수정된 보간 웨이블렛을 이용한 적응 웨이블렛-콜로케이션 기법

김 윤 영* · 김 재 은**

(1999년 12월 28일 접수)

An Efficient Adaptive Wavelet-Collocation Method Using Lifted Interpolating Wavelets

Yoon Young Kim and Jae Eun Kim

Key Words: Wavelet(웨이블렛), Multi-Resolution Analysis(다중 분해 해석), Interpolating Wavelet (보간 웨이블렛), Lifting Scheme(리프팅 기법), Boundary Wavelet(경계 웨이블렛), Preconditioned Conjugate Gradient Method(공액 구배법), Adaptive Algorithm(적응 해석 알고리듬), Thresholding Parameter(문턱값)

Abstract

The wavelet theory is relatively a new development and now acquires popularity and much interest in many areas including mathematics and engineering. This work presents an adaptive wavelet method for a numerical solution of partial differential equations in a collocation sense. Due to the multi-resolution nature of wavelets, an adaptive strategy can be easily realized; it is easy to add or delete the wavelet coefficients as resolution levels progress. Typical wavelet-collocation methods use interpolating wavelets having no vanishing moment, but we propose a new wavelet-collocation method on modified interpolating wavelets having 2 vanishing moments. The use of the modified interpolating wavelets obtained by the lifting scheme requires a smaller number of wavelet coefficients as well as a smaller condition number of system matrices. The latter property makes a preconditioned conjugate gradient solver more useful for efficient analysis.

1. 서 론

웨이블렛은 다중 분해 해석을 가능하게 하기 때문에 적응 해석을 위해 매우 효율적으로 사용될수 있다. 최근 웨이블렛의 다중 분해 특성을 이용하여 새로운 설계 개념이 제안된 바는 있으나,[1] 수치 문제에 국한하여 생각해 볼 때 현재까지의 적용 분야는 주로 웨이블렛을 이용한 미분 방정식의 수치 해석이라고 할수 있다. 본 연구에서는 미분 방정식의 효율적인 수치 해석 기법으로 수정된 보간 웨이블렛을 이용한 적응 웨이블렛-콜로케이션 기법을 제안하고자 한다.

웨이블렛을 이용한 미분 방정식의 수치 해석 기법은 크게 웨이블렛-갤러킨 방법[2-5]과 웨이블렛 콜로케이션[6,7] 방법이 있다. 경계 문제의 처리가 비교적 용이한 웨이블렛-갤러킨 방법은 절점의 값을 직접 활용하지 않는 단점이 있는 반면, 본 연구에서 다루고자 하는 웨이블렛-콜로케이션 방법은 경계 처리가 어려운 반면 절점의 값을 직접 활용하는 장점이 있다.

웨이블렛-콜로케이션 방법에 있어서 지금까지 사용된 웨이블렛은 Donoho[8]가 제안한 보간 웨이

* 회원,서울대학교 기계항공공학부,
E-mail : yykim@snu.ac.kr,
TEL : (02)880-7130, FAX : (02)872-5431
** 서울대학교 대학원 기계항공공학부,

블렛인데 이것은 다중 분해 특성은 갖고 있으나, 소멸 모멘트를 갖고 있지 않기 때문에 국부적으로 급격히 변화하는 문제를 효율적으로 다룰 수 없다. 따라서, 본 연구에서는 Donoho의 보간 웨이블렛을 수정하여 소멸 모멘트를 갖는 새로운 웨이블렛을 유도한 후 이것을 이용한 새로운 웨이블렛-콜로케이션 방법을 제안하였다. 본 해석 기법의 장점은 i) 절점의 값을 이용할 수 있고 ii) 소멸 모멘트를 갖는 웨이블렛을 사용하기 때문에 급격히 변화하는 함수를 효율적으로 표현할 수 있다는 것이다. 따라서, 이 기법은 적응 해석에 매우 유리한 특징을 갖게 되며 실제 수치 예제를 통하여 이것을 입증하였다.

2. 보간 웨이블렛

2.1 웨이블렛과 보간 웨이블렛

웨이블렛을 이용한 수치 해석 방법의 특징은 다중 분해 해석을 가능하게 한다는 점이다. 다중 분해 해석은 L^2 공간에서 정의된 다음의 조건을 만족하는 일련의 닫힌 부분 공간으로 설명된다.

$$\{0\} \subseteq \cdots \subseteq V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq L^2$$

1) $\bigcup_j V_j = L^2(\mathbf{R})$, $\bigcap_j V_j = \{0\}$

2) If $f(x) \in V_j$, then $f(2^j x) \in V_{j+1}$

3) If $f(x) \in V_j$,

then $f(x - k\,2^{-j}) \in V_{j+1}$

$(k,\ z \in \mathbf{Z})$

여기서 $\boldsymbol{R}$과 $\boldsymbol{Z}$는 각각 실수와 정수의 집합을, V는 벡터 공간을 나타낸다.

이러한 계층적인 해석을 위해 부분공간 V_j의 모든 기저 함수는 어떤 한 함수의 이동(translation)과 확대(dilation)로 표현된다.

다음과 같은 스케일링 관계식을 만족하는 함수 $\phi(x)$를 정의하면

$$\phi(x) = \sum_k h_k \phi(2x - k) \tag{1}$$

$\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$는 V_j의 기저 함수가 되고 이 때 스케일링 함수는 다중 해상도 해석의 기본을 이루게 된다.

연속된 두 부분 공간의 차이를 기술하는 공간 $W_j\ (= V_{j+1} - V_j\ )$의 기저인 웨이블렛 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(x) = \sum_k g_k \phi(2x - k) \tag{2}$$

이러한 웨이블렛 함수는 일반적으로 소멸 모멘트(vanishing moment)를 갖게 되는데 다음의 식이 성립할 때 소멸 모멘트 p 개를 갖는다고 말한다.

$$\int x^m \cdot \psi(x)dx = 0\ ,(m = 0, \cdots, p-1) \tag{3}$$

식 (1), (2)에 의해 정의된 함수 중 스케일링 함수는 각각의 스케일에서 근사화된 함수의 평균과 관계되고 웨이블렛 함수는 이러한 일련의 근사화 함수의 차이를 기술하게 된다.

웨이블렛 공간을 고려한다면 웨이블렛 해석은 다음과 같은 성질을 지닌다.

1. 웨이블렛 공간 W_j 는 상호 직교한다.

$$\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} = L^2$$

2. 부분 벡터 공간 V_{j+1}는 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

웨이블렛중 가장 대표적인 웨이블렛인 Daubechies 웨이블렛[9] DN은 $p\ (=2N\ )$개의 소멸 모멘트를 가지고 구간 $[0, N-1]$에서 정의된다. Fig. 1은 3개의 소멸 모멘트를 갖는 Daubechies 웨이블렛 계열을 나타낸다.

이러한 Daubechies 웨이블렛은 많은 장점에도 불구하고 근사하고자 하는 절점의 값을 직접 보간할수 없다는 단점이 있다. 따라서, 다음과 같이 Daubechies 스케일링 함수 $\overline{\phi}(x)$의 자기 상관 함수로서 정의되는 보간 스케일링 함수 $\phi(x)$로부터 새로운 형태의 보간 웨이블렛을 정의할 수 있다.

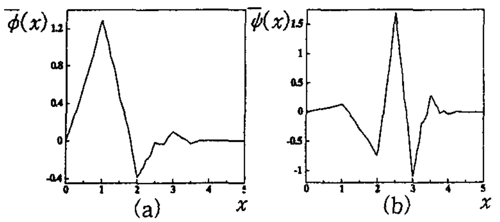


Fig. 1 (a) Daubechies scaling function and (b) wavelet function with 3 vanishing moments

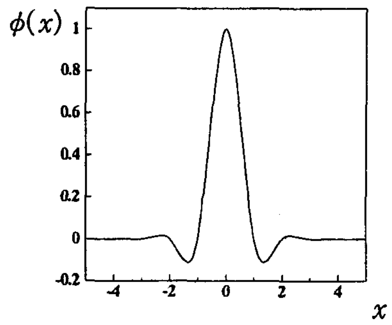


Fig. 2 Interpolating scaling function

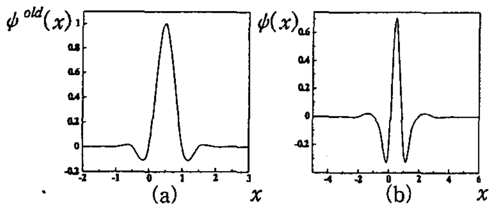


Fig. 3 (a) Original interpolating wavelet and (b) present lifted interpolating wavelet

$$\phi(x) = \int \overline{\phi}(y)\,\overline{\phi}(y-x)\,dy \tag{4}$$

원래 보간 스케일링 함수는 이산 자료를 균일하고 연속인 함수로 보간하기 위해 대칭 반복 보간 방법을 사용한 Deslauriers-Dubuc[10] 등이 연구하였으며 후에 Beylkin과 Saito[11]가 Daubechies 함수와의 관계를 설명하였다.

보간 웨이블렛은 Donoho[8]에 의해 다음과 같이 정의되었으나

$$\psi(x) = \phi(2x-1) \tag{5}$$

앞에서 언급했던 것처럼 소멸 모멘트를 가지지 않는다.

Fig. 2는 보간 웨이블렛 계열의 스케일링 함수를 나타내며 식 (5)에 의해 정의된 웨이블렛 함수는 정의 구간과 중심점만 다를 뿐 모양이 같다.

위의 스케일링 함수와 웨이블렛 함수를 이용하면 C_0에 속하는 함수 f를 고정된 스케일 또는 다중 스케일로 분해할 수 있다. 식 (6)에서 $P_{V_{j+1}}$는 V_{j+1} 공간으로의 투영 연산자를 나타내며 이는 다시 $P_{V_j} + P_{W_j}$및 $P_{V_{j_0}} + \sum_{j=j_0}^{j} P_{W_j}$로 분해되어 각각의 투영공간에 해당하는 기저 함수 및 계수 s와 d를 이용하여 .함수가 전개된다.

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_{V_{j+1}} f &= \sum_k s_{j+1,k}\phi_{j+1,k} \\ &= \sum_k s_{j,k}\phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k}\psi_{j,k} \\ &= \sum_k s_{j_0,k}\phi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{j}\sum_k d_{j,k}\psi_{j,k} \end{aligned} \tag{6}$$

2.2 수정된 보간 웨이블렛

앞에서 언급하였듯이 Donoho가 정의한 보간 웨이블렛 함수는 소멸 모멘트를 가지지 않기 때문에 본 논문에서는 리프팅 기법[12]을 사용하여 2차의 소멸 모멘트를 갖도록 Donoho의 보간 웨이블렛을 수정하였다. 즉, 다음과 같이 정의되는 수정된 보간 웨이블렛 ψ가 2차의 소멸 모멘트를 갖도록 계수 s_k를 구한다. 여기서 $\psi^{old}(x)$는 식 (5)에 정의된 보간 웨이블렛이다.

$$\psi(x) = \psi^{old}(x) - \sum_k s_k \phi(x-k) \tag{7}$$

Fig. 3은 소멸 모멘트가 없는 경우인 식 (5)와 본 연구에서 사용하고자 제안한 2차의 소멸 모멘트를 갖는 수정된 보간 웨이블렛 함수를 보여주고 있다.

2.3 보간 경계 웨이블렛

웨이블렛이 아직까지 유한 요소 해석법을 대체하지 못하는 이유는 복잡한 영역에서 정의된 문제에서의 경계를 처리하는 것이 쉽지 않기 때문이다. 신호 처리의 경우 정의 구간이 주기성을

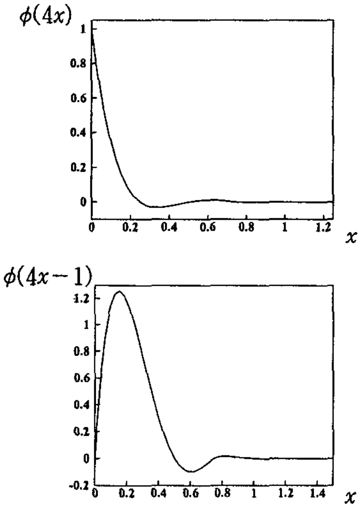


Fig. 4 Interpolating boundary scaling functions

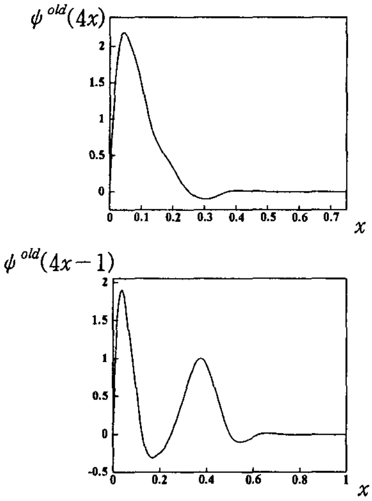


Fig. 5 Boundary wavelets

갖도록 하는 통상적인 웨이블렛을 써도 큰 문제가 없으나, 미분 방정식의 해를 구하는 경우 주기성을 갖도록 하는 방법은 경계에서 큰 오차를 갖게 한다. 이를 위해 본 논문에서는 Donoho[8]와 Sweldens[13]가 제안한 방법을 이용하여 먼저 보간 경계 스케일링 함수를 구하였다. 이에 대한 이론적 배경은 Donoho[8]와 Sweldens[13]를 참고하기로 하고 여기서는 식 (4)의 보간 스케일링 함수를 수정한 경계 스케일링 함수중 대표적인 $\phi(4x)$,

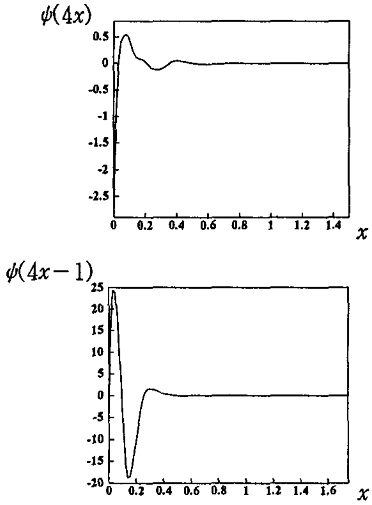


Fig. 6 Present boundary interpolating wavelets having 2 vanishing moments

$\phi(4x-1)$를 Fig. 4에 실었다. 이 경우 6개의 경계 보간 스케일링 함수를 얻게 된다. 소멸 모멘트가 없는 경계 웨이블렛의 경우에도 같은 방법을 적용하여 얻은 웨이블렛중 $\psi^{old}(4x)$, $\psi^{old}(4x-1)$를 Fig. 5에 나타내었다.

본 연구에서 사용하고자 제안한 수정된 보간 웨이블렛에 대한 경계 웨이블렛은 다음과 같이 구한다. Fig. 4와 Fig. 5에서 구한 경계 보간 스케일링 함수와 경계 보간 웨이블렛을 식 (7)에 대입한후 앞에서와 같이 2차의 소멸 모멘트를 갖도록 s_k를 구한다. 이렇게 구한 수정된 경계 보간 웨이블렛중 대표적인 $\psi(4x)$, $\psi(4x-1)$를 Fig. 6에 나타내었다.

3. 2차 상미분 방정식의 해석

3.1 보간 웨이블렛에 의한 문제의 정식화

다음과 같은 경계 조건을 갖는 간단한 상미분 방정식에 대해서 문제를 웨이블렛 공간으로 변형시켜 본다.

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f \text{ in } \Omega$$
$$u=g \text{ on } \partial\Omega \tag{8}$$

문제의 해와 우변의 항을 V_{j+1} 공간에서 전개하고 정리하면 다음과 같다.

$$u(\text{or } f) = \sum_k s_{j+1,k}^{(u \text{ or } f)} \phi(2^j x - k)$$

$$[K_s]\{s_{j+1,k}^u\} = \{s_{j+1,k}^f\} \tag{9}$$

식 (9)에서 계수의 분해에 관한 변환 행렬을 이용하면 계의 웨이블렛 공간에서의 문제를 얻게 된다.

$$\{s_{j+1,k}^u\} = [T]\begin{Bmatrix} s_{j,k}^u \\ d_{j,k}^u \end{Bmatrix}$$

$$\{s_{j+1,k}^f\} = [T]^{-T}\begin{Bmatrix} s_{j,k}^f \\ d_{j,k}^f \end{Bmatrix}$$

$$[T]^T[K_s][T]\begin{Bmatrix} s_{j,k}^u \\ d_{j,k}^u \end{Bmatrix}$$

$$= [K_{s+w}]\begin{Bmatrix} s_{j,k}^u \\ d_{j,k}^u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{j,k}^f \\ d_{j,k}^f \end{Bmatrix}$$

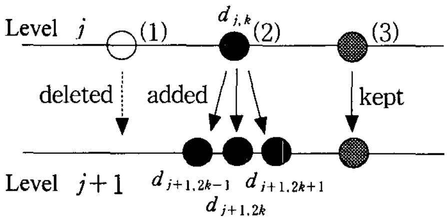
위의 식에서 변환 행렬 $[T]$를 다중 분해의 형태인 $[T_j]$로 적절히 변형시키면 다음과 같은 최종 선형 방정식을 얻게 된다.

$$[T_j]^T[K_s][T_j]\begin{Bmatrix} s_{j0,k}^u \\ d_{j0,k}^u \\ \vdots \\ d_{j,k}^u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_{j0,k}^f \\ d_{j0,k}^f \\ \vdots \\ d_{j,k}^f \end{Bmatrix}$$

3.2 적응 해석 알고리듬

초기의 웨이블렛 기반의 수치 해석에 관한 연구는 스케일링 함수만을 이용하여 고정된 스케일에서 수행되었으나 웨이블렛의 다중 분해 기법을 이용한 적응 해석 알고리듬이 최근에야 그 이론적 근거를 마련하고 있다.[14-16]

간략히 요약하면, 처음 해를 j 단계에서부터 구하기 시작했다면 이 단계에서 스케일링 함수의 계수와 웨이블렛 계수가 구해진다. 이 때, 윗 문턱값 ε_j^u와 아래 문턱값 ε_j^d을 정하여 계수값이 ε_j^u보다 크면 다음 단계의 값을 구할 때 주위의 절점을 추가로 고려하고 두 문턱값 사이에 있으면 그 절점만 보존되고 ε_j^d보다 작으면 다음 단계에서 부터 해당 절점은 제거한다. Fig. 7 은 이 과정을 간략히 설명하였다.



(1) If $d_{j,k} < \varepsilon_j^d$, then nodes corresponding to $d_{j,k}$ are removed.

(2) If $d_{j,k} > \varepsilon_j^u$, then the neighboring nodes are addded.

(3) If $\varepsilon_j^d < d_{j,k} < \varepsilon_j^u$, then the corresponding nodes are kept.

At each step : $\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j / 2$

Fig. 7 Adaptive algorithm

4. 수치 예제

식 (8)의 경계치 문제가 구간 $[0,1]$에서 정의되고, 경계 조건이 $u(0) = u(1) = 0$ 으로 주어진 경우를 수치 예제로 다루고자 한다.

다음과 같은 $f(x)$에 대해 본 논문에서 제안한 기법이 얼마나 좋은 수렴성과 특성을 갖는지를 살펴보고자 한다.

CASE 1 : $f = -40x^2 + 40x$

이 경우에 대한 엄밀해는 다음과 같다.

$$u_{exact}(x) = \frac{10}{3} x(x-1)(x^2 - x - 1)$$

먼저 분해 단계(j)를 높여감에 따라 오차가 어떻게 감소하는지, 그리고 사용된 행렬의 크기가 어떻게 변화해 나가는지를 Fig. 8에 나타내었다.

Fig. 8에서 "No lifting' 은 소멸 모멘트가 없는 식 (5)의 보간 웨이블렛을 사용하여 얻은 결과이며 '' Present' 는 2차의 소멸 모멘트를 갖도록 하기 위해 식 (5)의 보간 웨이블렛을 리프팅 기법에 의해 수정한 웨이블렛에 의한 결과이다. 또한, ' Adaptive' 는 Fig. 7의 적응 해석 알고리듬을

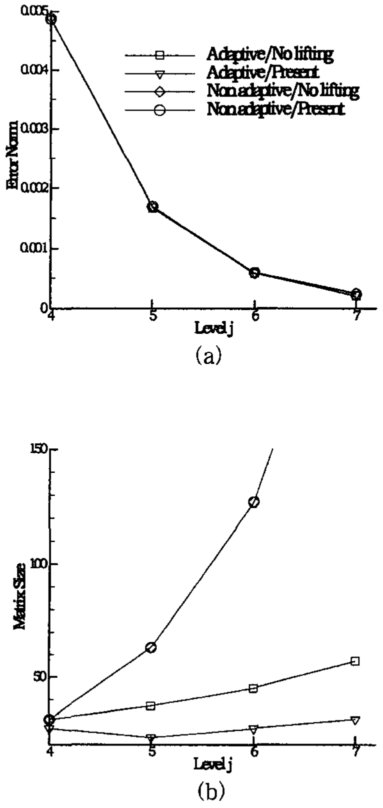


Fig. 8 Comparison of (a) the error norm and (b) the matrix size for progressing resolution levels for CASE 1.

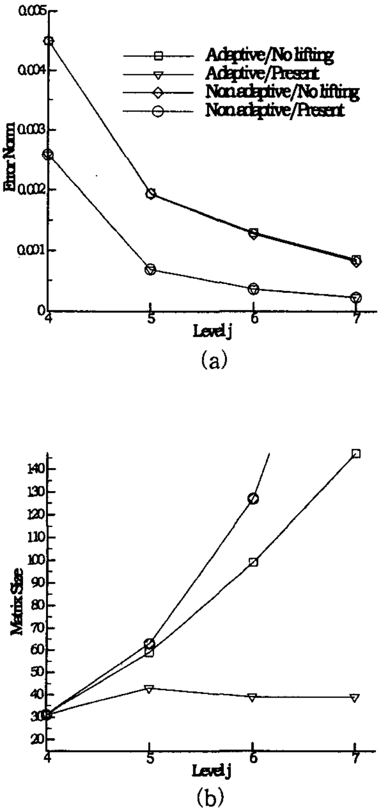


Fig. 9 Comparison of (a) the error norm and (b) the matrix size for progressing resolution levels for CASE 2.

적용한 결과이며 " Non adaptive' 는 그렇지 않은 결과이다. Fig. 8에서의 Error norm은 다음과 같이 정의되었다.

$$\text{Error Norm} = \left(\frac{\int |u_{exact}(x) - u(x)|^2 dx}{\int u_{exact}^2(x) dx} \right)^{\frac{1}{2}}$$

이 그림에서 알 수 있듯이 이와 같이 완만한 함수 $f(x)$의 경우 분해 단계가 높아감에 따라 모든 기법의 수렴 속도가 비슷하여 큰 차이가 없다. 물론 적응 해석을 사용하는 경우, 그렇지 않은 경우에 비해 요구되는 행렬의 크기가 상당히 감소된 것을 알수 있다. 특히, 본 논문에서 제안된 수정된 보간 웨이블렛을 이용하는 경우, 행렬의 크기가 더욱 줄어드는 장점이 있음을 알 수 있다.

$$\textbf{CASE 2 :} \quad f = \begin{cases} 0 \ , & 0 < x < 15/32 \\ 10 \ , & 15/32 < x < 17/32 \\ 0 \ , & 17/32 < x < 1 \end{cases}$$

두 번째 예제로는 $f(x)$가 매우 국부적인 곳에서만 0이 아닌 경우를 살펴보자. 이 문제는 여러 가지 해석 기법이 해의 국부 변화를 얼마나 잘 표현하는지를 시험하기 위해 고안되었다.

이 경우에 대한 엄밀해는 다음과 같으며

$$\begin{aligned} u_{exact}(x) = & -5u\left(x - \frac{15}{32}\right) \cdot \left(x - \frac{15}{32}\right)^2 \\ & + 5u\left(x - \frac{17}{32}\right) \cdot \left(x - \frac{17}{32}\right)^2 \\ & + 5\left\{\left(\frac{17}{32}\right)^2 - \left(\frac{15}{32}\right)^2\right\}x \end{aligned}$$

Fig. 9는 이 문제에 대한 해석 결과를 보여주고 있다.

이 그림에서도 알 수 있듯이 본 논문에서 제안하는 해석 기법의 수렴성이 기존 방법의 수렴성에 비해 매우 향상됨을 알 수 있다. 이것은 본 논문에서 제안한 수정된 보간 웨이블렛이 소멸 모멘트를 가짐으로서 해의 국부적인 변화를 잘 표현하기 때문이다.

Fig. 9(b)는 본 해석 기법에 적응 해석을 적용하면 매우 작은 크기의 행렬만으로도 높은 정도의 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 10은 CASE 2의 경우에 있어서 각 단계에서의 적응해를 나타낸다.

위 예제들의 경우에 ε_u , ε_d의 문턱값으로 각 초기 근사값의 최대값의 0.1%, 0.01%를 사용하였다.

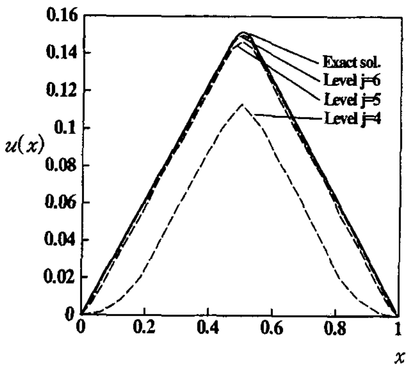


Fig. 10 The convergence of the present adaptive solution based on the lifted interpolating wavelet

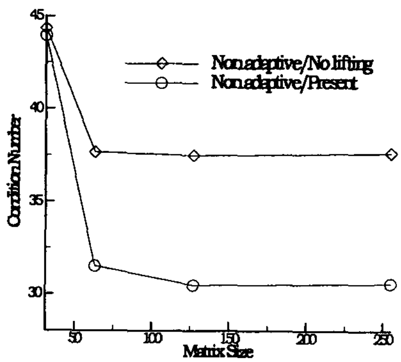


Fig. 11 The condition number for varying the system matrix size

Fig. 11은 본 연구에서 제안하는 수정된 보간 웨이블렛을 사용하면 형성되는 행렬의 조건수(condition number)도 상당히 줄어든다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 작은 조건수를 갖는 경우에는 공액 구배법(conjugate gradient method)을 이용하여 해를 더욱 효과적으로 구할 수 있으며, 실제 본 연구의 해석에 사용되었다. 만약 이 연구 결과가 일반적인 2차원, 3차원 문제까지 확장될 수 있다면 이러한 특성이 유용하게 사용될 것이다.

5. 결 론

본 논문에서는 미분 방정식의 수치 해석을 위해 수정된 보간 웨이블렛을 이용한 웨이블렛-콜로케이션 방법을 연구하였다. 본 연구에서 제시된 보간 웨이블렛은 스케일링 함수의 계수값이 해의 절점에서의 값 (또는 상수배) 으로 정의되기 때문에 다른 웨이블렛 보다 다루기가 용이하다.

또한, 본 연구에서 사용된 수정된 보간 웨이블렛은 소멸 모멘트를 갖고 있기 때문에 적응 수치 해석을 보다 효율적으로 수행할수 있는 장점이 있다. 특히, 해가 국부적으로 급격히 변화하는 경우 본 연구에서 제안하는 소멸 모멘트를 갖는 보간 웨이블렛이 해의 수렴성 측면이나 조건수 측면에서 매우 유용함을 제시하였다.

참고문헌

(1) Kim, Y. Y. and Yoon, G.H., 1999, Multi-Resolution, Multi-Scale Topology Optimization - A New Paradigm, to Appear in *Int. J. Solids Structures.*

(2) Qian, S., Amaratunga, K., Williams, J. and Weiss, J., 1994, Wavelet-Galerkin Solutions for One-Dimensional Partial Differential Equations, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **37**, pp. 2703~2716.

(3) Cohen, A. and Masson, R., 1997, *Wavelet Adaptive Methods for Second Order Elliptic Problems - Boundary Conditions and Domain Decomposition,* Preprint, Lan, Universite Pierre et Marie Curie, Paris.

(4) Glowinski, R., Pan, T.W., R.O.Wells Jr., R.O.,

and Zhou, X., 1994, *Wavelet and Finite Element Solutions for the Neumann Problem Using Fictitious Domains*, Computational Mathematics Laboratory, Technical Report, Rice University.

(5) Diaz, A.R., 1999, A Wavelet-Galerkin Scheme for Analysis of Large-Scale Problems on Simple Domains, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **44**, pp. 1599～1616.

(6) Bertoluzza, S. and Naldi, G., 1996, A Wavelet Collocation Method for the Numerical Solution of Partial Differential Equations, *Appl. Comput. Harmon. Anal*, Vol. **3**, pp. 1～9.

(7) Bertoluzza, S., 1997, An Adaptive Collocation Method Based on Interpolating Wavelets, *Multiscale Wavelet Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, San Diego, pp. 109～135.

(8) Donoho, D.L., 1992, *Interpolating Wavelet Transforms*, Technical Report, Department of statistics, Stanford University.

(9) Daubechies, I., 1998, *Ten Lectures on Wavelets,* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. **61**, SIAM Philadelphia.

(10) Deslauriers, G. and Dubuc, S., 1989, Systematic Iterative Interpolation Processes, *Constructive Approximation*, Vol. **5**, pp. 49～68.

(11) Beylkin, G. and Saito, N., 1993, Multiresolution Representations Using the Auto-Correlation Functions of Compactly Supported Wavelets, *IEEE Trans. Signal Processing Dec.*, Vol. **41**, pp. 3584～3590.

(12) Sweldens, Wim, 1998, The Lifting Scheme: A Construction of Second Generation Wavelets, *SIAM J. MATH.ANAL*, Vol. **29(2)**, pp. 511～546.

(13) Sweldens, Wim and Schroder, P., 1995, *Building Your Wavelets at Home,* Technical Report 1995:5, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina.

(14) Cohen, A. and Masson, R., 1997, *Wavelet Adaptive Methods for Elliptic Equations -Preconditioning and Adaptivity,* Preprint, Lan, Universite Pierre et Marie Curie, Paris, to appear in *SIAM J. Sci. Comp.*

(15) Dahlke, S., Dahmen, W., Hochmuth, R. and Schneider, R., 1997, Stable Multiscale Bases and Local Error Estimation for Elliptic Problems, *Applied Numerical Mathematics*, Vol. **23**, pp. 21～47.

(16) Dahmen, W., 1997, Wavelet and Multiscale Methods for Operator Equations, *Acta Numerica,* Cambridge University Press, Vol. **6**, pp. 55～228.