

버블패킹기법을 이용한 무요소 갤러킨법에 관한 연구

최유진* · 정순완* · 김승조**
(1999년 12월 10일 접수)

Study On The Element Free Galerkin Method Using Bubble Packing Technique

Yoo Jin Choi, Soon Wan Chung and Seung Jo Kim

Key Words: Meshfree(무요소법), Element Free Galerkin Method(무요소 갤러킨법), Moving Least Square Approximation(이동최소자승근사법), Bubble Packing Technique(버블패킹기법)

Abstract

The meshing of the domain has long been the major bottleneck in performing the finite element analysis. Research efforts which are so-called meshfree methods have recently been directed towards eliminating or at least easing the requirement for meshing of the domain. In this paper, a new meshfree method for solving nonlinear boundary value problem, based on the bubble packing technique and Delaunay triangle is proposed. The method can be efficiently implemented to the problems with singularity by using formly distributed nodes.

1. 서론

유한요소법은 현재 공학 문제 전반에 걸친 대표적인 해석기법으로서 그 안정성 및 정확성을 검증받아 널리 쓰이고 있는 수치기법이다. 유한요소법에서 격자(mesh)는 절점들 간의 연계성이 있는 요소(element)를 가리키는데, 복잡한 기하영역을 가지는 문제나 연속적으로 격자를 재구성해야 하는 대변형, 파괴 문제 등과 같이 격자의 성능에 따라 전체 해의 정확도가 많은 영향을 받는 문제들의 경우, 요소간의 연계성 때문에 어려움에 봉착하는 경우가 있다. 또한 3차원 문제를 해석시에 격자 생성에 소요되는 계산시간은 미분방정식을 푸는데 소요되는 것 이상으로 많은 시간이 소요되기도 한다. 이와 같은 문제를 해결하고 개선하려는 연구 동향 중에 요소의 필요없이 편

미분 방정식을 이산화하여 연립방정식을 푸는 새로운 수치방법에 관한 연구가 1990년대 중반부터 일련의 수치해석기법 연구자들에 의해 연구⁽¹⁾되었다. 이들 연구의 초점은 유한요소법의 근간인 요소 연결성(element connectivity)의 필요없이 공간상에 흩어져 있는 절점들을 이용해 커브 피팅(curve fitting)하는 개념을 수치해석에 응용하려는 것이다. 통칭 무요소법(meshless method)이라 명명되는 이 연구들은 근사 함수를 구성하는 방식에 따라 다양하게 이름 붙여졌으나 공통적인 개념은 기존의 유한요소법과 달리 요소 개념을 사용하지 않고 해석 영역과 경계부분에 흩어져 있는 절점들만을 사용한다는 것이다. 본 연구에서는 형상 함수를 유도하는 근사법으로서 이동최소자승(moving least square) 근사를 사용하는 무요소 갤러킨법^(2~5)을 근간으로 하고, 기존의 대부분의 무요소법들이 Lagrange Multiplier Method를 사용함으로 인해 발생하는 문제를 벌칙기법을 이용한 경계조건의 부여로 해결⁽⁶⁾하였다. 그리고 수치적분을 위한 바탕셀의 필요성 및 가중함수 영향영역 결정을 버블패킹기법(bubble packing technique)

* 서울대학교 대학원 항공우주공학과

** 회원, 서울대학교 항공우주공학과

E-mail : sjkim@snu.ac.kr

TEL : (02)880-7388 FAX : (02)887-2662

을 이용해 통합적으로 해결하였다. 수치예제로서는 2차원 비정상 비압축성 유동장 해석으로서 초기속도를 가지고 움직이는 윗면이 있는 공동문제 (shear cavity problem)를 사용하여 제안된 방법을 검증하였다.

2. 본 론

2.1 무요소 갤러킨법

무요소 갤러킨법은 근사함수를 구하기 위한 근사기법으로서 이동 최소 자승 근사(moving least square approximation)를 사용하는데 함수 $u(x)$ 에 대한 이동 최소 자승 보간 근사함수는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$u^h(x) = \sum_i^m p_i(x) a_i(x) \quad (1)$$

식 (1)을 구성하는 계수 $a_i(x)$ 는 x 에 관한 함수가 되고, 임의의 점 x 에서 $a_i(x)$ 를 구하기 위해 다음과 같은 범함수를 최소화하는 계수를 찾아야 한다.

$$J(a^*) = (u - \sum_i^m a_i^* p_i, u - \sum_i^m a_i^* p_i)_x \quad (2)$$

$$= \sum_j w(x-x_j) [p^T(x_j) a(x) - u_j]^2$$

식 (2)를 최소화하는 $a(x)$ 와 u 사이의 선형방정식을 유도하면,

$$A(x)a(x) = B(x)u \quad (3)$$

식 (3)을 구성하는 각각의 행렬을 정리하면 다음과 같다.

$$A(x) = \sum_j w_j(x) p(x_j) p(x_j)^T \quad (4)$$

$$B(x) = [w_1(x) p(x_1), \dots, w_n(x) p(x_n)] \quad (5)$$

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (6)$$

$$p(x_j)^T = [p_1(x_j), p_2(x_j), \dots, p_m(x_j)] \quad (7)$$

식 (4)~(7)을 이용하여 $u^h(x)$ 를 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u^h(x) = \sum_j^m \sum_i^m p_i(x) (A^{-1}(x) B(x))_{ij} u_i \quad (8)$$

$$= \sum_j \phi_j(x) u_j$$

이 식으로부터 형상함수 $\phi_j(x)$ 는 다음의 식으로 정의될 수 있다.

$$\phi_j(x) = \sum_i p_i(x) (A^{-1}(x) B(x))_{ij} \quad (9)$$

본 논문에서 사용된 가중함수는 지수 가중함수로서 다음과 같은 형태의 함수이다.

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_i/c)^{2k}} - e^{-(r_i/c)^{2k}}}{(1 - e^{-(r_i/c)^{2k}})} & \text{if } d_i \leq r_i \\ 0 & \text{if } d_i > r_i \end{cases}$$

여기서, $d_i = \|x - x_i\|$ 이고, $k_i = 1$ 로 잡는다.

r_i 는 가중함수의 지지반경이다. 가중함수의 선택은 무요소법의 수렴성에 중요한 영향을 미치는 요소로서 영향 영역을 어느 정도로 잡느냐에 따라 해의 수렴에 민감한 영향을 끼치는 것으로 보고되었다.⁽⁴⁾ 그러나 대부분의 무요소법들은 영향 영역을 어느 정도 잡는지에 대한 정확한 준거 기준이 없는 탓에, 특히 비균질 절점 분포를 가지는 경우는 절점 분포에 따라 영향영역도 연동하여 변화하여야 하며 적분을 위한 바탕셀의 존재와 더불어 수렴성에 미치는 영향은 큰 것으로 나타나고 있다. 본 연구에서는 이런 어려움을 극복하고자 다음 절에서 설명될 버블패킹기법을 이용하였다. 즉 가중함수의 영향영역을 결정해주는 지지반경을 버블패킹기법을 통해 구해진 방울 반지름의 상수배 α 로서 결정하고 이때 사용한 값은 $2 \leq \alpha \leq 3$ 이다.

무요소 갤러킨법은 적분을 위한 바탕셀을 구성해야 하며 이때의 격자는 유한요소의 격자와는 달리 단지 적분을 위해 기하적인 해석 영역을 나눠주는 역할을 하는 격자이다. Fig. 1은 무요소 갤러킨법을 이용하여 수치해석을 할 때 기하적인 영역과 가중함수에 사용되는 영향영역, 적분을 위한 바탕셀들을 도시한 것이다.

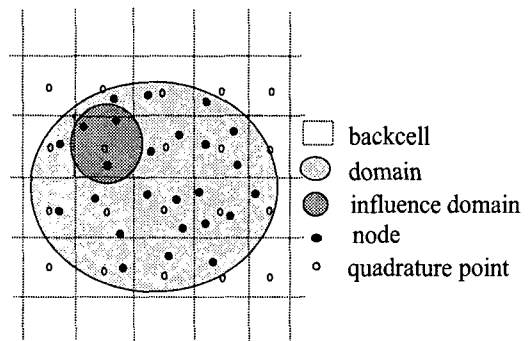


Fig. 1 Geometry of backcell, quadrature point and influence domain

2.2 버블패킹기법

기존의 무요소법들은 앞절의 Fig. 1과 같이 적분을 위한 바탕셀을 절점의 분포와는 별도로 사각형 격자를 이용해 구성하고 있다. 이와같은 바탕셀을 이용 시에 절점 분포가 비교적 동일하지 않고 해의 급격한 변화가 있어서 그 부분에 높은 절점 밀도를 가져야 하는 문제를 모사하는 경우에는 아주 높은 정도의 적분점을 이용하여야만 한다든지, 해의 정확도가 떨어지게 되는 등의 어려움이 있었다. 이를 좀더 효율적으로 조절하고 밀도변화에 따른 영향영역의 결정을 일관되고 통합적인 방법으로 조절하기 위해 버블패킹기법을 도입하였다. 버블패킹기법⁽⁷⁾은 물위에 떠있는 방울들이 형성하는 모양이 연속된 육각형을 이루는데 착안한 방법으로 방울사이의 분자간의 반 데르 발스 힘과 같은 개념을 적용해 절점 위치를 제어함으로써 보다 더 좋은 질의 격자를 얻기 위해 주로 이용되어 온 방법이다. 본 연구에서는 이 방법을 응용하여 무요소 갤러킨법을 수치모사하기 위해 필요한 절점 정보를 획득하고 이로부터 수치적분을 위한 바탕셀을 구성하며, 구성된 방울의 반지름을 이용하여 가중함수의 영향 영역을 결정함으로써 통합되고 효율적인 무요소법을 구현하였다.

본 연구에서 응용된 버블패킹기법은 3단계의 과정으로 구성되었다. 1단계는 초기방울위치를 결정하는 단계로서 Fig. 2에서 보여지는 바와 같은 순서로 대상영역을 방울로 채운다.

2단계는 방울 사이의 반발력을 정의하는 단계로 초기 방울의 위치선정으로 인해 생기는 방울끼리의 틈새와 겹침을 줄이며 방울간격을 조정하는 과정이다. 두 방울 사이의 평형거리 r_0 가 두 방울의 반지름의 합이라 정의할 때 두 방울 사이의 인력과 척력은 방울사이의 거리 r 에 관한 3차 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$f(r) = \begin{cases} ar^3 + br^2 + cr + d, & 0 \leq r \leq 1.5r_0 \\ 0, & r < 0, r > 1.5r_0 \end{cases}$$

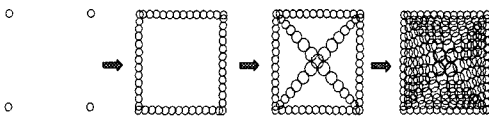


Fig. 2 Initial bubble placement

$$a = \frac{5}{4} \frac{k_0}{r_0^2}, \quad b = -\frac{19}{8} \frac{k_0}{r_0}, \quad c = 0, \quad d = \frac{9}{8} k_0 r_0$$

여기서 k_0 는 평형거리에서의 선형 용수철 상수에 해당한다.

3단계로서 동적 시뮬레이션을 수행하는데 이 과정은 최종적인 방울의 정렬상태를 얻기 위한 과정으로서 각 방울에 미치는 힘들의 합력이 0이 되는 평형상태를 구함이 목적이며 이를 계산하기 위해 방울의 중심에 질량을 두고 댐핑효과를 고려한 동적 시뮬레이션을 수행하게 된다. 따라서 i 번째 방울에 대한 지배방정식은 식 (10)과 같다.

$$m_i \ddot{x}_i(t) + c_i \dot{x}_i(t) = f_i(t) \quad (10)$$

이 미분방정식은 4차 Runge-Kutta 방법을 이용하여 시간적분을 수행하였다.

이상의 과정을 통해 방울이 구성되면 각 방울의 중심점을 수치모사를 위한 절점 정보로 저장하고 Fig. 3와 같이 Delaunay 삼각법과 최대 내각법⁽⁸⁾을 사용하여 바탕셀을 구성한다. 앞 절들에서 설명된 무요소법과 버블패킹기법을 이용해 수치해석을 수행 시 논리흐름을 정리하면 Fig. 4의 흐름도로 요약될 수 있다.

2.3 수치해석

2.3.1 벌칙함수를 이용한 변분식

수치예제는 Fig. 5와 같이 정의된 2차원 비정상 비압축성 유동으로서 지배방정식 및 경계조건, 초기조건은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{on } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} \quad \text{in } \Gamma_1, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \quad \text{in } \Gamma_2 \\ \mathbf{u}(x, y) &= \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \bar{\Omega} \end{aligned}$$

여기서 \mathbf{u} 는 속도, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 총 응력 텐서량이다. 경계조건을 적용하기 위해 기존의 대부분의 무요소법과 달리 벌칙 함수법을 적용하여 구한 변분식을 정리하면 다음과 같다.

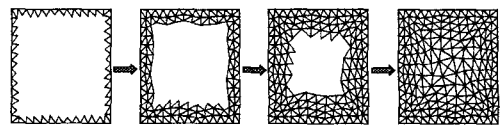


Fig. 3 Construction of backcell from the bubble distribution

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (P, \nabla \cdot \mathbf{v}) - 2\nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_2} \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_2, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

2.3.2 Operator Splitting Algorithm

위의 변분식을 시간에 따라 적분하기 위해 Operator Splitting Technique을 사용하였는데 대류항(convection term)은 2차 아담스-배시포스 겔레킨법을, 소산항(advection term)은 1차 내재적 오일러 시간적분법을, 비압축성과 압력항은 전 내재적 시간적분법을 사용하여 이산화하였다.

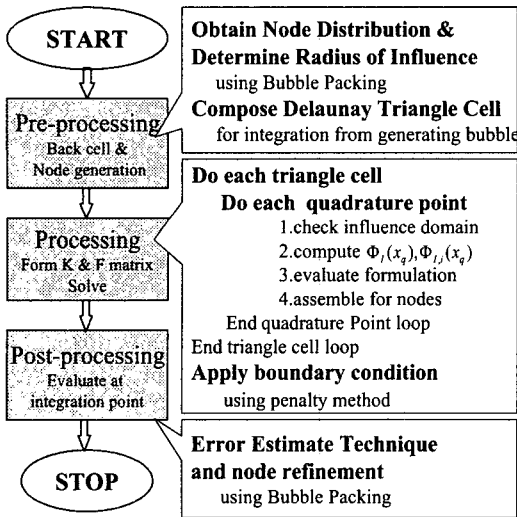


Fig. 4 Flowchart of EFGM using bubble packing technique

전 과정은 두 단계에 의한 반복해를 구하는 과정으로 요약될 수 있다.

1단계:

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^m) = -\Delta t \left[\frac{3}{2} \mathbf{A}(\mathbf{u}^m) \mathbf{u}^m - \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{u}^{m-1}) \mathbf{u}^{m-1} \right] - \nu \mathbf{K} \mathbf{u}^* + \mathbf{F}^m$$

2단계:

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*) = \Delta t \mathbf{C} \mathbf{p}^{m+1}$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{u}^{m+1} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}^T \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{C}^T [\mathbf{u}^* + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{p}^{m+1}] = 0$$

$$\Rightarrow \text{Calculate } \mathbf{p}^{m+1} = -\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{C}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{u}^*$$

$$\Rightarrow \text{Find } \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^* + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{p}^{m+1}$$

2.3.3 수치해석결과

수치해석을 위해 절점 간격을 결정해주는 절점 간격함수에 따른 세 가지 유형의 비균일 방울유형을 사용하여 수치모사 하였다. 방울을 생성하기 위해 사용한 절점 간격 함수는 다음과 같다.

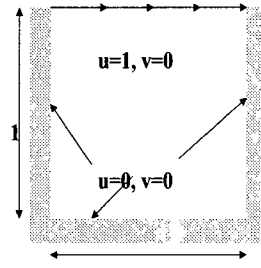


Fig. 5 Cavity problem

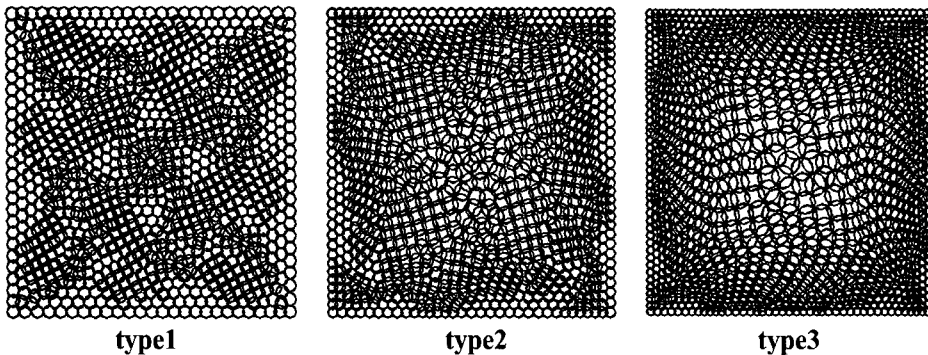


Fig. 6 Bubble types used in the numerical examples

$$f(x, y) = c_1 \times x(1-x)y(1-y) + c_2$$

where $c_1 = (i_{order} - 1) \times 0.2,$
 $c_2 = 0.04 - 0.004 \times (i_{order} - 1)$

각 변수 C_1, C_2 에 따라 절점 간격 및 공동의 네 모서리 쪽으로의 조밀도를 조절할 수 있는데 수치해석을 위해 사용된 세 가지 유형의 방울모양은 Fig. 6과 같다. 각 type들은 경계부분으로 갈수록 방울들의 조밀도가 다른 양상을 보이는 모델로서 위 식의 i_{order} 에 따라 구분한 것이다. 따라서 방울 반경에 따라 동일한 type에 대해서도 총 절점수는 달라진다. Type 2를 이용하고 방울 반경 0.02, 총 절점수 3243, 총 삼각셀 6348, 영향영역반경 0.06을 사용하여 해석한 Reynolds수가 100인 경우의 수치모사가 Fig. 7에, type 3을 이용하고 총 절점수 3323, 총 삼각셀 6526, 영향영역 반경 0.06을 사용하여 해석한 Reynolds수가 1000인 경우의 수치모사가 Fig. 8와 같다. 두 경우 모두 시간간격은 0.04를 사용하였는데 유사정상상태에 도달한 후의 속도, 유선(streamline), 압력분포가 잘 묘사됨을 확인할 수 있다. 특히 공동의

아래쪽 모서리에 생기는 주와동(primary vortices)과 부와동(secondary vortices)을 모두 잘 묘사함을 확인할 수 있다.

Table 1에서는 Reynolds수가 400일 경우, 본 연구의 수치예제와 같은 문제를 다양한 기법으로 해석한 결과^(9,10)들과 공동의 $x=0.5$ 에서의 수평방향 속도값을 비교해 놓았다.(본 연구에서 사용한 기법을 MBP로 구분하였다.) 이를 위해 유한요소법과 벌칙기법을 이용하였고, Reddy⁽⁹⁾의 결과와 균일한 57*57개의 삼각형 격자를 이용한 Winters and Cliffs⁽¹⁰⁾의 결과를 비교하였는데, 더 적은 수의 자유도를 가지고 더 정확한 수치모사가 가능함을 알 수 있다. 절점수가 증가함에 따라 두 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 9의 (a),(b)는 h-수렴율을 확인하기 위하여 절점수를 변화시키면서 공동의 수직/수평 중심선을 따라 무차원화된 속도분포를 나타낸 것으로서, Reynolds수 100의 경우에 유한요소법을 이용한 결과와 multigrid법을 이용한 Ghia의 결과⁽¹¹⁾를 함께 비교하였다. Ghia의 결과는 비균일한 격자를 사용하고 전체격자수가 16641개를 사용한 결

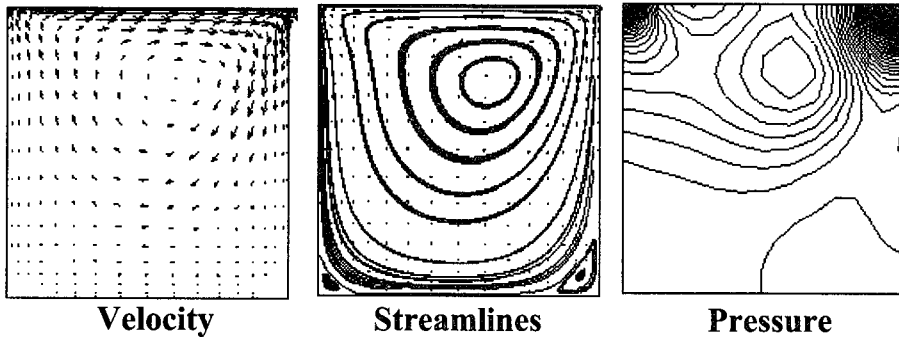


Fig. 7 Contours for Re=100

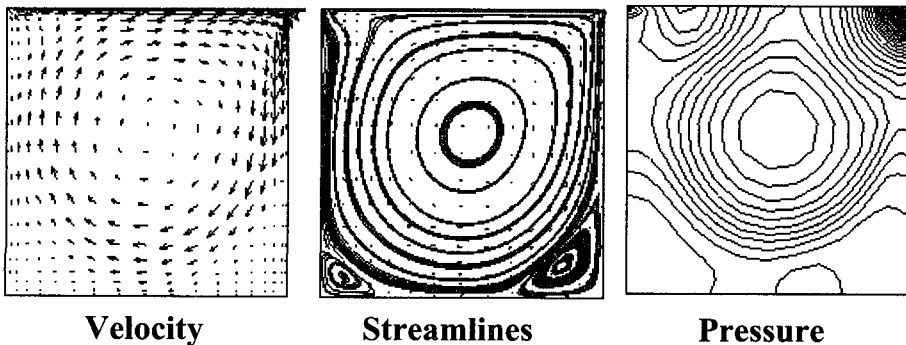


Fig. 8 Contours for Re=1000

Table 1 Comparison with various numerical methods

y-coordinate	MBP bubble type 3 total node 1209	Reddy Penalty FEM Uniform 20*20	Winters & Cliff Uniform triangular 57*57	Ghia Multigrid method 129*129
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-0.1414	-0.0736	-0.1408	-0.1439
0.2	-0.2700	-0.1461	-0.2736	-0.2646
0.3	-0.3242	-0.1976	-0.3220	-0.3103
0.4	-0.2511	-0.1821	-0.2358	-0.2195
0.5	-0.1218	-0.0995	-0.1146	-0.1148
0.6	-0.0009	-0.0008	-0.0009	0.0014
0.7	0.1223	0.0916	0.1200	0.1211
0.8	0.2406	0.1675	0.2364	0.2344
0.9	0.3583	0.2704	0.3468	0.4187
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

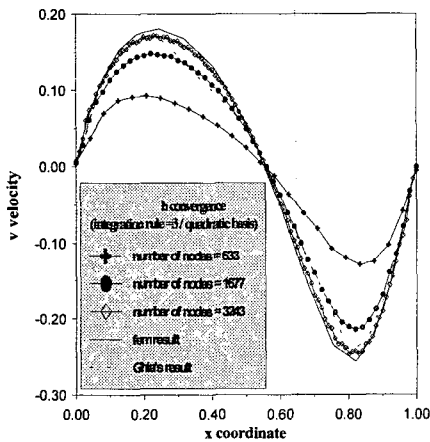


Fig. 9(a) Y-directional velocity along the horizontal center line

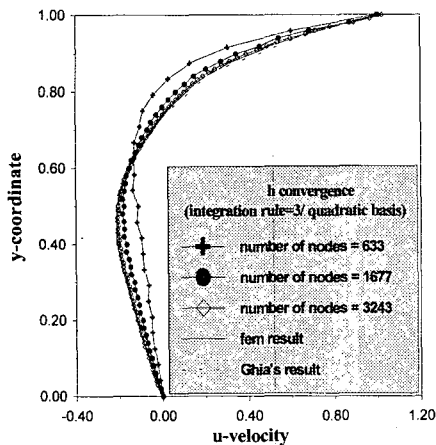


Fig. 9(b) X-directional velocity along the vertical center line

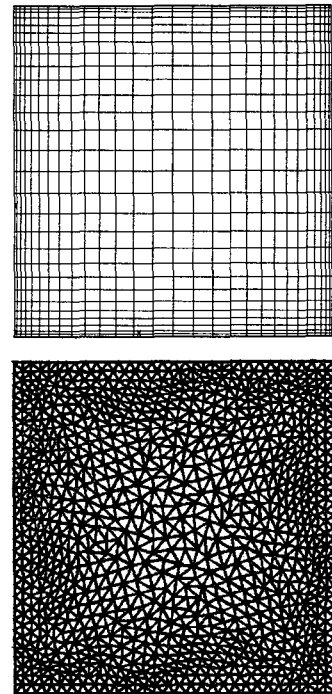


Fig. 10 Backcell geometries

과이고, 유한요소법의 경우 비균일 1681개의 4절점 유한요소를 사용하고 본 연구에서와 같이 operator splitting technique을 사용하여 해석한 결과이다. 총 절점수가 증가하고 절점 간의 간격이 조밀해 질수록 수치모사가 잘 이루어짐을 확인할 수 있다.

본 연구에서는 적분을 수행하기 위한 바탕셀을 다음 두 가지의 경우로 나누어 비교하였다. 하나

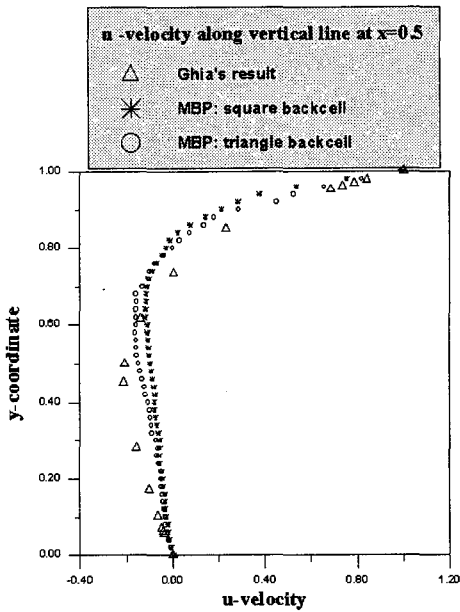


Fig. 11(a) X-directional velocity at $x=0.5$ for two backcell types

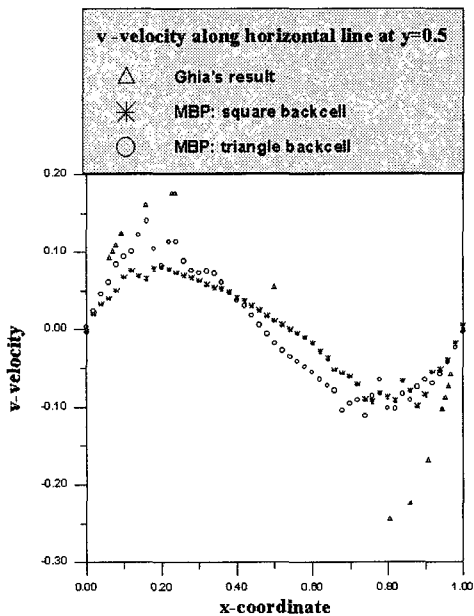


Fig. 11(b) Y-directional velocity at $y=0.5$ for two backcell types

는 대부분의 무요소법에서 사용하는 사각형 격자를 사용한 경우이고, 다른 하나는 버블패킹기법

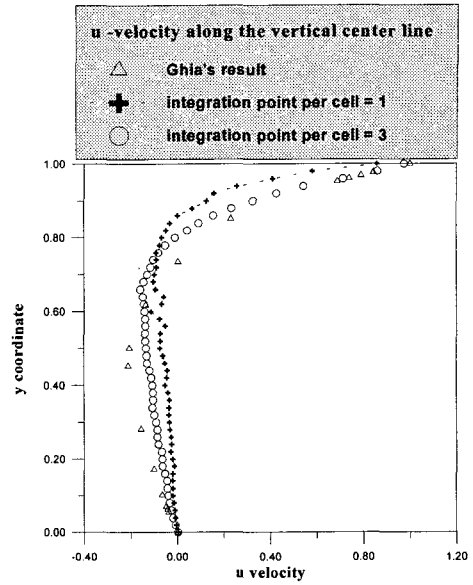


Fig. 12(a) X-directional velocity at $x=0.5$ for several quadrature rules

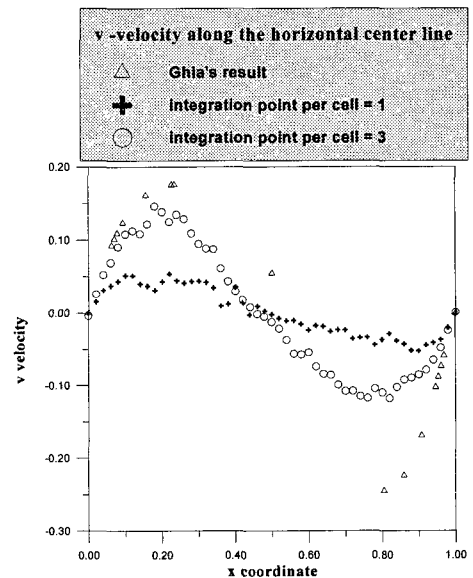


Fig. 12(b) Y-directional velocity at $y=0.5$ for several quadrature rules

을 통해 생성된 삼각형 격자를 사용한 경우이다.(Fig. 10) 전자에서는 625개의 바탕셀에 적분을 9점 적분을 수행하였고, 후자에서는 type 2의 결과(절점수 997개)를 이용하여 1864개의 삼각형에 적분을 3점 적분을 수행하였다. 따라서 사각형의

경우 총 적분점 수는 5625개이고, 삼각형의 경우는 5592개이다. 그리고 이에 대한 해석 결과를 Fig. 11의 (a), (b)에 나타내었다. 전체적인 경향을 보았을 때, 본 연구에서 제안한 삼각형 셀의 경우에서 더 적은 적분점을 이용해 더 좋은 수치모사가 가능함을 확인할 수 있다. 또한 삼각형 바탕셀을 사용하였을 경우에 적분점의 영향을 살펴보기 위해 한 바탕셀 당 적분점 개수를 변화시키며 수렴성을 본 결과가 Fig. 12의 (a), (b)에 있다. 총 절점수 965점인 type 1의 경우에 뚜렷한 결과로서 적분점 개수가 늘어날수록 더 정확한 모사가 가능하다. 무요소법은 유한요소와 달리 형상함수가 다항함수가 아니기 때문에 적절한 수렴성을 얻기 위해 높은 정도의 적분율이 필요하다. 그러나 삼각형 바탕셀을 사용한 본 연구에서는 3점 적분으로도 받아 들일만한 정확성을 확보할 수 있어 다른 무요소법에 비해 적분율에 덜 민감함을 확인하였다.

3. 결론

본 논문에서는 영향영역을 결정하기에 많은 어려움이 있는 기존의 무요소 갤러킨 방법을 보완하기 위하여 버블패킹기법을 도입하여 절점을 조절하고 이 보완된 무요소법을 이용해 비정상, 비압축성 2차원 유동장을 해석하였다. 버블패킹기법을 이용함으로써 해석의 정확성을 위해 영역에 따라 집중적인 비균일 절점 분포를 사용 시에도 다른 무요소법과 달리 영향 영역의 범위에 덜 민감하면서도 더 정확한 수치모사가 가능하였다. 또한 한번의 절점 분포 획득을 통해 수치적분 시 필요한 바탕셀까지 통합된 체계로 운용할 수 있고 기존의 사각형 바탕셀을 사용할 때보다 적분율에 덜 민감함을 확인하였다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 연구지원 (No. UD980011AD)에 의해 수행되었습니다. 이에 관계자 여러분에게 감사의 뜻을 전합니다.

참고문헌

(1) Duarte C.A., 1995, "A Review of Some

Meshless Methods to Solve Partial Differential Equations," Technical report 95-06, TICAM, University of Texas at Austin.

- (2) Belytschko T., Lu Y.Y. and Gu L., 1994, "Element Free Galerkin Methods," *Int. J. Numerical Methods Engrg.*, Vol. 37, pp. 229~256.
- (3) Lu Y.Y., Belytschko T. and Gu L., 1994, "A New Implementation of the Element Free Galerkin Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 113, pp. 397~414.
- (4) Belytschko T., Krongauz Y., , Organ D., Fleming M. and Krysl P., 1996, "Meshless Methods: An overview and Recent Developments," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 3~47.
- (5) 석병호, 송태한, 임장근, 2000, "EFGM에서 필수경계조건 처리를 위한 형상함수 수정법," 대한기계학회 논문집 A, 제24권 제3호, pp. 803~809.
- (6) 최유진, 김승조, 1998, "새로운 수치 기법: 요소 자유 갤러킨 방법에 관한 연구," 한국항공우주학회지, 26권 7호, pp. 72~84.
- (7) Shimada K., Gossard D.C., 1998, "Automatic Triangular Mesh Generation of Trimmed Parametric Surfaces for Finite Element Analysis," *Computer Aided Geometric Design*, 15, pp. 199~222.
- (8) Watson D.F., 1981, "Computing the N-Dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes," *The Computer Journal*, 24(2), pp. 167~172.
- (9) Reddy J.N., 1982, "Penalty-Finite-Element Analysis of 3D Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 35, pp. 87~106.
- (10) Winters & Cliff, 1979, "A Finite Element Study on Driven Laminar Flow in a Square Cavity," Rept. No. AERE-R9444, UK Atomic Energy Authority.
- (11) Ghia U., Ghia K.N. and Shin C.T. , 1982, "High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier Stokes Equations and a Multigrid Method," *Journal of Computational Physics*, 48, pp. 387~411.