

# 반 무한체 위의 사각조각 표면에 작용하는 접선하중에 의한 반 무한체내의 응력 해석

조 용 주\* · 이 문 주\*\* · 구 영 필\*\*\*  
(1999년 7월 24일 접수)

## The Stress Field in the Body by Tangential Loading of a Rectangular Patch on a Semi-Infinite Solid

Yong-Joo Cho, Mun-Ju Lee and Young-Pil Koo

**key words:** Subsurface Stress Field(표면 아래 응력장), Tangential Loading(접선하중), Rectangular Patch(사각조각 표면), Semi-Infinite Solid(반 무한체)

### Abstract

The stress field in the body by tangential loading of a rectangular patch on a semi-infinite solid has been solved analytically using potential function. The validity of result of this study was proved by Saint-Venant's principle in the remote region and in the vicinity of the surface with superposition of point loads.

### 1. 서 론

상대운동을 하는 기계요소는 접촉하중에 의하여 접촉면에 마멸이 발생하고 이러한 마멸은 기계요소 파손의 주요한 요인으로 이에 대한 해석이 필요하다. 접촉에 의한 마멸의 정량적 해석을 위하여 접촉응력과 접촉면 아래의 응력분포를 알아야한다.

접촉문제를 해석할 때 기계 부품에서 일어나는 접촉의 형태를 원형 또는 타원 접촉으로 단순화할 수 있어 Hertz<sup>(1)</sup>의 해 - 두 탄성체의 접촉영역이 타원(Ellipse)이고 접촉면적이 탄성체의 다른 크기에 비하여 매우 작다고 가정하고 수직하중(Normal loading)만이 작용하는 경우의 접촉응력과 이에 의한 물체 내의 응력 - 가 널리 적용되어 왔다. 접촉영역이 타원이고 하중의 방향이 타원의 장축과 단축방향으로 제한된 접선하중(Tangential loading)과 수직하중이 연이어서 작용

하는 2차원 접촉문제는 Cattaneo<sup>(2)</sup>와 Mindlin<sup>(3)</sup>에 의하여 해석되어졌다. 김 등<sup>(4)</sup>은 2차원 접촉문제에 대해 종횡방향 사이클 전단하중 작용 시 라운딩 편치에 의한 접촉면 전단응력을 수치적으로 해석하였다.

겉보기 접촉과는 달리 거친 면의 실제 접촉은 불규칙한 형상의 돌기들에 의하여 이루어진다. 일반적인 접촉형상에 의한 반 무한체내의 응력 분포를 Boussinesq<sup>(5)</sup>와 Cerruti<sup>(6)</sup>가 포텐셜함수를 이용하여 이중적분 즉, 면 적분 형태로 표현하였으나 이중적분의 어려움으로 이들 식의 적용은 쉽지 않다. 불규칙한 돌기들의 접촉에 대한 대부분의 해석은 돌기 끝을 구로 근사하여 Hertzian해를 이용하여 이루어져왔다. 컴퓨터가 발달됨에 따라 최근에는 불규칙한 형상의 접촉면을 사각조각 표면으로 이산화하여 수치적인 방법으로 해석이 이루어지고 있다. 수직하중에 의한 접촉응력 해석은 Love<sup>(7)</sup>의 사각조각 표면(Rectangular patch)에 작용하는 균일한 수직분포하중에 의한 반 무한체 내의 응력의 해가 많이 이용되어진다. 그러나 사각조각 표면(Rectangular patch)에 작용하는 접선하중에 대해서는 아직 완전해가 알려져 있지

\* 회원, 부산대학교 공과대학 기계공학부  
E-mail : yjucho@pusan.ac.kr  
TEL : (051)510-2307 FAX : (051)512-9835

\*\* 부산대학교 대학원 정밀기계공학과

\*\*\* 부산대학교 대학원 기계공학과

않다. 이에 대한 시도 중의 일부로 Ahmadi 등<sup>(8)</sup>은 균일한 접선하중이 사각조각 표면에 작용할 때 접선방향 점 하중에 대한 Cerruti의 해를 사각조각 표면에 대해 적분하여 그 결과를 52개의 식들로 표현하였다. Kalker<sup>(9)</sup>는 같은 문제에 대해 점근적인 확장(Asymptotic expansion)의 기법에 의해 수치적으로 반 무한체 내의 응력을 해석하였다. 그러나, Ahmadi 등의 해는 하중 위치에서 가까운 영역에서는 응력값이 발산하는 문제점이 있다. 이러한, 문제점을 해결하기 위해 Bhushan 등<sup>(10)</sup>은 Ahmadi 등의 결과를 수정한 응력식들을 제시하였으나 그들의 해도 표면에서 제법 떨어진 곳에서는 잘 맞지 않는 문제가 있다.

본 연구에서는 Ahmadi 등의 방법과는 달리 포텐셜함수를 이용하여 반 무한체 위의 사각조각 표면에 균일한 접선하중이 작용할 때 반 무한체 내에서 생기는 응력장을 구하고자 한다.

## 2. 이론

Fig. 1의 등방성이고 균질인 반 무한체 표면의 임의의 영역  $S$ 위에 접선하중  $q_x(\xi, \eta)$ 가 작용할 때 반 무한체 내에서 생기는 응력을 다음과 같은 포텐셜함수를 도입하여 표현할 수 있다.

$$F_1 = \int_s \int q_x(\xi, \eta) \{z \ln(\rho + z) - \rho\} d\xi d\eta \quad (1)$$

여기서,  $\xi, \eta$ 는 하중이 작용하는 영역  $S$ 위의 임의의 점의  $x, y$ 축 방향으로의 좌표이다. 그리고  $\rho$ 는 반 무한체내의 점  $A(x, y, z)$ 와 영역  $S$ 위의 점  $B(\xi, \eta, 0)$ 와의 거리이다. 식 (1)을  $z$ 에 대해 미분하면

$$F = \frac{\partial F_1}{\partial z} = \int_s \int q_x(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (2)$$

이 된다. Love는 식 (1), (2)의 포텐셜함수를 이용하여 점  $A(x, y, z)$ 에서의 변위  $u_x, u_y, u_z$ 를 다음과 같이 표현하였다.

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial F}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right\}$$

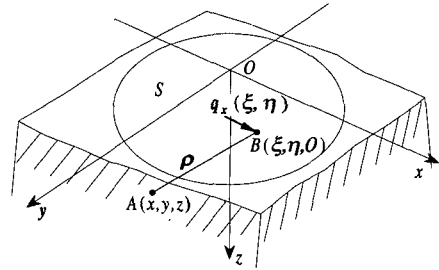


Fig. 1 The elastic half space subject to a distributed tangential loading of an area  $S$

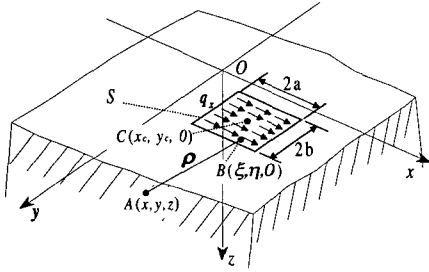
$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2\nu \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right\} \\ u_z &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial x} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $G$ 는 전단계수(Shear modulus)이다. 포텐셜함수  $F_1$ 과  $F$ 는 모든 계(Order)에서 미분 가능하고 연속이므로 식 (3)으로 나타낸 변위는 기하학적 적합조건(Compatibility condition)을 만족하게 된다. 응력·변형을 관계로부터 점  $A(x, y, z)$ 의 응력 성분들은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu+1}{\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{\nu}{\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} - z \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right\} \\ \sigma_z &= \frac{-z}{2\pi} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial z^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} + 2\nu \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} - z \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \right\} \\ \tau_{yz} &= \frac{-z}{2\pi} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} \\ \tau_{zx} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $\nu$ 는 프와송 비(Poisson's ratio)이다. 식 (4)의 응력들은 다음의 평형방정식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$



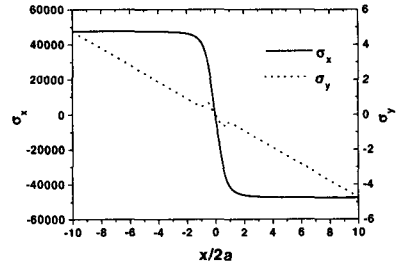
**Fig. 2** The elastic half space subject to a uniform tangential loading of a rectangular patch(a, b=half length of a rectangular patch in the x, y direction,  $q_x$ =a uniform shear stress)

식 (4)의 응력들을 식 (5)에 대입하면 식 (5)는  $\nabla^2 F_1$ 과  $\nabla^2 F$ 으로 나타내어진다. 여기서,  $\nabla^2$ 은  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ 이다. 포텐셜함수  $F_1$ 과  $F$ 는 조화함수로서 라플라스 방정식(Laplace's equation)을 만족하므로 식 (4)의 응력은 자동적으로 식 (5)의 평형방정식을 만족하게 된다.

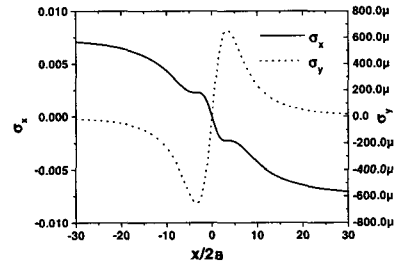
한편, 식 (5)의 응력들은 반 무한체 표면 위의 영역 S에서만 접선하중이 작용하고 그 외의 표면에서는 응력이 0이고 변위의 모든 성분들은 영역 S로부터 무한대의 거리( $\rho \rightarrow \infty$ )에서는 0이 되어야 한다는 경계조건을 식 (1)과 식 (2)의 포텐셜함수의 성질에 의해 만족함을 알 수 있다.

### 3. 결과 및 고찰

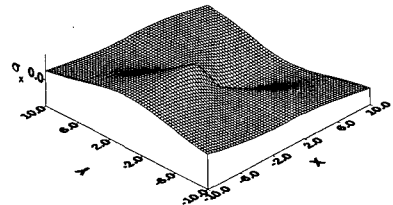
일반적으로 Fig. 1과 같은 임의의 형상의 접촉면에 의한 접촉문제는 Fig. 2와 같은 균일한 분포 하중이 작용하는 사각조각 표면으로 이산화하여 수치적으로 해석할 수 있다. 본 연구에서는 크기가  $2a \times 2b$ 이고 면의 중심이  $C(x_c, y_c, 0)$ 인 하나의 사각조각 표면에 x방향으로 하중의 세기가  $q_x$ 로 균일하게 작용할 때 반 무한체내의 임의의 점  $A(x, y, z)$ 에서의 응력분포를 구하고 유도된 결과들의 정확성과 아울러 기존의 해석 결과들의 문제점을 검토하였다. 본 연구에서 유도한 결과 식들은 부록에 제시하였고 본문에 제시된 그림들은  $C(x_c, y_c, 0)$ 를 원점으로 하여 나타내었다. Ahmadi



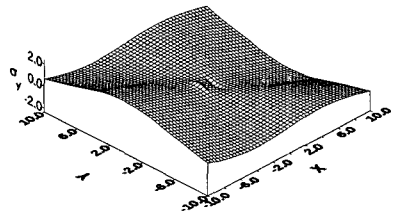
(a)  $\sigma_x, \sigma_y$  at  $y=0, z/2a=0.002$



(b)  $\sigma_x, \sigma_y$  at  $y=0, z/2a=5 (\mu = 10^{-6})$



(c) 3-D view of  $\sigma_x$  at  $z/2a=0.002$



(d) 3-D view of  $\sigma_y$  at  $z/2a=0.002$

**Fig. 3** Stress distribution in Ahmadi et al's Result ( $\nu=0.3, q_x=1.0, a$ =half length of a rectangular patch,  $a=b$ )

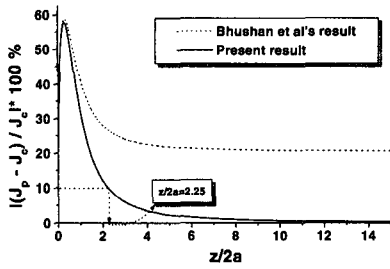


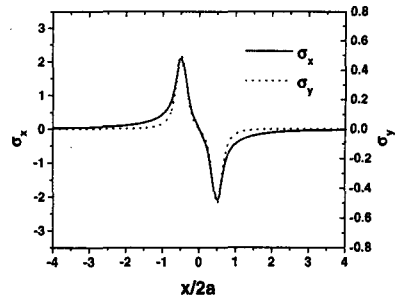
Fig. 4 Difference of Mises stresses between patch solution( $J_p$ ) and Cerruti's solution( $J_c$ ) along vertical line  $x/2a=0.25$ ,  $y/2b=0.25$  ( $a$ =half length of a rectangular patch,  $a=b$ )

등은 미소 면에 작용하는 분포하중을 집중하중으로 취급하여 점선방향 집중하중에 의한 반 무한체내의 응력분포를 나타낸 Cerruti해  $t_{ki}$ 를 사각조각 표면에 대하여 아래의 식 (6)과 같이 적분하여 균일 점선분포하중에 의한 반 무한체내의 응력  $\tau_{ki}$ 를 나타내었다.

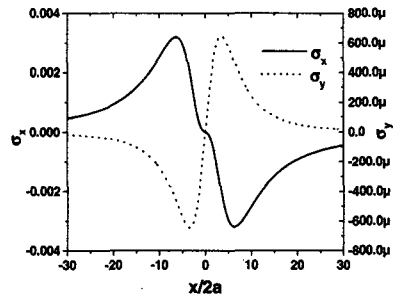
$$\tau_{ki}(x_i, y_i, z) = \int_{\bar{y}-b}^{\bar{y}+b} \int_{\bar{x}-a}^{\bar{x}+a} t_{ki}(x, y, z) dx dy \quad (6)$$

여기서,  $\bar{x} = x_i - x_j$ ,  $\bar{y} = y_i - y_j$ 이고, 아래첨자  $i, j$ 는 각각 반 무한체내의 임의의 점과 사각조각 표면의 중심을 가리킨다. Fig. 3은 Ahmadi 등의 해 즉, 식 (6)으로부터 유도된  $\sigma_x, \sigma_y$ 의 응력분포를  $x$ 축을 따라서 표면 가까운 곳과 표면으로부터 제법 떨어진 곳에서 나타낸 것이다.  $|x/2a| \rightarrow \infty$ 에서는 모든 응력이 0에 수렴해야 하지만 표면 가까이에서(Fig. 3(a))  $\sigma_x, \sigma_y$ 는 모두 수렴하지 않고, 표면으로부터 제법 떨어진 곳에서는(Fig. 3(b))  $\sigma_x$ 가 하중위치로부터의 거리에 관계없이 유한한 값을 가진다.

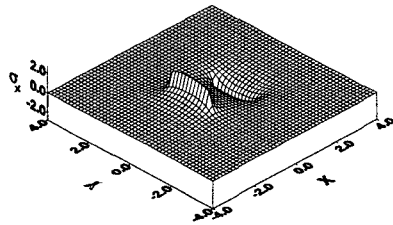
Bhushan 등은 Ahmadi 등의 해의 이런 문제점을 해결하기 위해서 Ahmadi 등의 해를 수정한 응력식을 제시하였다. Fig. 4는 Bhushan 등이 제시한 식에 의한 반 무한체 내의 Von Mises 응력  $J_p$ 와 분포하중의 합력과 크기가 같은 집중하중이 사각조각 표면의 중심에 작용할 때의 반 무한체 내에서의 Von Mises 등가 응력  $J_c$ 와의 차이를  $x/2a=0.25$ ,  $y/2b=0.25$ 에서 깊이에 따라 즉,  $z/2a$ 의



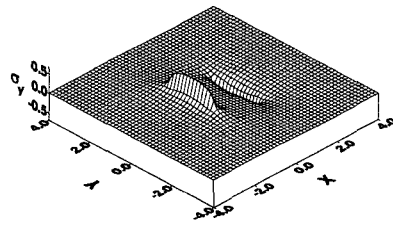
(a)  $\sigma_x, \sigma_y$  at  $y=0, z/2a=0.002$



(b)  $\sigma_x, \sigma_y$  at  $y=0, z/2a=5$  ( $\mu = 10^{-6}$ )



(c) 3-D view of  $\sigma_x$  at  $z/2a=0.002$



(d) 3-D view of  $\sigma_y$  at  $z/2a=0.002$

Fig. 5 Stress distribution in the present result ( $\nu = 0.3, q_x=1.0, a$ =half length of a rectangular patch,  $a=b$ )

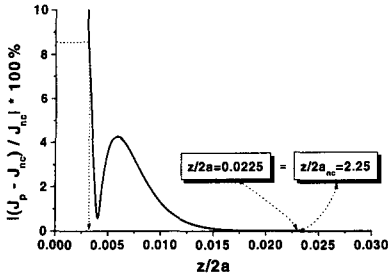


Fig. 6 Difference of Mises stresses between present solution( $J_p$ ) and superposed Cerruti's solution ( $J_{nc}$ ) along vertical line  $x/2a=0.25$ ,  $y/2b=0.25$  ( $a$ =half length of the rectangular patch,  $a_{nc}$ =half length of a finite union of a rectangular patch,  $a=b$ )

변화에 따라 나타낸 것이다. Saint-Venant의 원리에 의하여 사각조각 표면에 작용하는 접선 분포 하중에 의한 응력분포와 접선방향 집중하중에 의한 응력분포 즉, Cerruti해와의 차이는 하중의 크기가 같다면 하중위치로부터 멀어짐에 따라 0에 수렴해야한다. Bhushan 등의 해는 하중작용위치 부근에서는 본 논문의 결과와 거의 일치하지만, 하중위치에서 멀어질 때 Cerruti의 해와의 차이가 0에 수렴해야 함에도 불구하고 여전히 20% 정도의 오차를 보인다. 그러나, 본 연구 결과는 약  $z/2a > 2.25$ 에서 Cerruti해와의 차이가 10%이하로 작아져  $z/2a \rightarrow \infty$ 에서 0으로 수렴하여 Saint-venant의 원리에 잘 부합됨을 볼 수 있다.

Fig. 5는 본 연구결과의  $\sigma_x, \sigma_y$ 를 나타낸 것이다. Figs. 5(a), (b)에서는  $|x/2a|$ 가 커짐에 따라  $\sigma_x, \sigma_y$ 의 값이  $z/2a$ 의 크기에 관계없이 0에 수렴함을 알 수 있다. Figs. 5(c), (d)는  $z/2a=0.002$ 인  $xy$  평면에서의  $\sigma_x, \sigma_y$ 를 3차원적으로 나타낸 것으로  $|x|, |y|$ 가 커짐에 따라  $\sigma_x, \sigma_y$ 의 값이 0에 수렴함을 알 수 있다.

하중위치에 가까운 영역에서 본 연구결과의 정확성을 입증하기 위해서 Cerruti해의 중첩에 의한 결과와의 차이를 비교, 검토하였다. Johnson<sup>(11)</sup>은 분포하중에 의한 반 무한체내의 임의의 점에서의 응력을 Cerruti해의 중첩을 통해서 다음과 같이 근사적으로 구할 수 있다고 하였다. 하중이 작용

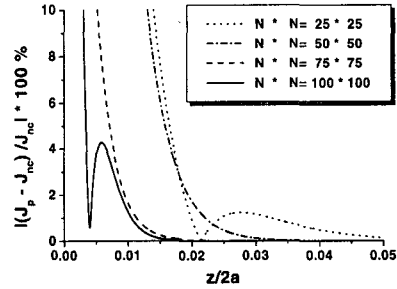


Fig. 7 Difference between  $J_p$  and  $J_{nc}$  for the various number of infinitesimal rectangular patches at  $x/2a=0.25$ ,  $y/2b=0.25(a=b)$

하는 반 무한체 위의 사각조각 표면을  $N \times N$ 의 미소 사각요소로 나누어, 각 미소 요소의 균일한 접선하중을 그 요소의 중심에 작용하는 미소 집중하중으로 등가시킨다. 각 미소 사각요소들이 반 무한체내의 임의의 점에 미치는 영향을 중첩함으로써 반 무한체내의 임의의 점에서의 응력을 근사적으로 구할 수 있다. 미소요소의 크기가 작을수록 정확해에 수렴한다. 이 때, 요소의 면적은  $4ab$ 를 사각요소의 수( $N \times N$ )로 나눈 면적이고, 미소 집중하중의 크기는 미소요소의 하중의 세기와 면적의 곱이다. Fig. 6은 표면 위의 사각조각 표면을  $100 \times 100$ 으로 나누어 각 미소 사각요소의 접선하중을 집중하중으로 등가 시켜서 구한 중첩해와 단일 사각조각 표면에서의 균일한 접선하중에 의한 해를 비교한 것이다. 반 무한체 표면 위의 단일 사각조각 표면의  $x$ 방향 한 변의 길이  $2a$ 는 2.0이다. 사각조각 표면을  $100 \times 100$ 의 미소요소로 이산화하였으므로 미소 사각조각 표면의  $x$ 방향 변의 길이  $2a_{nc}$ 는 0.02이다. 본 연구결과와 Cerruti해의 중첩 결과와의 차이는  $z/2a > 0.0225$ 에서 거의 0에 수렴함을 볼 수 있다.  $z/2a=0.0225$ 는  $z/2a_{nc}=2.25$ 로 Fig. 4에서  $z/2a > 2.25$ 인 영역에서 단일 Cerruti해와 본 연구결과의 차이는 10%의 오차 이내였다. 이는 본 연구결과가  $z/2a > 0.0225$ 에서 적어도 오차 10% 이내로 정확함을 의미한다. Fig. 7은 미소 사각요소의 수를 변화시키면서 본 논문결과와 Cerruti해의 중첩결과를 비교한 것이다. 미소 요소의 수가 많아질수록 즉,  $z/2a_{nc}$ 를 작게 할수록 두 해의 차이는 줄어들음을 볼 수 있는데 이 사실은 접촉면 가까운 곳에서 본 연구결과의 정확성을 다시 한번 입증하는 것이다.

이상의 결과로부터, 본 연구에서 유도한 결과는 반 무한체내의 거의 모든 영역에서 잘 맞는 완전해(Exact solution)로 사료된다

### 3. 결론

본 논문에서는 반 무한체 위의 사각조각 표면에 작용하는 균일한 점선하중에 의한 반 무한체내의 응력장에 대하여 연구하였다. Cerruti의 포텐셜함수를 이용하여 닫힌 형태로 응력장에 대한 정확한 해를 처음으로 유도하였다. 하중 위치에서 먼 영역에서는 점 하중에 대한 Cerruti해와의 차이가 0에 수렴하여 Saint-Venant의 원리에 잘 부합하였고, 하중위치에 가까운 영역에서는 Cerruti해를 중첩한 결과와의 차이가 미미하여 본 논문의 결과가 정확함을 확인할 수 있었다.

### 참고문헌

- (1) Hertz. H., 1896, Miscellaneous Papers on the Contact of Elastic Solids, Translation by D.E.Johns, McMillan, London.
- (2) Cattaneo. C., 1938, "Sul Contatto di due Corpi Elastici; Distribuzione Locale degli Storzi," *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, Series b, Vol. 27, pp. 342~348, 434~436, and 474~478.
- (3) Mindlin. R. D., 1949, "Compliance of Elastic

Bodies in Contact," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 15, pp. 259~268.

- (4) 김형규, 1999, "중·횡 방향 사이클 전단하중 작용 시 라운딩 편치에 의한 접촉응력," 대한기계학회논문집 A권, 제23권, 제5호, pp.801~813.
- (5) Boussinesq, 1885, *J. Application de Potentials a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques*. Paris:Gauthier-Villars. Vol. 45, p. 108.
- (6) Cerruti, 1882, V., *Acc. Lincei. Mem. fis. mat., Roma*. Vol. 13, p. 81.
- (7) Love. A. E. H., 1929, "Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary," *Phil. Trans. Royal Society*, A228, pp. 377~420.
- (8) Ahmadi. N., Keer. L. M., Mura. T and Vithoontien. V, 1987, "The Interior Stress Field Caused by Tangential Loading of a Rectangular Patch on an Elastic Half Space," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 627~629.
- (9) Kalker. J. J., 1986, "Numerical Calculation of the Elastic Field in a Half-Space," *Communications in Applied Numerical Method*, Vol. 200, pp. 401~410.
- (10) Maria M. -H. Yu, Bhushan. Bhart., 1996, "Contact Analysis of Three Dimensional Rough Surfaces under Frictionless and frictional Contact," *wear*, Vol. 200, pp. 265~280.
- (11) Johnson. K. L., 1985, *Contact Mechanics*, Chap. 3, pp. 45~83.

### 부 록

아래의 식들은 본문 식 (4)의 응력식들 중에서 편 미분 항들을 나타낸 것임.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} &= q_x \{ -\log(\rho_4 + y_2) + \log(\rho_3 + y_1) + \log(\rho_2 + y_2) - \log(\rho_1 + y_1) \} \\ \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} &= q_x \left\{ z \left( \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_1}{x_2^2 + y_1^2} - \frac{zy_2(\rho_4^2 + x_2^2)}{\rho_4(y_2^2 z^2 + x_2^2 \rho_4^2)} + \frac{zy_1(\rho_3^2 + x_2^2)}{\rho_3(y_1^2 z^2 + x_2^2 \rho_3^2)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_2}{x_1^2 + y_2^2} + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{zy_2(\rho_2^2 + x_1^2)}{\rho_2(y_2^2 z^2 + x_1^2 \rho_2^2)} - \frac{zy_1(\rho_1^2 + x_1^2)}{\rho_1(y_1^2 z^2 + x_1^2 \rho_1^2)} \right) + \\ &\quad \left. \log \frac{(\rho_4 + y_2)(\rho_1 + y_1)}{(\rho_2 + y_2)(\rho_3 + y_1)} + x_2^2 \left( \frac{1}{\rho_4(\rho_4 + y_2)} - \frac{1}{\rho_3(\rho_3 + y_1)} \right) - x_1^2 \left( \frac{1}{\rho_2(\rho_2 + y_2)} - \frac{1}{\rho_1(\rho_1 + y_1)} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} &= a_x \left\{ \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_1}{x_2^2 + y_1^2} - \frac{zy_2(\rho_4^2 + x_2^2)}{\rho_4(y_2^2 z^2 + x_2^2 \rho_4^2)} + \frac{zy_1(\rho_3^2 + x_2^2)}{\rho_3(y_1^2 z^2 + x_2^2 \rho_3^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_2}{x_1^2 + y_2^2} + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{zy_2(\rho_2^2 + x_1^2)}{\rho_2(y_2^2 z^2 + x_1^2 \rho_2^2)} - \frac{zy_1(\rho_1^2 + x_1^2)}{\rho_1(y_1^2 z^2 + x_1^2 \rho_1^2)} \right\} \\ \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} &= a_x \left\{ \frac{y_2}{\rho_4 + z} - \frac{y_1}{\rho_3 + z} - \frac{y_2}{\rho_2 + z} + \frac{y_1}{\rho_1 + z} \right\} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} &= a_x \left\{ -\frac{y_2}{\rho_4(\rho_4 + z)} + \frac{y_1}{\rho_3(\rho_3 + z)} + \frac{y_2}{\rho_2(\rho_2 + z)} - \frac{y_1}{\rho_1(\rho_1 + z)} \right\} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial z^2} &= a_x \left\{ -\frac{z}{\rho_4(\rho_4 + y_2)} + \frac{z}{\rho_3(\rho_3 + y_1)} + \frac{z}{\rho_2(\rho_2 + y_2)} - \frac{z}{\rho_1(\rho_1 + y_1)} \right\} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} &= a_x \{ -\log(\rho_4 + x_2) + \log(\rho_3 + x_2) + \log(\rho_2 + x_1) - \log(\rho_1 + x_1) \} \\ \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} &= a_x \left\{ \frac{x_2}{\rho_4 + z} - \frac{x_2}{\rho_3 + z} - \frac{x_1}{\rho_2 + z} + \frac{x_1}{\rho_1 + z} \right\} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} &= a_x \left\{ -\frac{x_2}{\rho_4(\rho_4 + z)} + \frac{x_2}{\rho_3(\rho_3 + z)} + \frac{x_1}{\rho_2(\rho_2 + z)} - \frac{x_1}{\rho_1(\rho_1 + z)} \right\} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} &= a_x \left\{ \frac{1}{\rho_4} - \frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right\} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} &= a_x \left\{ \frac{x_2}{\rho_4(\rho_4 + y_2)} - \frac{x_2}{\rho_3(\rho_3 + y_1)} - \frac{x_1}{\rho_2(\rho_2 + y_2)} + \frac{x_1}{\rho_1(\rho_1 + y_1)} \right\} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= a_x \left\{ -\tan^{-1} \frac{x_2 y_2}{z \rho_4} + \tan^{-1} \frac{x_2 y_1}{z \rho_3} + \tan^{-1} \frac{x_1 y_2}{z \rho_2} - \tan^{-1} \frac{x_1 y_1}{z \rho_1} \right\} \end{aligned}$$

여기서,  $x_1 = x_c - a - x$ ,  $x_2 = x_c + a - x$ ,  $y_1 = y_c - b - y$ ,  $y_2 = y_c + b - y$

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z^2},$$

$$\rho_3 = \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z^2}, \quad \rho_4 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z^2}$$