원형 단순 확장소음기의 성능향상을 위한 입·출구 위치의 최적설계

안세진*· 김봉준*· 정의봉**

(2000년 1월 5일 접수)

Optimum Design for Inlet and Outlet Locations of Circular Expansion Chamber for Improving Acoustic Performance

Se-Jin Ahn, Bong-Jun Kim and Weui-Bong Jeong

Key Words: Optimum Design(최적설계), Muffler(소음기), Higher Order Mode(고차모드), Inlet/Outlet Location(입·출구 덕트 위치), Four Pole Parameter(4단자 정수), Transmission Loss (투과손실)

Abstract

The acoustic characteristics of expansion chamber will be changed with the variation of inlet/outlet location due to the higher order acoustic mode in a high frequency in which the plane wave theory is not available. In this paper, the acoustic performance of reactive type expansion chamber with circular cross-section is analyzed by using the modified mode matching theory. The sensitivity analysis of four-pole parameters with respect to the location of inlet and outlet is also suggested to increase the acoustic performance. The acoustic power transmission coefficient is used as cost function, and the location of inlet and outlet is used as design variables. The steepest descent method and SUMT algorithm are used for optimization technique. Several results showed that the expansion chamber with optimally located inlet/outlet had better acoustic performance than concentric expansion chamber.

1. 서 론

덕트를 따라 소음이 전파될 경우 이 소음을 줄이기 위한 음향학적 기구로 소음기가 많이 사용되고 있다. 그러므로 소음기의 음향학적 특성을 찾을 수 있는 해석기법이 필요하게 되었고, 이를 바탕으로 원하는 주파수 대역에서 좋은 소음감소 특성을 가지는 소음기의 설계가 가능하게 된다. 초기의 소음기 해석법은 덕트내의 음파를 평면파로 가정[1]하는 것이었다. 그러나 관심주파수 영역이 고주파가 되면 이러한 가정이 성립하지 않게 된다. 그래서 고주파수 영역에서도 소음기를 해석하기 위하여 평면파 뿐만 아니라 고차모드도 고려할 수 있는 소음기 해석법이 연구[2~12]되어져 왔다. 그리고 이러한 해석법과 실험을 통하여 고주파수에서 고차모드가 소음기의 성능에 미치는 영향에 대한 연구[13~15]가 있다. 이 연구에서 고차

* 부산대학교 대학원 기계공학부
** 회원, 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소
E-mail : wbjeong@pusan.ac.kr
TEL : (051)510-2337 FAX : (051)517-3805

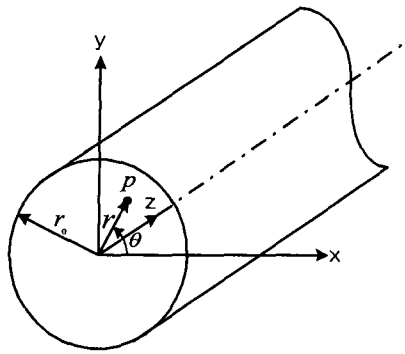


Fig. 1 Cylindrical polar coordinate system (r, θ, z)

모드를 고려하여 입· 출구 덕트의 위치를 결정한다면 원하는 주파수 대역에서 큰 효과를 가지는 소음기의 설계가 가능함을 알 수 있다. 그리고 Kim[16]은 입· 출구 덕트의 위치를 설계변수로 하여 1단사각단면 소음기와 2단 사각단면 소음기에 대하여 최적설계를 수행하여 입· 출구 덕트의 위치를 결정하였다.

본 논문에서 Kim의 원형단면 반사형 소음기의 음향특성 해석방법[12]을 사용하여, 입 · 출구의 위치에 따른 4단자정수의 감도해석법을 제시한다. 그리고 원하는 주파수 대역에서 소음기의 성능을 최대화하는 입 · 출구 덕트의 위치를 찾는 최적설계 기법을 제시하고, 1단 원형단면 소음기와 2단 원형단면 소음기에 대하여 투과손실을 최대화하는 최적설계를 수행하여 입 · 출구 덕트의 위치를 결정하고자 한다.

2. 고차모드를 고려한 투과손실 해석

원형관의 파동 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 p(r, \theta, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(r, \theta, z, t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

단,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

여기서 c는 음파의 위상속도이고 p는 음압이고, t는 시간이며, (r, θ, z) 좌표계는 Fig. 1과 같다. 그리고 입자속도 u와 음압 p의 관계식은 다음과 같다.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \qquad (2)$$

여기서 ρ_0는 밀도이다.

덕트의 벽을 강체(rigid wall)라고 가정하면 덕트의 벽에서는 반경방향의 입자속도가 0이어야 하므로 다음과 같은 경계조건을 가진다.

$$\frac{dJ_m(k_{r,mn}\, r)}{dr} = 0 \quad , at \quad r = r_0 \qquad (3)$$

여기서 r_0는 덕트의 반경이다. 식 (3)의 경계조건을 만족하는 근 $k_{r,mn}$을 구하면 파동방정식의 해는 다음과 같다.

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_m(k_{r,mn} r)\, e^{j\omega t} \cos m\theta \times (P_{i,mn}\, e^{-jk_{z,mn} z} + P_{r,mn}\, e^{jk_{z,mn} z}) \right] \qquad (4)$$

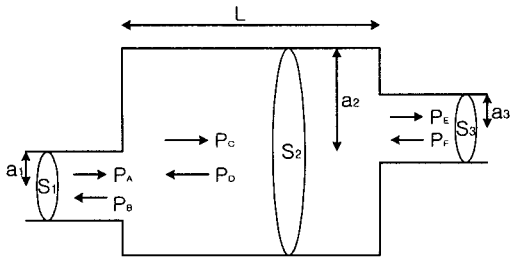
단,

$$k_{z,mn}{}^2 = k_0{}^2 - k_{r,mn}^2$$

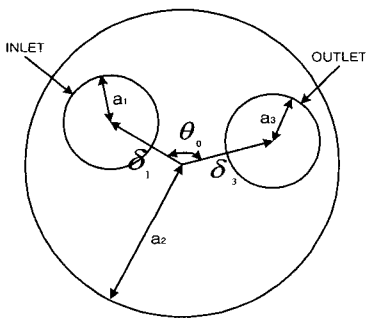
$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

여기서, $P_{i,mn}$과 $P_{r,mn}$은 입사파와 반사파의 (m,n)차 음압모드의 진폭을 나타내고, $k_{r,mn}$과 $k_{z,mn}$은 (m,n)차 모드의 파수(wave number)를 의미한다. m은 원주방향의 모드차수, n은 반경방향의 모드차수를 의미하며 ω 는 각진동수이다. 식 (2)로부터 z방향의 입자속도 u_z를 구하면 다음과 같다.

$$u_z(r, \theta, z, t) = \frac{1}{\rho\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[k_{z,mn} J_m(k_{r,mn} r)\, e^{j\omega t} \times \cos m\theta (P_{i,mn}\, e^{-jk_{z,mn} z} - P_{r,mn}\, e^{jk_{z,mn} z}) \right] \qquad (5)$$



(a) Circular simple expansion chamber muffler



(b) Inlet/outlet location of muffler

Fig. 2 Geometry of the muffler

Fig. 2와 같이 임의의 입·출구의 위치를 가지는 단순확장형 소음기에서 δ_1은 입구의 편심거리(offset distance), δ_3는 출구의 편심거리, θ_0는 입구와 출구의 상대각도(separation angle)라 하고, 입구, 중간확장관, 출구의 채택모드를 각각 (L_1, L_2), (M_1, M_2), (N_1, N_2)이라고 하면, z=0에서의 압력연속조건식과 입자속도 연속조건식 그리고 z=L에서의 압력연속조건식과 입자속도 연속조건식을 만들 수 있어 압력과 입자속도의 계수들 간의 관계식[12]이 만들어 진다.

한편 단순확장형 소음기의 4단자 정수는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{pmatrix} p_{in} \\ Y_{in}\nu_{in} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{out} \\ Y_{out}\nu_{out} \end{pmatrix} \tag{6}$$

여기서 ν는 질량속도(mass velocity)이고, Y는 특성 임피던스(characteristic impedance)로 $\frac{c}{S}$이며 S는 덕트의 단면적이다. 첨자 *in*과 *out*은 입구와 출구파이프를 의미한다. ζ_{out}을 출구($z = L$)에서의 고유 음향임피던스(specific acoustic impedance)라 하면 4단자 정수는 다음과 같이 계산할 수 있다.[12]

$$T_{11} = \left(\frac{p_{in}}{p_{out}}\right)_{\zeta_{out}\to\infty} = \left[\frac{A_{00}+B_{00}}{2E_{00}}\right]_{E_{00}=F_{00}} \tag{7}$$

$$T_{12} = \left(\frac{p_{in}}{Y_{out}\nu_{out}}\right)_{\zeta_{out}\to 0} = \left[\frac{A_{00}+B_{00}}{2E_{00}}\right]_{E_{00}=-F_{00}} \tag{8}$$

$$T_{21} = \left(\frac{Y_{in}\nu_{in}}{p_{out}}\right)_{\zeta_{out}\to\infty} = \left[\frac{A_{00}-B_{00}}{2E_{00}}\right]_{E_{00}=F_{00}} \tag{9}$$

$$T_{22} = \left(\frac{Y_{in}\nu_{in}}{Y_{out}\nu_{out}}\right)_{\zeta_{out}\to 0} = \left[\frac{A_{00}-B_{00}}{2E_{00}}\right]_{E_{00}=-F_{00}} \tag{10}$$

여기서 A_{00}와 B_{00}는 입구파이프의 입사평면파와 반사평면파이고, E_{00}와 F_{00}는 출구파이프의 입사평면파와 반사평면파이다,

위의 식 (7)~(10)을 계산하기 위하여 각 식 (7)~(10)의 임피던스 조건에 맞도록 경계조건을 주어 압력과 입자속도의 계수들 간의 관계식들로부터 식 (11)과 같은 선형방정식을 만들 수 있다.[12]

$$[P]\{x\} = \{Q\} \tag{11}$$

여기서 $[P]$와 $\{Q\}$는 z=0에서의 압력연속조건과 입자속도 연속조건 그리고 z=L에서의 압력연속조건과 입자속도 연속조건과, 식 (7)~(10)에서 결정할 수 있는 경계조건으로 결정되어지는 $(L_1+1)(L_2+1)+2(M_1+1)(M_2+1)+(N_1+1)(N_2+1) \times (L_1+1)(L_2+1)+2(M_1+1)(M_2+1)+(N_1+1)(N_2+1)$ 와 $(L_1+1)(L_2+1)+2(M_1+1)\ (M_2+1)+(N_1+1)(N_2+1) \times 1$의 기지의 행렬이고, $\{X\}$는 $(L_1+1)(L_2+1)+2(M_1+1)(M_2+1)+(N_1+1)(N_2+1) \times 1$의 미지의 행렬인데 식 (12)와 같은 요소를 가진다.

$$\{X\} = \{A_{0,0}\ C_{0,0}\sim C_{M_1,M_2}\ E_{0,0}\sim E_{N_1,N_2}\ B_{0,0}\sim B_{L_1,L_2}\ D_{0,0}\sim D_{M_1,M_2}\ F_{3,0,0}\}^T \tag{12}$$

여기서, $A_{m,n}$과 $B_{m,n}$은 입구관에서, $C_{m,n}$과 $D_{m,n}$은 중간확장관에서, $E_{m,n}$과 $F_{m,n}$은 출구관에서 (m,n)차 모드를 갖는 입사파와 반사파의 음압진폭을 나타낸다.

투과손실은 4단자 정수를 이용하여 식 (11)의 계산 결과를 다음 식 (13)에 대입하여 구할 수 있다.

$$TL\ [dB] = 20\log_{10}\left\{\sqrt{\frac{Y_{out}}{Y_{in}}}\left|\frac{T_{11}+T_{12}+T_{21}+T_{22}}{2}\right|\right\} \tag{13}$$

3. 입· 출구 위치의 최적설계

입· 출구의 위치에 따라서 투과손실은 많은 차이가 난다. 그러므로 입· 출구의 위치를 조절하여 원하는 주파수 대역에서 소음기의 성능을 최대화 할 수 있다. 본 연구에서는 입· 출구의 위치를 최적화하기 위하여 식 (14)와 같은 각 주파수별 음향파워투과율의 합을 목적함수 J_0로 정의하였다.

$$J_0(q_1,q_2,q_3) = \sum_i \frac{1}{T_t(q_1,q_2,q_3,f_i)\,T_t(q_1,q_2,q_3,f_i)^*} \tag{14}$$

여기서,

$$T_t(f_i) = \sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} T_{mn}(f_i) \tag{15}$$

이고, f_i는 주파수를 나타내며 $T_{mn}(m,n=1,2)$은 4단자 정수이다. 설계변수 q_1, q_2, q_3는 입구 및 출구의 편심거리와 상대각도로 다음과 같이 가정하였다.

$$\begin{pmatrix} q_1=\delta_1 \\ q_2=\delta_3 \\ q_3=\theta_0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

목적함수의 설계변수에 대한 감도는 다음 식 (17)와 같이 계산되어 진다.

$$\frac{\partial J_0}{\partial q_j} = \frac{-2\sum_i G(f_i)}{\left(\sum_i T_t(f_i)T_t(f_i)^*\right)^2} \tag{17}$$

여기서,

$$G(f_i) = RE[T_t(f_i)]\frac{\partial RE[T_t(f_i)]}{\partial q_j} + IM[T_t(f_i)]\frac{\partial IM[T_t(f_i)]}{\partial q_j} \tag{18}$$

이고

$$\frac{\partial(T_t(f_i))}{\partial q_j} = \frac{\partial(T_{11}+T_{12}+T_{21}+T_{22})}{\partial q_j} \tag{19}$$

여기서 RE는 실수부를, IM은 허수부를 의미한다. 한편 식 (11)을 설계변수에 대하여 편미분하면 다음 식 (20)과 식 (21)을 구할 수 있고

$$\frac{\partial[P]}{\partial q_j}\{X\} + [P]\frac{\partial\{X\}}{\partial q_j} = \frac{\partial\{Q\}}{\partial q_j} \tag{20}$$

$$\frac{\partial\{X\}}{\partial q_j} = [P]^{-1}\left(\frac{\partial\{Q\}}{\partial q_j} - \frac{\partial[P]}{\partial q_j}\{X\}\right) \tag{21}$$

식 (12)와 식 (21)에서 $\partial A_{0,0}/\partial q_j$를 구할 수 있음을 알 수 있다. 식 (21)의 $\partial[P]/\partial q_j$와 $\partial\{Q\}/\partial q_j$는 z=0에서의 압력연속조건과 입자속도 연속조건 그리고 z=L에서의 압력연속조건과 입자속도 연속조건과, 식 (7)~(10)에서 결정할 수 있는 경계조건으로 만들어진 조건식을 편미분하여 만든 계산식 (A1~A6)으로부터 구할 수 있다.

입· 출구덕트의 크기, 중간덕트의 크기 그리고 중간덕트의 길이가 정해졌을 때 목적함수를 최소화하는 입· 출구덕트의 위치를 황금분할탐색(Golden section search)와 최속강하법(steepest descent method)[17]을 사용하여 계산하였다. 이때, 입· 출구덕트가 중간덕트의 바깥에 위치 할 수 없는 제약조건을 고려하기 위하여 순차비제약최소화기법(SUMT)[17]을 이용하여 다음 식 (22)과 같이 수정된 목적함수를 사용하였다.

Table 1 Optimized inlet and outlet locations

	initial value	optimized value
δ_1(meter)	0.0	0.000166
δ_3(meter)	0.0	0.0467
θ_0(degree)	0.0	45

$$J(q_1, q_2, q_3) = J_0(q_1, q_2, q_3) + P(q_1, q_2, q_3) \quad (22)$$

장애함수(barrier function) $P(q_1, q_2, q_3)$로는

$$\zeta\left\{\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{a_2 - \delta_1 - a_1} + \frac{1}{\delta_3} + \frac{1}{a_2 - \delta_3 - a_3}\right\} \quad (23)$$

을 사용하여 다음 식 (24)~(25)와 같은 제약조건을 만족시켰다.

$$0 \le \delta_1 \le a_2 - a_1 \quad (24)$$

$$0 \le \delta_3 \le a_2 - a_3 \quad (25)$$

여기서 장애함수의 계수 ζ는 설계변수가 제약조건을 벗어나지 않으면서 원래의 목적함수 값에 영향을 최소화하도록 조절하여 결정하였다.

4. 단순확장소음기에의 최적설계 적용 예

Fig. 2와 같이 가운데 챔버의 길이가 0.5m, 반경이 0.075m이고, 입·출구 파이프의 반경이 0.012 m인 단순확장형 소음기에 적용하였다. 입출구에서는 (0,0)~(1,1)모드까지, 중간확장관에서는 (0,0)~(3,3)모드까지 채택하여 계산하였으며, 0~5,000Hz의 주파수 범위에서 1Hz 간격으로 음향파워투과율을 계산하였다. 그리고 최적설계에 의해서 투과손실성능이 최대가 되는 입·출구의 편심거리와 상대각도를 계산하고 그 결과를 *Table 1*에 나타내었다. Table 1에서 볼 수 있듯이 1단 소음기의 경우 입·출구 파이프 중 하나는 가운데 챔버와 동심원 상에 나머지 하나는 (1,0) 모드의 노달 선(nodal line)상에 있을 때 소음기의 성능이 최대가 됨을 알 수 있는데 소음기의 입

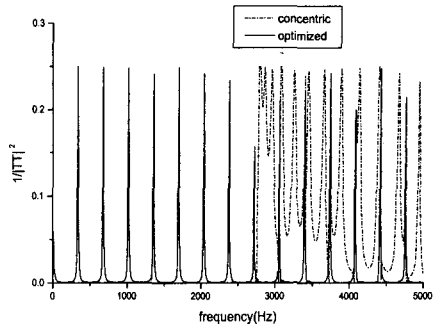


Fig. 3 Comparison of cost function between centered and optimized single chamber muffler

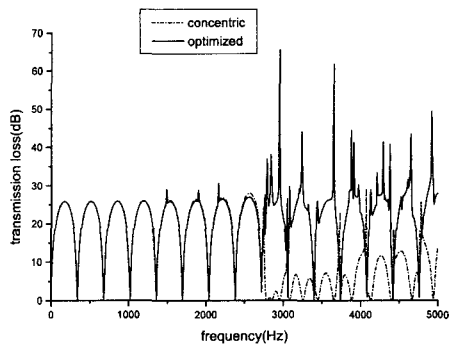
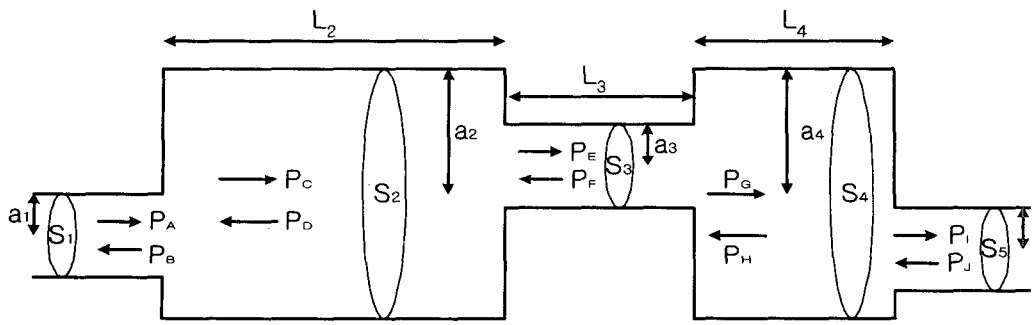


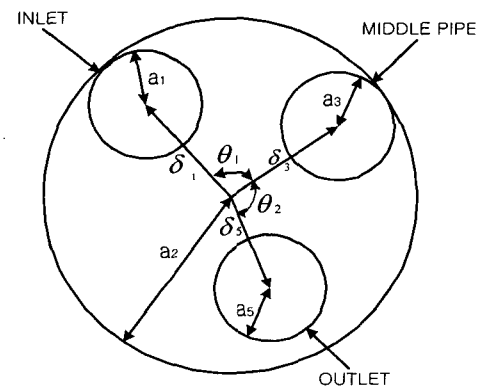
Fig. 4 Comparison of transmission loss between centered and optimized single chamber muffler

출구가 머플러와 동심원 상에 있을 때 목적함수의 값은 25.58이었는데 최적설계로 얻어진 최적 입·출구 파이프 위치에 의한 목적함수 값은 5.68이다. Fig. 3에 최적설계 전과 후의 입·출구 덕트의 위치에 대한 각 주파수의 목적함수 값을 나타내었고, Fig. 4에 최적설계 전과 최적설계 후의 입·출구 덕트의 위치에 대한 고차모드를 고려한 투과손실을 나타내었다. 최적설계로 구한 입·출구의 위치가 입·출구가 머플러와 동심원 상에 있을 때 보다 투과손실 성능이 훨씬 좋음을 볼 수 있다.

다음은 Fig. 5와 같이 첫번째 챔버의 길이가 0.225m, 반경이 0.075m, 두번째 챔버의 길이가 0.2m, 반경이 0.075m이고, 첫 번째, 두 번째, 세



(a) Circular double expansion chamber muffler



(b) Inlet/outlet location of double expansion chamber muffler

Fig. 5 Geometry of double expansion chamber muffler

번째 파이프의 반경이 0.025m이고, 두 번째 파이프의 길이가 0.1m인 2단 소음기의 경우에 대하여 0~3,500Hz에서 목적함수를 최소화하는 최적설계를 수행하였다. 설계변수는 세 파이프의 편심거리, δ_1, δ_3, δ_5와 첫 번째 파이프와 두 번째 파이프의상대각도 θ_1과 두 번째 파이프와 세 번째 파이프의상대각도 θ_2이다. 최적화된 설계변수의 값은 Table 2와 같다. 소음기의 입· 출구가 머플러와 동심원 상에 있을 때 목적함수의 값은 18.13이었는데 최적설계로 얻어진 최적 입· 출구 위치에 의한 목적함수 값은 3.86이다. Fig. 6에 최적설계 전과 후의 세 파이프의 위치에 대한 각 주파수의 목적함수 값을 나타내었고, Fig. 7에 최적설계 전과 최적설계 후의 입· 출구 덕트의 위치에 대한 고차모드를 고려한 투과손실 예측값을 나타내었는데 본 논문에서 제안하는 방법으로 관심주파수 영역에서 투과손실 성능을 향상시킬 수 있는 최적 입· 출구위치를 계산 할 수 있음을 알 수 있다.

Table 2 Optimized inlet, mid-pipe and outlet locations

	initial value	optimized value
δ_1(meter)	0.0	0.050
δ_3(meter)	0.0	0.00402
δ_5(meter)	0.0	0.0501
θ_1(degree)	0.0	62.3
θ_2(degree)	0.0	0.057

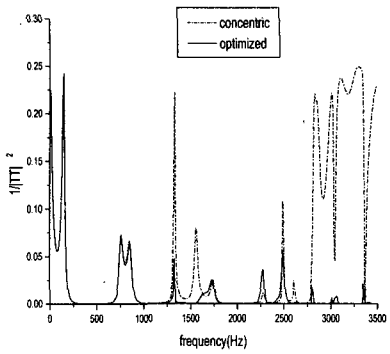


Fig. 6 Comparison of cost function between centered and optimized double chamber muffler

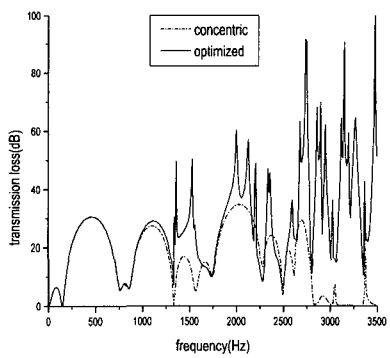


Fig. 7 Comparison of transmission loss between centered and optimized double chamber muffler

5. 결 론

(1) 고차모드를 고려한 원형 단순 확장 소음기의 투과손실 계산식으로부터 입· 출구 위치에 대한 4단자정수의 감도해석법을 제시하였다.

(2) 원하는 주파수 범위에서 투과손실 성능을 최대화 할 수 있는 목적함수를 제안하고 최적설계를 수행하였으며 그 결과 입· 출구 위치를 동심원상에 설계하는 것보다 원형 단순 확장관의 투과손실 성능을 현저히 향상시킬 수 있었다.

참고문헌

(1) Crocker, M.J., 1984, *Noise Control,* Van Nostrand Reinhold Company Inc.

(2) Miles, J., 1944, "The Reflection of Sound due to Change in Cross Section of a Circular," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 16, pp. 14~19.

(3) El-Sharkawy, A.I., and Nayfeh, A.H., 1978, "Effect of an Expansion Chamber on the Propagation of Sound in Circular Ducts," *Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 63, pp. 667~674.

(4) Jeong-Guon Ih and Byung-Ho Lee, 1985, "Analysis of Higher-Order Mode Effects in the Circular Expansion Chamber with Mean Flow," *Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 77, pp. 1377~1388.

(5) Kim, Y.-H., Choi, J.-W., and Lim, B.-D., 1990, "Acoustic Characteristics of an Expansion with Constant Mass Flow and Steady Temperature Gradient (Theory & Numerical Simulation)," Trans. J. Vib. Acoust. ASME Vol. 81, pp. 460~467.

(6) Kim, Y.-H., and Kang, S.-W., 1993, "Green's Solution of the Acoustic Wave Equa- tion for a Circular Expansion Chamber with Arbitary Locations of Inlet, Outlet Port, and Termination Impedance," *Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 94, pp. 473~490.

(7) Munjal, M.L., 1987, "A Simple Numerical Method for Three-Dimensional Analysis of Simple Expansion Chamber Mufflers of Rectangular as well as Circular Cross-section with a Stationary Medium," *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 116, pp. 71~88.

(8) Åbom, M., 1990, "Derivation of Four-Pole Parameters Including Higher Order Mode Effects for Expansion Chamber Mufflers with Extended Inlet and Outlet," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, pp. 403~418.

(9) 김봉준, 정의봉, 황상문, 1999, "고차모드를 고려한 사각형 단순 확장관의 간편음향 해석법의 개선," 한국소음진동공학회지, 제9권, 제2호, pp. 340~347.

(10) 김봉준, 정의봉, 황상문, 1999, "원형단순확장관의 입·출구 위치와 단면 크기를 고려한 음향해석법," 한국소음진동공학회지, 제9권, 제5호, pp. 914~921.

(11) 김봉준, 정의봉, 이정환, 2000, "임의의 모드를 가지는 모드적합법을 사용한 원형단순확장관의 음향 해석," 한국음향학회지, 제19권, 제1호, pp. 54~60.

(12) 김봉준, 정의봉, 이정환, 2000, "임의의 입출구 위치를 가지는 소음기해석을 위한 개선된 모드일치법," 대한기계학회논문집, 제24권, 제5호, pp. 1314~1322.

(13) Eriksson, L.J., 1980, "Higher Mode Effects in Circular Ducts and Expansion Chambers," *Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 68, pp. 545~550.

(14) Eriksson, L.J., 1982,"Effects of Inlet/Outlet Locations on Higher order modes in Silencers," *Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 72, pp. 1208~1211.

(15) Sahasrabudhe, A.D., Munjal, M.L., S.Anantha Ramu, 1992, "Design of Expansion Chamber Mufflers Incorporating 3-D Effects," *Noise Control Engineering Journal*, Vol. 38(1), pp. 27~38.

(16) 김봉준, 정의봉, 황상문 1999, "사각형 단순확장소음기의 성능향상을 위한 입/출구 위치의 최적설계," 한국소음진동공학회지 제9권, 제4호, pp. 738~746.

(17) Jasbir, S. Arora, 1989, *Optimum Design,* McGraw-Hill.

부 록

식 (21)의 $\partial[P]/\partial q_j$와 $\partial\{Q\}/\partial q_j$는 z=0에서의 압력연속조건과 입자속도 연속조건 그리고 z=L에서의 압력연속조건과 입자속도 연속조건과, 식 (7)~(10)에서 결정할 수 있는 경계조건으로 만들어진 조건식을 편미분하여 계산할 수 있는데, 예를 들어 δ_1으로 편미분하면 z=0에서 압력연속조건에서

$$-2\sum_{n=1}^{M_2}(C_{0n}+D_{0n})J_1(k_{r2,0n}\delta_1)J_1(k_{r2,0n}a_1)+\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=0}^{M_2}\frac{2}{k_{r2,mn}}(C_{mn}+D_{mn})(-1)^m\times\left\{k_{r2,mn}J_{m-1}(k_{r2,mn}\delta_1)-\frac{m}{\delta_1}J_m(k_{r2,mn}\delta_1)\right\}\times J_1(k_{r2,mn}a_1)=0 \quad (A1)$$

$$-2\sum_{n=1}^{M_2}(C_{0n}+D_{0n})k_{r2,0n}J_1(k_{r2,0n}\delta_1)\times\frac{J_0'(k_{r2,0n}a_1)}{k_{r1,0n'}^2-k_{r2,0n}^2}+2\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=0}^{M_2}(C_{mn}+D_{mn})(-1)^m\times\left\{k_{r2,mn}J_{m-1}(k_{r2,mn}\delta_1)-\frac{m}{\delta_1}J_m(k_{r2,mn}\delta_1)\right\}\times\frac{J_0'(k_{r2,mn}a_1)}{k_{r1,0n'}^2-k_{r2,mn}^2}=0$$

$$,\ n'=1\sim L_2 \quad (A2)$$

$$2\sum_{n=1}^{M_2}(C_{0n}+D_{0n})\frac{J_{m'}'(k_{r2,0n}a_1)}{k_{r1,m'n'}^2-k_{r2,0n}^2}\times\left\{k_{r2,0n}J_{m'-1}(k_{r2,0n}\delta_1)-\frac{m'}{\delta_1}J_{m'}(k_{r2,0n}\delta_1)\right\}+2\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=0}^{M_2}(C_{mn}+D_{mn})\frac{J_{m'}'(k_{r2,mn}a_1)}{k_{r1,m'n'}^2-k_{r2,mn}^2}\times\left\{k_{r2,mn}J_{m'-m-1}(k_{r2,mn}\delta_1)-\frac{m'-m}{\delta_1}J_{m'-m}(k_{r2,mn}\delta_1)\right\}=0$$

$$,\ m'=1\sim L_1,\ n'=0\sim L_2 \quad (A3)$$

의 편미분 식을 z=0에서 속도연속조건에서

$$0=0 \quad (A4)$$

$$2a_1k_{z1,00}(A_{00}-B_{00})J_1(k_{r2,0n'}\delta_1)J_1(k_{r2,0n'}a_1)-2a_1\sum_{n=1}^{L_2}k_{z1,0n}k_{r2,0n'}B_{0n}J_1(k_{r2,0n'}\delta_1)\times\frac{J_0'(k_{r2,0n'}a_1)J_0(k_{r1,0n}a_1)}{k_{r1,0n}^2-k_{r2,0n'}^2}+a_1\sum_{m=1}^{L_1}\sum_{n=0}^{L_2}k_{z1,mn}B_{mn}\times\left\{k_{r2,0n'}J_{m-1}(k_{r2,0n'}\delta_1)-\frac{m}{\delta_1}J_m(k_{r2,0n'}\delta_1)\right\}\times\frac{J_m'(k_{r2,0n'}a_1)J_m(k_{r1,mn}a_1)}{k_{r1,mn}^2-k_{r2,0n'}^2}=0$$

$$,\ n'=1\sim M_2 \quad (A5)$$

$$-\frac{2a_1}{k_{r2,m'n'}}k_{z1,00}(A_{00}-B_{00})(-1)^{m'}J_1(k_{r2,m'n'}a_1)\times\left\{k_{r2,m'n'}J_{m'-1}(k_{r2,m'n'}\delta_1)-\frac{m'}{\delta_1}J_{m'}(k_{r2,m'n'}\delta_1)\right\}+2a_1\sum_{n=1}^{L_2}k_{z1,0n}B_{0n}(-1)^{m'}\times\left\{k_{r2,m'n'}J_{m'-1}(k_{r2,m'n'}\delta_1)-\frac{m'}{\delta_1}J_{m'}(k_{r2,m'n'}\delta_1)\right\}\times\frac{J_0'(k_{r2,m'n'}a_1)J_0(k_{r1,0n}a_1)}{k_{r1,0n}^2-k_{r2,m'n'}^2}+a_1\sum_{m=1}^{L_1}\sum_{n=0}^{L_2}k_{z1,mn}B_{mn}\left\{k_{r2,m'n'}J_{m-m'-1}(k_{r2,m'n'}\delta_1)-\frac{m-m'}{\delta_1}J_{m-m'}(k_{r2,m'n'}\delta_1)\right\}\times\frac{J_m'(k_{r2,m'n'}a_1)J_m(k_{r1,mn}a_1)}{k_{r1,mn}^2-k_{r2,m'n'}^2}=0$$

$$,\ m'=1\sim M_1,\ n'=0\sim M_2 \quad (A6)$$

과 같은 편미분식을 얻을 수 있고, z=L에서의 압력연속조건과 입자속도 연속조건식은 모두 0이 되어 $\partial[P]/\partial\delta_1$와 $\partial\{Q\}/\partial\delta_1$을 구성할 수 있다. 나머지 설계변수에 대하여 편미분된 행렬도 같은 방법으로 구할 수 있다.