유감스럽게도 허용오차를 더 작게 해서는 해석이 되지 않기 때문에 정확한 결과를 얻을 수 없었다. 이는 어느 이하의 오차하에서는 반복계산오차에 의한 문제가 발생하여 생기는 문제이다.

Fig. 4에서 볼 수 있는 정상상태에서의 변위는  $-90^\circ$  의 각으로 접합되어 있는 보에 걸리는 원심력 때문에 발생하는 항이다. 따라서 본 모델링의 정상상태에서의 결과 값을 검증하기 위하여 상용 구조해석 프로그램인 ANSYS를 이용해 원심력을 분포력으로 계산하여 보면  $0.77m$ 로 구해졌으며 이는 본 모델링의 정상상태에서의 변위인 약  $0.5m$ 보다 큰 값을 알 수 있다. 이러한 차이는 보의 회전 시 발생하는 강성 변화(stiffness variations) 효과가 ANSYS의 모델링에 의해서는 나타나지 않기 때문에 발생한 결과이다. 이를 증명하기 위하여 Fig. 6은 보가 회전 시 발생하는 강성변화를 고려하였을 때의 결과와

Table 2 Comparison of simulation times

Simulation models	Full modeling	Reduced modeling
10m straight beam	713.2 sec	2.3 sec
5m:5m straight beam	871.7 sec	3.5 sec
10m:1m right angle beam	786.4 sec	3.3 sec
10m:2m right angle beam	794.2 sec	3.3 sec

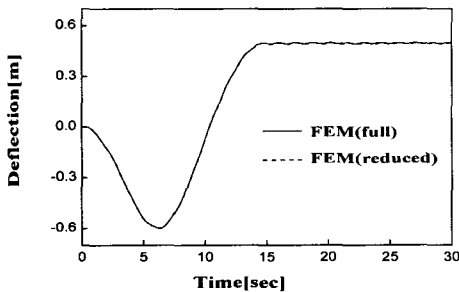


Fig. 7 Lateral deflection of a right angle beam (at the end of the first beam)

강성변화를 고려하지 않은 결과를 비교하여 나타낸 것이다. 이 그림을 살펴보면 회전에 의한 강성의 변화가 고려된 모델링의 과도 상태에서와 정상상태에서의 반응이 더 작은 것을 살펴 볼 수 있다. 그리고 회전에 의한 강성의 변화가 없을 때는 예상하였던 바와 같이 정상상태에서 ANSYS의 해석 결과와 거의 유사한 값을 살펴 볼 수 있다.

### 3.2 모드좌표 축약법과 운동방정식

일반적으로 요소의 개수가 증가할수록 운동방정식을 구성하고 있는 행렬의 크기가 커져 운동방정식의 해석에 많은 시간이 필요하게 된다. 그래서 여기에서는 일반적으로 사용되고 있는 모드좌표 축약법<sup>(11)</sup> 이용해 행렬의 크기를 줄이고 이에 따른 해석속도의 증가 및 그에 따른 해의 정확성이 어느 정도 유지되어지는가 조사하였다.

아래 식은 모든 좌표를 사용하는 전체의 운동방정식을 몇 개의 모드좌표를 사용하는 축약된 방정식으로 변환한 모습을 보여준다.

$$\begin{aligned}
 [\Phi]^T [M] [\Phi] \{\dot{p}\} + [\Phi]^T [K^B] [\Phi] \{p\} \\
 + [\Phi]^T [K^G] [\Phi] \{p\} \quad (31) \\
 = [\Phi]^T \{\Psi\}
 \end{aligned}$$

여기서  $[M]$ ,  $[K^B]$ ,  $[K^G]$ 는 각각 전체 시스템에 대한 질량행렬, 강성행렬, 강성변화효과에 의한 행렬을, 그리고  $\{\Psi\}$ 는 시간에 따라 변하는 일반력 벡터를 나타낸다. 또한,  $[\Phi]$ 는 축약된 모드 행렬(Modal matrix)을 의미하고  $\{p\}$ 는 축약된 모드 좌표를 의미한다. 전체 시스템의 좌표는 유한요소들의 변위로 구성되며, 축약 모드행렬은 전체 시스템의 질량과 강성 행렬을 이용하여 모드해석을 하고 이로부터 얻어진 가장 낮은 고유진동수에 해당하는 몇 개의 모드벡터들로 구성하는데 본 논문에서는 축약 모드좌표수로 3개를 사용하였다.

해석에 소요된 전산 시간을 비교하여 보면 여러 모델링에서 매우 많이 차이가 남을 (약 200~300 배) 알 수 있었다. Table 2는 그 중 일부로 계산시간의 비약적인 감소를 볼 수 있다. 표에서 Full modeling이라는 것은 시스템의 자유도를 줄이지 않았을 경우를 나타내는 것이다. 또한 이러한 모드좌표 축약법을 사용해서 자유도를 줄인 모델링의 해석한 결과의 정확도를 검증하기 위하여 보의 길이가 각각 10m와 1m이고 그 사이각이 직각인 보 구조물에 대한 해석 결과를 구해 보면 Fig. 7과 같이 축약된 모델링의 결과가 축약되지 않은 모델링의 결과와 거의 정확히 일치함을 알 수 있다. 그러므로 이러한 방법을 이용하면 원래의 시스템을 여러 개의 요소로 나누어서 자유도가 많이 늘어났을 때도 쉽게 자유도를 줄이면서 해석결과의 정확성을 유지할 수 있는 것을 알 수 있다.

## 4. 결 론

본 논문에서는 강체운동에 의한 강성변화를 고

려한 모델링의 방법에 근거하여 유한 요소법을 사용하여 일반적인 형상을 가지는 보에 대한 운동방정식을 유도하였고 이에 근거한 해석결과를 도출하였다. 기존 논문에 존재하는 수치예제에 대한 해석 결과를 도출하고 기존 결과와의 비교를 통하여 본 논문에서 제시된 해석방법이 신뢰성과 정확성을 가짐을 알 수 있었다. 또한, 보의 형상이 복잡할 경우 기존의 동역학 해석프로그램과는 달리 본 논문에서 제시된 모델링은 안정적인 해석결과를 제공해 줄 수 있음을 보여주었다. 이 모델링 방법의 중요한 장점은 강체운동에 의한 강성변화 효과를 고려함과 동시에 고전적 선형모델링의 장점이었던 시스템의 자유도를 줄여서 전산시간의 단축을 기할 수 있다는 특성도 갖는다는 점이다. 따라서 대변위 강체운동을 하는 복잡한 구조물의 동적 해석의 경우에 본 모델링 방법이 효과적으로 사용될 것으로 판단된다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Ho, J., 1977, "Direct Path Method for Flexible Multibody Spacecraft Dynamics," *J. of Spacecraft and Rockets*, Vol. 14, pp. 102~110.
- (2) Bodley, C., Devers, A., Park, A., and Frisch, H., May, 1978, "A Digital Computer Program for the Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structure," Vol. 1&2, *NASA TP-1219*.
- (3) Christensen, E. and Lee, S., 1986, "Nonlinear Finite Element Modeling of the Dynamics of Unrestrained Flexible Structures," *Computers and Structures*, Vol. 23, pp. 816~829.
- (4) Simo, J. and Vu-Quoc, L., 1986, "On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions - the Plane Case : Part I and II," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 849~863.
- (5) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, pp. 139~151.
- (6) Yoo, H., Ryan, R., and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278 .
- (7) Ryu, J., et. al., 1994, "A General Approach to Stress Stiffening Effects on Flexible Multibody Dynamic Systems," *Mechanics of Structure and Machines*, Vol. 22, No. 2, pp. 157~180.
- (8) Ryu, J., et. al., 1997, "A Criterion in Inclusion of Stress Stiffening Effects in Flexible Multibody Dynamic System Simulation," *Computers and Structures*, Vol. 62, No. 6, pp. 1035~1048.
- (9) Yoo, H. and Shin, S., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 5, pp. 807~828.
- (10) Daryl L. Logan., 1997, A First Course in the Finite Element Method using Algor, *PWS Publishing company*.
- (11) Leonard Meirovitch, 1967, Analytical Methods in Vibrations, *Macmillan Publishing Co., Inc.*