

유한요소 교호법을 이용한 모드 I 하중 하의 삼차원 균열의 해석

박재학* · 김태순** · Satya N. Atluri***
(1999년 7월 5일 접수)

Analysis of Three Dimensional Cracks Subjected to the Mode I Loading by Using FEAM

Jai Hak Park, Tae-Soon Kim and Satya N. Atluri

Key Words: Stress Intensity Factor(응력강도계수), Finite Element Alternating Method(유한요소 교호법), Integral Equation(적분방정식), Displacement Discontinuity(변위의 불연속), Three Dimensional Crack(삼차원 균열), Surface Crack(표면균열)

Abstract

The finite element alternating method is extended further for general three dimensional cracks in an isotropic body subjected to the mode I loading. The required analytical solution for a three dimensional crack in an infinite isotropic body is obtained by solving the integral equations. In order to remove the high singularity in integration, the technique suggested by Keat et al. was used. With the proposed method several example problems are solved in order to check the accuracy and efficiency of the method.

1. 서론

유한요소 교호법(finite element alternating method, FEAM)은 정확한 응력강도계수(stress intensity factor)를 구하는 효과적인 방법으로 알려져 있다. 이 방법은 이차원 균열 문제뿐만 아니라 삼차원 균열 문제에도 성공적으로 적용되었다.⁽¹⁻³⁾ 그렇지만 삼차원 균열의 경우 현재까지 타원형 균열이나 타원형 형태의 표면균열을 해석할 수 있었다. 본 논문에서는 일반적인 형태의 삼차원 균열을 해석할 수 있도록 유한요소교호법을 확장하려고 한다.

설비에서 발견되는 균열의 많은 경우가 삼차원

균열이므로 삼차원 균열에서의 응력강도계수를 구하는 문제는 일찍부터 많은 사람들의 관심의 대상이었다. 이차원 균열을 균열전위의 연속된 분포로 나타냄으로써 균열문제를 편리하게 해석할 수 있었던 것과 같이 삼차원 균열에 대해서도 이와 유사한 방법을 적용하려는 시도는 일찍부터 있어 왔다.

1982년 Wiles와 Curran⁽⁴⁾은 변위의 불연속을 이용하여 공동(cavity)과 균열문제를 해석하였다. 그들은 공동과 균열을 몇 개의 표면요소(surface element)로 나누고 각 표면요소에서는 균일한 변위의 불연속을 가정하여 해석하였다. Murakami 등^(4,5)은 체적력법(body force method)를 사용하여 임의 형태의 표면균열들을 해석하였다.

이러한 해석에 있어서 어려운 점은 적분방정식의 커널에서 나타나는 특이성이다. Keat 등⁽⁷⁻⁹⁾은 이러한 특이성을 제거할 수 있는 방법을 제안하였다. 그들은 균열면을 포함하는 무한 평면을 가정하고 이 평면에 일정한 크기의 변위의 불연속이 존재한다고 가정하였다. 이 경우는 단지 가정

* 회원, 충북대학교 안전공학과
E-mail : jhpark@cbucc.chungbuk.ac.kr
TEL : (0431)261-2460 FAX : (0431)261-2460
** 회원, 충북대학교 대학원 안전공학과
*** University of California at Los Angeles, U.S.A.

된 무한평면으로 나누어진 두 반무한 물체가 강제이동을 한 결과가 되므로 물체 내의 어느 곳에서도 응력이 발생하지 않을 것이다. 이러한 성질을 이용하여 적분 방정식의 커널에 존재하는 특이성을 제거하고 적분을 행할 수 있음을 보였고, 유한 물체 내에 존재하는 삼차원 균열을 해석할 수 있는 경계적분법(boundary integral method)을 제안하였다.

본 논문에서는 유한요소 교호법을 이용하여 유한 물체 내에 존재하는 임의의 형태의 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제안하려고 한다. 유한요소 교호법에서는 고려하는 문제에 대한 이론해와 유한요소법을 번갈아 사용한다. 따라서 삼차원 균열에 대한 유한요소교호법의 적용을 위해서는 무한물체 내에 임의의 형태의 삼차원 균열이 존재하고 임의의 표면력(traction)이 균열면에 작용하는 경우에 대한 해가 필요하다.

유한요소 교호법을 이용하여 타원형의 표면균열 또는 모서리 균열 등을 해석하는 방법은 이미 Nishioka와 Atluri⁽¹⁰⁾에 의하여 제안되었다. 그들은 기본 이론해로 Vijayakumar와 Atluri⁽¹¹⁾에 의하여 제안된 무한 물체에 타원형 균열이 존재하고 균열면 상에 임의의 차수의 다항식으로 표시되는 수직 혹은 전단응력이 작용하는 문제의 해를 이용하였다. 그들의 방법은 타원형의 삼차원 균열이나 표면 균열을 해석하는 데는 편리하지만 임의의 형태의 균열은 해석할 수 없고, 안정된 균열 성장 문제 등과 같이 균열면의 일부분에만 표면력이 작용되는 경우의 문제를 풀어야 하는 경우에는 부적당하다. 따라서 이러한 목적에 맞는 새로운 이론해를 이용하여 유한요소 교호법을 확장하려고 한다.

유한요소 교호법에 필요한 이론해로 변위의 불연속을 이용한 적분방정식 방법을 이용하기로 한다. 그리고 적분 시에는 Keat 등이 제안한 아이디어를 이용한다. 그러나 새로운 형상함수와 적분 방법들을 사용하여 정확한 해를 얻을 수 있도록 한다.

제시된 해석 방법의 효율성과 정확성을 검토하기 위하여 기존에 발표된 논문의 결과가 있는 문제를 해석하여 서로 비교하였다. 이를 통하여 유한요소 교호법은 이차원 균열 뿐만 아니라 삼차원 임의의 형태의 균열에 대한 해석에서도 편리하게 사용될 수 있는 방법임을 알 수 있었다.

2. 삼차원 균열의 이론해

2.1 지배방정식 구성

무한 물체 내에 임의의 형태의 삼차원 균열이 존재한다고 하고 균열면 상에는 임의의 표면력이 작용된다고 하자. 이때 균열면은 평면을 이루고 있다고 하고, 편의상 균열에 수직인 축을 x_3 축으로 취한다. 균열면에 작용되는 표면력에 의하여 균열면에는 변위의 불연속이 발생하게 된다.

이러한 변위의 불연속에 의하여 발생하는 물체 내의 임의의 점 x 에서의 응력과 변위는 다음과 같이 표시된다:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c} G_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) D_k(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2, \quad (1)$$

$$u_i(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c} F_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) D_j(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2. \quad (2)$$

여기서 S_c 는 균열면, $D_k(\boldsymbol{\xi})$ 는 균열면 상의 위치 $\boldsymbol{\xi}$ 에서의 k 방향의 변위의 불연속이다. 첫 번째 식의 커널 $G_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 와 $F_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ 는 $\boldsymbol{\xi}$ 에 존재하는 k 방향의 단위 intensity의 변위의 불연속에 의하여 위치 x 에서 발생하는 응력과 변위이다. 여기서 intensity는 변위의 불연속 값에 그 불연속이 존재하는 균열면의 면적을 곱한 값으로 정의되며, 단위 intensity의 변위의 불연속이라 함은 Dirac의 Delta함수꼴로 표시되는 변위의 불연속이다. 이때 G_{ijk} 와 F_{ij} 는 Green함수가 되며 참고문헌 4에 주어져 있다.

식 (1)로부터 균열면 상에 작용되는 표면력과 변위의 불연속과의 관계를 다음 식과 같이 표현할 수 있다:

$$t_i(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) D_j(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2. \quad (3)$$

여기서 $G_{ij} = G_{ijp} n_p$ 이며 n_p 는 균열면에 수직인 단위벡터의 성분이다. 따라서 collocation point x 에 대하여 주어진 표면력을 만족하는 변위의 불연속을 구하면 문제의 해를 구하는 것이 된다.

식 (3)의 적분을 위하여 Fig. 1과 같이 균열면

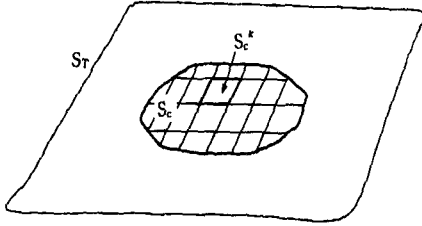


Fig. 1 A crack surface in an infinite plane

을 \$N\$개의 요소로 나누고 각각의 균열요소를 \$S_c^1, S_c^2, \dots, S_c^N\$으로 나타내기로 하자. 식 (3)의 적분을 각 균열요소에 대하여 행함에 있어서 \$x\$와 \$\xi\$가 동일한 요소 내에 존재하지 않는 경우는 커널은 특이성을 가지지 않으므로 적분에 어려움이 없으며, 일반적인 Gaussian 형태의 적분공식을 사용함으로써 적분값을 구할 수 있다. 그러나 \$x\$와 \$\xi\$가 동일한 요소 내에 존재하는 경우는 커널은 \$1/R^3\$ 형태의 특이성을 가지므로 적분을 행하기가 쉽지 않다.

이러한 어려움을 극복하기 위하여 Keat 등^(7,8)은 다음과 같은 방법을 제시하였다. 균열을 포함하는 어떤 무한 평면 \$S_T\$를 고려한다. 본 문제의 경우 \$x_3=0\$면을 \$S_T\$로 취할 수 있을 것이다. 만약 \$S_T\$면 전체에 걸쳐서 일정한 값 \$D_j^0\$ (\$j=1, 2, 3\$)의 변위의 불연속을 가정한다면 이는 단순히 \$S_T\$면에 의하여 구분되는 두 반무한체를 \$D_j^0\$만큼 강제이동 시킨 결과가 될 것이고, 강제이동이므로 이에 의해서는 균열면을 포함한 두 반무한체의 어느 곳에서도 응력이 발생되지 않을 것이다. 따라서 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$0 = \int \int_{S_T} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) D_j^0 d\xi_1 d\xi_2. \quad (4)$$

만약 \$D_j^0\$ (\$j=1, 2, 3\$)로 균열면 상의 점 \$x\$에서의 변위의 불연속 \$D_j(\mathbf{x})\$를 취한다면 식 (4)는 다음으로 된다:

$$0 = \int \int_{S_T} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) D_j(\mathbf{x}) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5)$$

식 (3)과 식 (5)로부터

$$t_i(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) [D_j(\xi) - D_j(\mathbf{x})] d\xi_1 d\xi_2 - D_j(\mathbf{x}) \int \int_{S_T - S_c} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) d\xi_1 d\xi_2. \quad (6)$$

이 된다. 여기서 \$S_T - S_c\$는 무한 평면인 \$S_T\$에서 균열면인 \$S_c\$를 제외한 면을 뜻한다. 이러한 과정을 통하여 피적분 함수에서 가장 특이성이 높은 항은 제거되므로 \$x\$와 \$\xi\$가 동일한 균열요소 내에 존재하는 경우에도 적분 가능하게 된다. 그렇지만 이러한 목적을 위하여 식 (6)의 마지막 항인 무한 평면에 관한 적분이 첨가되었음을 알 수 있다. 또는 collocation point \$x\$가 임의의 균열요소 \$S_c^k\$ 내에 있다고 할 때 식 (6) 대신 다음 식을 이용할 수도 있다:

$$t_i(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c^k} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) [D_j(\xi) - D_j(\mathbf{x})] d\xi_1 d\xi_2 + \int \int_{S_c - S_c^k} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) D_j(\xi) d\xi_1 d\xi_2 - D_j(\mathbf{x}) \int \int_{S_T - S_c^k} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) d\xi_1 d\xi_2 \quad (7)$$

2.2 형상함수

전술한 바와 같이 적분을 위하여 균열면을 \$N\$개의 균열요소로 나누었다. 이때 각 균열요소는 4개의 절점을 가지고 있다고 가정한다. 그리고 요소 내에서의 변위의 불연속은 절점에서의 값과 적절한 형상함수(shape function)로 나타낼 수 있다고 한다. 요소 내에서의 국부좌표를 \$(\xi, \eta)\$라고 하자. 여기서 \$\xi\$와 \$\eta\$는 요소 내에서 각각 -1에서 1까지의 값을 가진다. 그러면 요소 내에서의 변위의 불연속은 다음과 같이 표현된다:

$$D_j(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{D}_j^0. \quad (8)$$

여기서

$$N(\xi, \eta) = \{N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), N_3(\xi, \eta), N_4(\xi, \eta)\}$$

$$D_j^o = \{D_{j1}^o, D_{j2}^o, D_{j3}^o, D_{j4}^o\}^T$$

이고 D_{jk}^o 는 균열요소의 k번째 절점에서의 x_j 방향의 변위의 불연속이다. 균열선단을 포함하지 않는 균열요소의 경우 형상함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned} \quad (9)$$

균열선단을 포함하고 있는 요소의 경우 균열선단에서부터의 거리를 r 이라 할 때 변위의 불연속은 \sqrt{r} 의 함수의 형태로 나타나야 하므로 형상함수를 다음과 같이 가정한다. 만약 $\xi = -1$ 이 균열선단인 경우의 형상함수는

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{\sqrt{(1+\xi)}}{4\sqrt{2}}(1-\xi)(1-\eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{\sqrt{(1+\xi)}}{4\sqrt{2}}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{\sqrt{(1+\xi)}}{4\sqrt{2}}(1+\xi)(1+\eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{\sqrt{(1+\xi)}}{4\sqrt{2}}(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned} \quad (10)$$

이 되고, 균열선단이 달라지면 유사하게 가정할 수 있다. 이 때 한 균열요소에서 두 변이 동시에 균열선단이 되는 경우는 없다고 가정한다.

2.3 적분

식 (7)의 적분방정식을 풀기 위해, 이론적인 방법 또는 수치적인 방법을 사용하여 각각의 항을 정확하게 적분해야 한다.

우선, collocation point x 가 존재하는 균열요소 에 대한 적분을 위해, Fig. 2와 같이 x 에 중심을 둔 좌표축 x, y 를 고려한다.

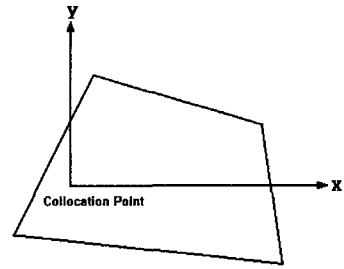


Fig. 2 A local x, y coordinate

균열요소 내에서 D_j 를 $x=0, y=0$ 근처에서 Taylor 급수로 나타내면 다음과 같이 된다:

$$\begin{aligned} D_j(x, y) &= D_j(0, 0) + D_{j,x}x + D_{j,yy}y^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}D_{j,xx}x^2 + \frac{1}{2}D_{j,xy}xy + \frac{1}{2}D_{j,yy}y^2 \\ &\quad + (\text{higher order terms}) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $D_{j,x}$ 는 $x=0, y=0$ 에서의 D_j 의 x 에 대한 편미분 값을 뜻하고 다른 항의 경우도 유사하게 정의된다. 형상함수가 국부좌표 ξ 와 η 에 의해 정의되므로 x, y 에 관한 편미분은 다시 ξ 와 η 에 관한 편미분으로 표현하여야 한다. 이는 chain rule을 사용하여 행할 수 있다.

만약 S_c^k 가 내부에 존재하는 요소이고 형상함수가 식 (9)와 같이 정의되는 경우에는 식 (11)에서 x, y 에 대한 3차 이상의 고차항은 0이 될 것이고, 형상함수가 식 (10)과 같이 정의되는 경우는 3차 이상의 고차항이 존재할 것이다. 이때 $D_{j,\xi\xi} = 0, D_{j,\eta\eta} = 0$ 이므로 계산을 간단히 할 수 있다.

Keat 등의 연구에서와 같이 Gauss의 발산정리 (divergence theorem)를 사용하여 면적적분을 선적분으로 행할 수 있다. 이 경우 식 (11)과 (12)에서 3차이상의 고차항이 존재하지 않으면 적분의 이론 값을 구하게 된다.

지금 임의의 균열요소인 S_c^k 에 대하여 적분하는 경우를 고려하여 보자. collocation point x 가 이 균열요소 내에 존재한다고 하고 x, y 좌표의 중심을 Fig. 2에서와 같이 collocation point에 잡으

면 모드 I 문제의 경우 커널 G_{ij} 는 $1/R^3$ 의 특이성을 가지게 된다. 여기서 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

식 (7)의 과정을 통해 식 (11)의 전개에서 상수항은 균열요소내에서 적분하지 않아도 되므로 식 (11)의 전개후 (7)의 우변 첫 번째 항에서 적분해야 할 함수들은 다음과 같이 된다:

$$\frac{x}{R^3}, \frac{y}{R^3}, \frac{x^2}{R^3}, \frac{xy}{R^3}, \frac{y^2}{R^3}.$$

이와 같은 피적분 함수를 가지는 면적적분의 수행은 선적분을 이용하여 행할 수 있고, 선적분으로 바꿀 때의 피적분 함수 형태는 Keat, Erguven, Dwyer⁽⁸⁾의 논문에 주어져 있다.

다음으로, 식 (7)의 우변 두 번째 항의 적분은 무한평판 $S_T - S_c^k$ 에 대한 적분이므로 면적적분의 적분영역이 무한대인 어려움이 있다. 그렇지만 이 경우도 면적적분 대신 선적분을 행함으로써 간단히 적분을 행할 수 있다. 식 (7)의 우변 두 번째 항의 적분은 collocation point \mathbf{x} 가 동일한 요소 내에 포함되어 있지 않는 경우의 적분이므로 피적분함수 내에 특이성이 존재하지 않는다. 따라서 일반적인 수치적분 공식을 사용하면 적분값을 구할 수 있다. 그렇지만 실제 프로그램을 해 보면 적분값의 정확성에 따라 얻어진 응력강도계수의 정확성이 좌우됨을 알 수 있다. 따라서 가능한 한 적분값의 정확한 이론치를 구하는 것이 필요하다.

지금 collocation point \mathbf{x} 는 균열요소 S_c^k 내에 존재하고 적분은 균열요소 S_c^l ($l \neq k$)에 대하여 행한다고 하자. 편의상 \mathbf{x} 에 좌표의 원점을 둔 x, y 좌표계를 가정한다. S_c^l 내에서의 변위의 불연속 D_j 는 S_c^l 내의 일점 (x_1, y_1) 에 대하여 Taylor 급수로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} D_j(x, y) = & D_j(x_1, y_1) + D_{j,x}(x - x_1) \\ & + D_{j,y}(y - y_1) + \frac{1}{2} D_{j,xx}(x - x_1)^2 \\ & + \frac{1}{2} D_{j,xy}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{1}{2} D_{j,yy}(y - y_1)^2 \\ & + (\text{higher order terms}). \end{aligned} \quad (12)$$

이때 각 편미분 값들은 (x_1, y_1) 에 대하여 계산

된 값들이다. 이들 각 항에 대한 적분들을 선적분으로 바꾼 후 적분을 행하면 3차 이상의 고차항을 제외한 경우 적분의 이론치를 구할 수 있다. S_c^l 이 균열선단을 포함하지 않는 균열요소인 경우 3차이상의 고차항은 없으므로 적분은 정확한 이론치가 되고, 균열선단을 포함한 경우 고차항이 있으므로 이들 고차항은 Gaussian 형의 수치적분 공식을 사용하여 적분한다.

2.4 대수방정식 구성

식 (7)은 일반적인 혼합모드 하중에 대한 지배방정식이지만, 본 논문에서는 모드 I의 하중에 대해서만 고려한다. 이 경우 D_1 과 D_2 는 0이 되므로 D_3 만을 고려하면 된다. 즉 문제는 collocation point에서 주어진 균열면의 표면력을 만족하는 균열면 절점에서의 D_3 를 구하는 것이 된다. 여기에서 표면력 경계조건은 최소오차자승의 관점에서 만족된다.

모드 I의 경우에 오차는 다음과 같다:

$$\begin{aligned} \text{Error} = & \sum_{i=1}^m [t(\mathbf{x}_i) \\ & - \int_{S_c} G_{33}(\mathbf{x}_i, \xi) D_3(\xi) d\xi_1 d\xi_2]^2. \end{aligned} \quad (13)$$

여기에서 m 은 collocation point의 수이고, \mathbf{x}_i 는 i 번째 collocation point의 위치이다. collocation point로서 각각의 요소에 2×2 Gauss적분점을 취한다. 그러므로 m 은 균열면 적분요소수의 4배이고, 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\begin{aligned} & \int_{S_c} G_{33}(\mathbf{x}_i, \xi) D_3(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \\ & = \sum_{k=1}^4 \int_{S_c^k} G_{33}(\mathbf{x}_i, \xi) D_3(\xi) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (14)$$

각각의 균열면 요소에서,

$$D_3(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi_1, \xi_2) D_{3j}^0. \quad (15)$$

여기에서, D_{3j}^0 는 각 요소의 j 번째 절점의 D_3 값

이다. 임의의 요소 S_c^k 에 대한 적분 I_i^e 를 다음과 같이 놓는다.

$$\begin{aligned}
 I_i^e &= \int_{S_c^k} G_{33}(\mathbf{x}_i, \xi) D_3(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \\
 &= \sum_{j=1}^4 \int_{S_c^k} G_{33}(\mathbf{x}_i, \xi) N_j(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 D_{3j}^0.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

($i=1, 2, \dots, m$)

행렬식을 이용하면 식 (16)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{I}^e = \mathbf{G}^e \mathbf{D}^e.
 \tag{17}$$

여기서, \mathbf{G}^e 는 $m \times 4$ 행렬이고, \mathbf{D}^e 는 $\{D_{31}^0, D_{32}^0, D_{33}^0, D_{34}^0\}^T$ 이다. 각 균열요소에 대한 \mathbf{I}^e 및 \mathbf{G}^e 를 구한 후 이를 전체 collocation point 및 전체 절점에 대해서 정리하면,

$$\mathbf{I} = \mathbf{G} \mathbf{D}
 \tag{18}$$

이 된다. 여기에서 \mathbf{G} 는 $m \times n$ 행렬, \mathbf{D} 는 요소 n 의 벡터이고, \mathbf{I} 는 요소 m 의 벡터이다. 벡터 \mathbf{I} 의 각각의 요소는 collocation point에서 계산된 표면력 값이다.

오차를 최소화하기 위한 조건으로,

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{D} = \mathbf{G}^T \mathbf{t}.
 \tag{19}$$

이 된다. 여기에서 \mathbf{t} 는 주어진 표면력 벡터이다. 이 선형방정식의 해를 구하므로써 균열면 절점에서의 D_3^0 를 구할 수 있다.

2.5 응력강도계수

각 균열 절점에서의 D_3^0 값을 구하면 이들 값으로부터 응력강도계수를 계산한다.

Fig. 3에서와 같이 요소의 한 변이 균열선단이 되는 임의의 균열요소를 고려하자. 편의상 $\xi = -1$ 에 해당되는 변이 균열선단이라고

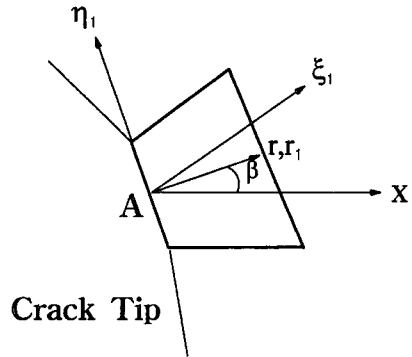


Fig. 3 Coordinate axes in a crack surface integration element

한다. 그리고 $\xi = -1$ 에 해당하는 변 위의 일점을 A점이라 하면, A점의 국부좌표는 $\xi = -1, \eta = \eta_A$ 로 표현할 수 있다. 또한 $\xi = -1$ 의 변에서 요소 내부 쪽으로 수직인 좌표축을 r 축으로 취한다.

A점 근처에서의 dr 은,

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial r}{\partial \eta} d\eta.
 \tag{20}$$

여기서 β 를 r 축과 x 축이 이루는 각도라고 하면,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \cos \beta + \frac{\partial y}{\partial \xi} \sin \beta \equiv J_\xi, \\
 \frac{\partial r}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial y}{\partial \eta} \sin \beta \equiv 0.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

또한,

$$dr = J_\xi d\xi \quad \text{or} \quad r_1 = J_\xi \xi_1.
 \tag{22}$$

여기서 $\xi = -1 + \xi_1$ 이고, $r = r_1$ 이다. ξ_1 과 r_1 은 A점 근처에서만 적용될 수 있는 좌표이고, 이때의 변위의 불연속 D_3 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D_3(\xi_1, \eta_A) = \frac{\sqrt{\xi_1}}{\sqrt{2}} \left[\frac{1-\eta_A}{2} D_{31}^o + \frac{1+\eta_A}{2} D_{34}^o \right], \tag{23}$$

$$D_3(\xi_1, \eta_A) = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{2}\sqrt{J_\xi}} \left[\frac{1-\eta_A}{2} D_{31}^o + \frac{1+\eta_A}{2} D_{34}^o \right]. \tag{24}$$

평면변형조건에서 2차원 균열의 변위 $2v$ 는,

$$2v = 8(1-\nu^2) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tag{25}$$

이고, 식 (24)와 식 (25)를 비교하면 응력강도계수는 다음 식과 같이된다:

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi E}}{8(1-\nu^2)\sqrt{J_\xi}} \left[\frac{1-\eta_A}{2} D_{31}^o + \frac{1+\eta_A}{2} D_{34}^o \right]. \tag{26}$$

3. 유한요소교호법

앞 절에서 구한 이론해를 유한요소 교호법에 적용한다. 유한요소 교호법에서는 다음과 같은 단계로 해석이 이루어 진다;

(1) 우선 주어진 문제에 대하여 균열이 포함되지 않은 FEM 모델을 만들고 주어진 외부하중을 가하여 균열이 존재하는 위치에서의 응력을 구한다.

(2) 다음으로 균열면에서의 표면력을 없애기 위하여 무한 물체에 균열이 존재하고 균열면에 단계 (1)에서 구해진 표면력의 역이 가해지는 문제를 해석한다.

(3) 단계 (1)과 (2)에서 구해진 응력장 또는 변위장을 더할 경우에 균열면에서의 경계조건은 만족되지만 균열면을 제외한 경계면에서의 경계조건은 만족되지 않으므로 경계면에서의 응력을 구하고 이로부터 경계면 상의 각 절점에서의 잔류하중을 계산한다.

(4) 다시 단계 (1)에서 고려하였던 FEM모델에 단계 (3)에서 구한 잔류하중의 역을 가하여 FEM 해석을 행한다. 그리고 균열이 존재하는 위치에서의 응력을 구한다.

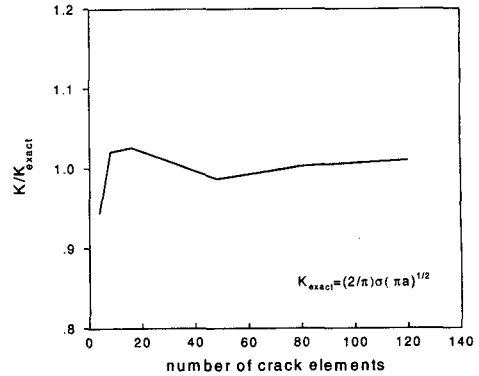


Fig. 4 Variation of normalized SIFs according to the number of crack elements

(5) 균열 위치에서의 응력의 크기가 아주 작은 경우는 반복계산을 중단하고 단계 (6)으로 간다. 그렇지 않으면 단계 (2)로 다시 간다.

(6) 각 단계에서의 응력강도계수, 변위, 응력 등을 더한 값이 해가 된다.

4. 해석결과 및 고찰

해석방법의 정확성과 효율성을 검토하기 위하여 몇 가지 문제를 해석하였다. 우선 무한 물체 내에 존재하는 삼차원 원형 내부균열(penny shaped crack)에 대하여 고려하였다.

무한 물체 내에 반지름 a 인 원형 내부균열이 존재할 때의 응력강도계수의 수치적인 해석해를 2장에 기술된 방법으로 구하여 정확한 이론해와 비교하였다.

Fig. 4는 사용된 균열요소 수의 증가에 따른 응력강도계수의 수치해의 변화를 나타낸 것이다. 이때 응력강도계수는 정확한 이론해에 대하여 정규화 시켰다. 이 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 아주 작은 수의 균열 요소를 사용하는 경우에도 만족할 만한 정확도의 해가 얻어짐을 알 수 있다. 그림에 도시되지는 않았지만 균열요소의 형태의 변화는 해의 정확성에 영향을 미침을 알 수 있었다. 따라서 균열요소의 형태가 해의 정확성에 미치는 영향에 대한 연구도 필요하다.

다음으로 표면균열의 해를 구하여 기존 해와 비교하였다. 두께가 h 인 판에 반타원형의 표면균열이 존재하고 있는 문제를 고려한다. 타원의 장

축의 길이는 $2a$ 단축의 길이는 $2b$ 라 한다. 이때 b 는 표면에서부터의 균열의 깊이와 같다.

해석을 위하여 사용된 균열요소는 Fig. 5와 같다. 해석 대상 균열의 형태는 반타원형이지만 FEAM의 해석해에서 고려하는 균열의 형태는 꼭 반타원일 필요는 없다. 오히려 반타원형의 균열을 사용할 경우 균열선단이 물체의 외부경계에 놓이게 되므로 균열선단에서의 높은 응력 값으로 인하여 외부경계에서의 잔류하중을 제거하는 반복계산에서 수렴을 나쁘게 한다. 본 해석에서는 Fig. 5에서와 같이 타원형 전체에 대한 해석해를 사용하였다. 이 균열요소 중 타원형의 반은 고려하는 물체의 내부에 놓이게 되고 나머지 반은 물체의 외부에 놓이게 된다. 물체의 외부에 놓이게 되는 균열면에서의 표면력은 항상 0으로 둔다.

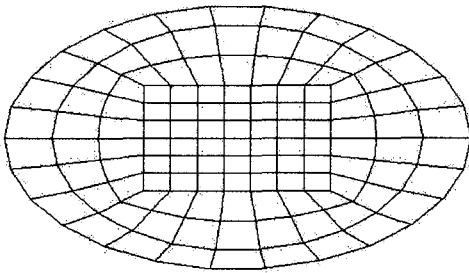


Fig. 5 Crack surface element mesh for a semi-elliptical surface crack

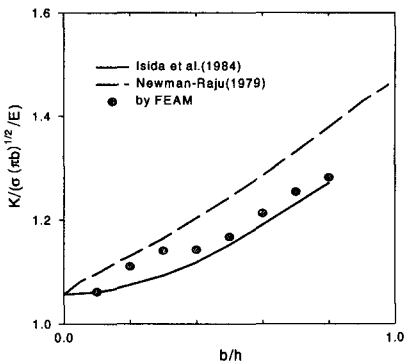


Fig. 6 FEAM results compared with Newman-Raju's and Isida et al.'s results^(12,13)

b/h 에 따른 정규화된 최대 응력강도계수의 변화를 도시하면 Fig. 6과와 같다. 비교를 위하여 Newman과 Raju의 결과⁽¹²⁾와 Isida 등의 결과⁽¹³⁾를 함께 도시하였다. FEAM으로 구한 결과는 두 결과들의 중간에 놓임을 알 수 있고 b/h 값이 커질수록 Isida 등의 결과와 가까워짐을 알 수 있다.

다음으로 직사각형의 표면균열에 대한 해석을 행하여 기존 해석과 비교하였다. 균열의 형태와 해석결과는 Fig. 7에 도시되어 있다. 기존의 해석보다 약간 작은 값이 얻어졌음을 알 수 있다.⁽¹⁴⁾

다음은 유한한 물체내부에 존재하는 반타원 균열에 대한 해석을 행하여 기존의 해석에 의한 결과와 비교하였다. Fig. 8에서 볼 수 있듯이 기존의 해석결과 보다 약간 큰 값을 보이고 있으며 균열의 형태가 b/d 의 값이 증가함에 따라 기존의 해석결과와의 차이가 줄어들음을 알 수 있다.⁽¹³⁾

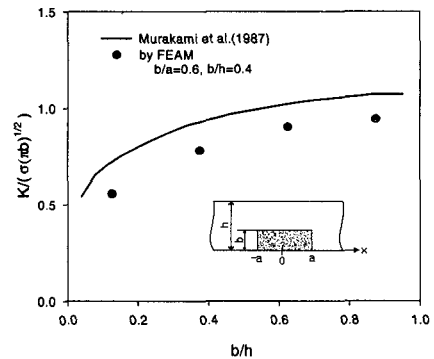


Fig. 7 Variation of normalized stress intensity factors according to b/h ⁽¹⁴⁾

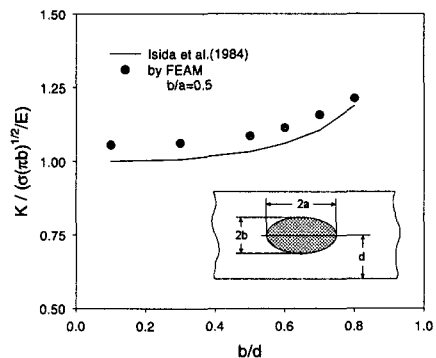


Fig. 8 The stress intensity factors of an elliptical crack according to b/d ⁽¹³⁾

4. 결 론

설비에서 나타나는 일반적인 형태의 3차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제안하였다. 제안된 방법의 유용성을 검토하기 위하여 몇 가지 문제를 해석하여 기존의 해석결과와 비교하였다. 이를 통하여 제안된 균열해석 방법은 설비내에 존재하는 균열을 해석할 수 있는 유용한 방법으로 사용될 수 있음을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 미국 FAA와 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Atluri, S. N., 1986, *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*, Amsterdam, North Holland.
- (2) Atluri, S. N., 1997, *Structural Integrity and Durability*, Tech Science Press, Forsyth.
- (3) 박재학, 김만원, Atluri, S. N., 1998, 등방성 유한판 내에 존재하는 곡선균열의 유한요소 교호법을 이용한 해석, 대한기계학회논문집(A), 제22권, 제12호, pp. 2296~2304.
- (4) Wiles T. D. and Curran J. H., 1982, "A general 3-D displacement discontinuity method," *Proceedings of the 4th international conference on numerical methods in geomechanics*, Vol. 1, ed. Balkema A. A., Rotterdam, The Netherlands, pp. 103~111.
- (5) Murakami Y. and Nemat-Nasser S., 1983, "Growth and stability of interacting surface flaws of arbitrary shape," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 17, pp. 193~210.
- (6) Murakami Y., 1985, "Analysis of stress Intensity Factors of Mode I, II and III for inclined surface cracks of arbitrary shape," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 22, pp. 101~114.
- (7) Keat W. D., Annigeri B. S. and Cleary M. P., 1988, "Surface integral and finite element hybrid method for two- and three-dimensional fracture mechanics analysis," *Int. J. Fracture*, Vol. 36, pp. 35~53.
- (8) Keat W. D., Erguven M. E. and Dwyer J. F., 1996, "Modeling of 3-D Mixed mode fractures near planar bimaterial interfaces using surface integrals," *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, Vol. 39, pp. 3679~3703.
- (9) Forth S. C. and Keat W. D., 1996, "Three-dimensional nonplanar fracture model using the surface integral method," *Int. J. Fracture*, Vol. 77, pp. 243~262.
- (10) Nishioka T. and Atluri S. N., 1983, "Analytical solution for embedded elliptical cracks, and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subject to arbitrary loading," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 17, pp. 247~268.
- (11) Vijayakumar K. and Atluri S. N., 1981, "An embedded elliptical flaw in an infinite solid, subject to arbitrary crack-face tractions," *J. Appl. Mech.*, Vol. 48, pp. 88~96.
- (12) Raju I. S. and Nemann Jr. J. C., 1979, "Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 11, pp. 817-829.
- (13) Isida M., Noguchi H. and T. Yoshida, 1984, "Tension and bending of finite thickness plates with a semi-elliptical surface crack," *Int. J. Fracture*, Vol. 26, pp. 157~188.
- (14) Murakami, Y., 1987, *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, pp. 863~867.