

# 접촉하는 강체간의 다물체 동역학 해석

박정훈\* · 유흥희\*\* · 황요하\*\*\*  
(1999년 4월 9일 접수)

## Multibody Dynamic Analysis for Contacting Rigid Bodies

Jung Hun Park, Hong Hee Yoo and Yoha Hwang

**Key Words:** Contact(접촉), Contact Force(접촉력), Friction Force(마찰력), Normal Force(수직반력), Reaction Force(반력), Partial Velocity Matrix(편속도 행렬)

### Abstract

This paper presents a new method for calculating contact position and contact force. The proposed method calculates accurate contact position by introducing intermediate parameters. Accurate contact force can be obtained by solving reduced equations of motion iteratively. This method can be applied to calculate not only contact force on contact points but also contact force on kinematic joints such as a rotational joint and a translational joint. Four numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

### 1. 서론

궤도차량의 바퀴와 궤도간 접촉과 같이 두 강체간 접촉력에 의해 구동력이 발생하는 계에서 접촉점의 위치와 수직반력과 같은 변수들은 시스템의 거동에 중요한 역할을 한다. 접촉점에서의 작용력을 계산하기 위해서는 접촉점의 위치에 대한 정확한 정보가 필요하고 크리프 작용력(creep force)이나<sup>(1)</sup> 마찰력(friction force)과 같은 접촉력은 수직반력(normal force)의 함수로 표현되므로 수직반력의 계산이 필요하다. 그런데 수직반력은 접촉을 하고 있는 강체들의 가속도와 연성되어 있기 때문에 가속도를 구하기 위한 운동방정식은 비선형 방정식이 된다. 따라서 계의 가속도를 구하기 위한 운동방정식을 선형방정식으로 푸는 일반적인 전산동역학 알고리즘들<sup>(2~4)</sup> 적용할 수 없게 된다. 접촉하는 두 강체간의 접촉점

을 찾기 위한 공간문제는 곡면과 곡면 또는 곡면과 곡선간의 접촉문제가 된다. 현재 대부분의 상업용 다물체 동역학 해석프로그램들은 곡선과 곡선 그리고 곡선과 점에 대한 구속조건만을 처리할 수 있고 곡면과 곡면 또는 곡면과 곡선간의 접촉은 처리할 수 없다. 접촉력을 구하기 위해 사용되는 기존의 해석방법에서는<sup>(5,6)</sup> 두 강체간의 간섭량을 탄성변위로 가정하여 선형 또는 비선형 스프링으로 모델링하고 이에 근거하여 수직반력과 접촉력을 계산하였다. 이러한 해석방법은 운동방정식을 반복적으로 풀어야하는 방법에 비해 계산시간은 적게 걸리지만 정확한 접촉점의 위치와 접촉력계산을 할 수 없다. 접촉력과 같이 운동방정식을 반복적으로 푸는 방법과 관련한 연구로 Haug 등은<sup>(7)</sup> 회전조인트나 병진조인트와 같은 특정의 기구학적 조인트에서 마찰력을 고려하기 위해 조인트에 작용하는 수직반력과 가속도를 반복적으로 구하였다. Haug 등에 의해 제안된 방법은 일반좌표분할법을 사용하고 있으며 풀어야하는 방정식중에서 크기가 가장 큰 운동방정식을 반복적으로 풀기 때문에 계산상 효율성이 떨어지는 단점을 지닌다.

본 연구에서는 곡선과 곡선뿐만 아니라 곡면과 곡선 그리고 곡면과 곡면간의 접촉까지 고려하여

\* 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

\*\*\* 한국과학기술연구원 트라이볼로지 연구센터

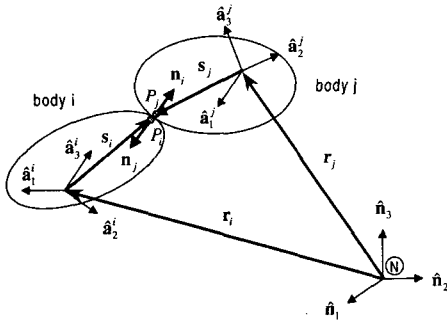


Fig. 1 Two bodies in contact with each other

접촉하는 두 강체상의 접촉점을 찾고 접촉점에서의 접촉력을 계산할 수 있는 해석방법을 개발하는 것을 연구목적으로 한다.

## 2. 본 론

Fig. 1은 한 점에서 접촉하는 두 강체를 보여준다.  $\hat{n}_k$ ,  $\hat{a}_{k_i}^i$ ,  $\hat{a}_{k_j}^j$  ( $k=1,2,3$ )은 각각 절대좌표와 강체  $i$ ,  $j$ 에 고정된 좌표계의 직교 단위 벡터들을 나타낸다.  $r_i$ ,  $r_j$ 는 각각 절대좌표계에서 본 강체  $i$ ,  $j$ 의 질량중심의 위치벡터를  $s_i$ ,  $s_j$ 는 각각 강체  $i$ 의 질량중심으로부터 강체  $i$ 상의 접촉점  $P_i$ 까지의 위치벡터와 강체  $j$ 의 질량중심으로부터 강체  $j$ 상의 접촉점  $P_j$ 까지의 위치벡터를 나타낸다.  $n_i$ 는 강체  $i$ 상의 접촉점에서의 접평면에 수직한 벡터를 나타내고  $n_j$ 는 강체  $j$ 상의 접촉점에서의 접평면에 수직한 벡터를 나타낸다.

공간상에서 두 강체가 접촉하기 위해서는 다음과 같은 세 개의 구속조건을<sup>(8)</sup> 만족해야 한다. 첫째, 두 강체상의 접촉점의 좌표는 일치해야 한다. 둘째, 각 강체상의 접촉점에서의 접평면에 수직한 벡터들은 서로 평행해야 한다. 셋째, 접촉점 이외의 두 강체상의 다른 부분에서 간섭이 발생해서는 안된다. 본 해석에서는 세 번째 구속은 항상 만족한다는 가정하에서 연구를 수행하였다.

### 2.1 위치 해석

두 강체  $i$ 와  $j$ 가 한 점에서 접촉하는 경우 접촉점을 찾기 위해 사용된 일반좌표  $q$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$q = [ r_i^T \ \theta_i^T \ s_i'^T \ r_j^T \ \theta_j^T \ s_j'^T ]^T \quad (1)$$

여기서

$$s'_k = [ s'_{kx} \ s'_{ky} \ s'_{kz} ]^T \quad (2)$$

식 (1)에서  $\theta_i$ 와  $\theta_j$ 는 각각 강체  $i$ 와  $j$ 에 고정된 좌표계의 자세를 나타내기 위한 회전좌표를 의미하고  $s'_i$ 와  $s'_j$ 는 각각 강체  $i$ 와  $j$ 에 고정된 좌표계에 대한 벡터  $s_i$ 와  $s_j$ 의 계수 (measure number)를 의미한다.

두 강체의 접촉점은 강체의 표면을 이루는 곡면에 있어야 하므로 각 강체에 대해 다음과 같은 두 개의 구속방정식을 유도할 수 있다.

$$\phi^{c1} = [ f_i(s'_i) \ f_j(s'_j) ]^T = 0 \quad (3)$$

위 식에서  $f_i$ 와  $f_j$ 는 각각 강체  $i$ 와 강체  $j$ 의 표면을 이루는 곡면의 방정식을 나타낸다.

첫 번째 접촉 구속조건으로부터 다음과 같은 세 개의 구속방정식을 유도할 수 있다.

$$\phi^{c2} = r_j + A_j s'_j - r_i - A_i s'_i = 0 \quad (4)$$

여기서  $A_i$ 와  $A_j$ 는 각각 강체  $i$ 와 강체  $j$ 의 절대좌표계에 대한 자세행렬(orientation matrix)을 나타낸다.

각 강체상의 접촉점에서의 접평면에 수직한 벡터들은 평행해야 한다는 두 번째 조건으로부터 다음과 같은 세 개의 구속방정식을 구할 수 있다.

$$\phi^{c3} = \tilde{n}_i n_j = 0 \quad (5)$$

여기서  $\tilde{n}_i$ 는  $n_i$ 의 교대행렬(skew symmetric matrix)을 의미하고 위의 구속방정식은  $n_i$ 와  $n_j$ 의 크기와 무관하므로 세 개의 구속방정식중

두 개만이 독립적이다. 식 (3)~ 식 (5)에 정의된 구속방정식을 종합하여 쓰면 다음과 같다.

$$\Phi^c = \begin{Bmatrix} f_i(s_i) \\ f_j(s_j) \\ \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{s}_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i \\ \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \end{Bmatrix} \quad (6)$$

공간상에서 두 강체가 접촉하는 경우의 위치해석에는 식 (1)에 나타난 18개의 일반좌표가 사용되고 식 (6)에 나타난 8개의 구속방정식중 독립구속조건식의 수가 7개이므로 자유도는 11이 된다. 공간상에서 구속조건을 갖지 않는 두 강체의 자유도는 12임을 고려하면 두 강체간의 접촉은 1개의 자유도를 줄임을 알 수 있다. 두 강체 사이의 접촉점은 뉴턴-랩슨방법을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Phi_q^{c^k} \Delta q^k = - \Phi^{c^k} \quad (7)$$

위 식에서  $\Phi^{c^k}$ 와  $\Phi_q^{c^k}$ 는 각각 독립구속방정식과 일반좌표  $q$ 에 대한 독립구속방정식의 자코비안 행렬을 의미하고 상첨자  $k$ 는 반복회수를 의미한다.  $k+1$ 스텝에서  $q^{k+1}$ 는 다음과 같이 교정된다.

$$q^{k+1} = q^k + \Delta q^k \quad (8)$$

교정된 일반좌표  $q^{k+1}$ 가 주어진 허용 오차내에서 구속방정식을 만족할 때까지 식 (7)과 식 (8)을 반복하여 푼다.

### 2.2 속도 해석

식 (1)에서 정의한 일반좌표들의 속도를 구하기 위해 독립구속방정식  $\Phi^{c^k}$ 를 시간에 대해 미분하면 다음과 같은 속도 방정식을 구할 수 있다.

$$\Phi_q^{c^k} \dot{q} = 0 \quad (9)$$

속도 해석은 반복적으로 해를 구하는 위치해석과는 달리 선형방정식으로 표현된 식 (9)를 한번만

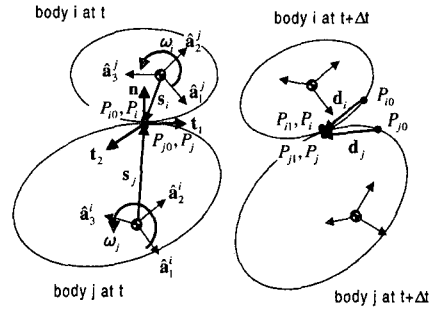


Fig. 2 Two bodies in contact with each other at time  $t$  and  $t + \Delta t$

풀어 속도  $\dot{q}$ 를 구할 수 있다.

Fig. 2는 임의의 시간  $t$ 와  $t + \Delta t$ 에서 두 강체  $i$ 와  $j$ 가 접촉하고 있는 상태를 나타낸다.  $\mathbf{n}$ 과  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ 는 시간  $t$ 에서 접촉점에서의 접평면에 수직인 벡터와 평행한 접선벡터들을 나타낸다. 점  $P_i, P_j$ 는 강체상을 따라 움직이는 강체  $i, j$ 상의 접촉점을 나타내고 점  $P_0, P_0$ 와 점  $P_{i1}, P_{i1}$ 는 각각 시간  $t$ 와  $t + \Delta t$ 에서 점  $P_i, P_j$ 와 일치하는 강체에 고정된 점을 나타낸다.  $\mathbf{d}_i$ 와  $\mathbf{d}_j$ 는 각각 점  $P_0$ 로부터 점  $P_{i1}$ 까지의 그리고 점  $P_0$ 로부터 점  $P_{j1}$ 까지의 위치벡터를 나타낸다. 시간  $t$ 에서 두 강체상을 움직이면서 접촉하는 두점  $P_i, P_j$ 의 위치는 일치하고 이 두 점들의 속도 또한 일치해야 한다. 따라서, 위

$$\mathbf{v}^{P_i} - \mathbf{v}^{P_j} = 0 \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{P_i} &= \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{s}}_i \omega_i + {}^i \mathbf{v}^{P_i} \\ &= \mathbf{v}^{P_0} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{d}_i}{\Delta t} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{v}^{P_0} = \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{s}}_i \omega_i \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{P_j} &= \dot{\mathbf{r}}_j - \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{s}}_j \omega_j + {}^j \mathbf{v}^{P_j} \\ &= \mathbf{v}^{P_0} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{d}_j}{\Delta t} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{v}^{P_0} = \dot{\mathbf{r}}_j - \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{s}}_j \omega_j \quad (14)$$

식에서  $\mathbf{v}^{P_i}$ ,  $\mathbf{v}^{P_j}$ 와  $\mathbf{v}^{P_0}$ ,  $\mathbf{v}^{P_0}$ 는 각각 점  $P_i$ ,  $P_j$ 의 속도와 두 강체상의 고정점  $P_0$ ,  $P_0$ 의 속도를 나타낸다.  ${}^i\mathbf{v}^{P_i}$ 와  ${}^j\mathbf{v}^{P_j}$ 는 각각 강체  $i$ 와 강체  $j$ 에서 본 점  $P_i$ 와  $P_j$ 의 속도를 나타낸다.  ${}^i\mathbf{v}^{P_i}$ 와  ${}^j\mathbf{v}^{P_j}$ 는  $\Delta t$ 가 미소할 경우 다음 식과 같이 접촉점에서의 접평면과 평행하다. 따라서,

$$\mathbf{n}^T \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d_i}{\Delta t} = \mathbf{n}^T \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d_j}{\Delta t} = 0 \quad (15)$$

식 (11)과 (13)을 식 (10)에 대입하고 양변에 접촉점에서의 접평면에 수직인 단위벡터  $\mathbf{n}$ 를 내적하면 다음과 같은 결과식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{v}^{P_j} - \mathbf{v}^{P_i}) = \mathbf{n}^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} = 0 \quad (16)$$

여기서

$$\mathbf{v}_0^{\ddot{j}} \equiv \mathbf{v}^{P_0} - \mathbf{v}^{P_0} \quad (17)$$

식 (16)으로부터 접촉하는 시간  $t$ 에서 접촉점과 일치하는 강체  $i$ 상에 고정된 점  $P_0$ 에 대한 강체  $j$ 상에 고정된 점  $P_0$ 의 상대속도의 접평면에 대한 수직성분이 0이 됨을 알 수 있다.

접촉하는 두 강체가 순수 구름(pure rolling)을 하는 경우 두 벡터  ${}^i\mathbf{v}^{P_i}$ 와  ${}^j\mathbf{v}^{P_j}$ 는 일치하므로 접선방향 상대운동을 제한하기 위한 두 개의 구속방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} = 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{t}_2^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} = 0 \quad (19)$$

두 강체가 순수구름을 하는 경우 식 (9), (18), 그리고 (19)를 같이 풀어 속도를 구할 수 있다.

### 2.3 가속도 해석

가속도해석에서는 반복적으로 풀어야 하는 운동방정식의 크기를 줄이기 위해 속도해석에 사용되는 속도와의 달리, 접촉점을 찾기 위해 사용된 매개변수  $s_i$ 와  $s_j$ 의 시간 미분값을 속도성분으

로 사용하지 않는다. 가속도해석에 사용되는 속도  $\mathbf{Y}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{Y} \equiv [ \dot{\mathbf{r}}_i^T \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \ \dot{\mathbf{r}}_j^T \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^T ]^T \quad (20)$$

식 (20)에서  $\boldsymbol{\omega}_i$ 와  $\boldsymbol{\omega}_j$ 는 각각 강체  $i$ 와  $j$ 에 고정된 좌표계에 대해 표현된 두 강체의 각속도를 나타낸다.

두 강체가 접촉하는 경우 가속도해석을 위한 구속방정식  $\dot{\boldsymbol{\Phi}}^a$ 는 식 (16)을 시간에 대해 미분하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Phi}}^a &= \dot{\mathbf{n}}^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} + \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{v}}_0^{\ddot{j}} \\ &= \boldsymbol{\Phi}_Y^a \dot{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\gamma}^a \\ &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$\boldsymbol{\Phi}^a \equiv \mathbf{n}^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} \quad (22)$$

식 (21)에서  $\boldsymbol{\Phi}_Y^a$ 는 속도  $\mathbf{Y}$ 에 대한  $\boldsymbol{\Phi}^a$ 의 자코비안 행렬을 의미하고  $\boldsymbol{\gamma}^a$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\boldsymbol{\gamma}^a \equiv \{ -\dot{\mathbf{n}}^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} - \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{x}}^{\ddot{j}} \} \quad (23)$$

여기서

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{\ddot{j}} &\equiv -\mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{s}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{s}_j \\ &\quad + \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{s}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{s}_i \end{aligned} \quad (24)$$

접촉하는 두 강체가 순수 구름(pure rolling)을 하는 경우 가속도 해석을 위한 구속방정식  $\dot{\boldsymbol{\Phi}}^a$ 은 식 (16), (18), 그리고 (19)를 시간에 대해 미분하면 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^a = \boldsymbol{\Phi}_Y^a \dot{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\gamma}^a = 0 \quad (25)$$

여기서

$$\boldsymbol{\Phi}^a \equiv [ \mathbf{n}^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} \ \mathbf{t}_1^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} \ \mathbf{t}_2^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} ]^T \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^a \equiv \begin{Bmatrix} -\dot{\mathbf{n}}^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} - \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{x}}^{\ddot{j}} \\ -\dot{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} - \mathbf{t}_1^T \dot{\mathbf{x}}^{\ddot{j}} \\ -\dot{\mathbf{t}}_2^T \mathbf{v}_0^{\ddot{j}} - \mathbf{t}_2^T \dot{\mathbf{x}}^{\ddot{j}} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

본 연구에서는 접촉력과 가속도를 구하기 위한 운동방정식의 크기를 줄이기 위해 참고문헌 (2)에서 제안한 해석방법을 사용하고 참고문헌에 나타난 구속 다물체계의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} B^T M \\ \Phi^a_Y \end{bmatrix} \dot{Y} = \begin{bmatrix} B^T Q(F_f) \\ \gamma^a \end{bmatrix} \quad (28)$$

위 식에서  $B$ ,  $M$ ,  $Q$  그리고  $F_f$ 는 각각 편속도행렬, 질량행렬, 일반력벡터 그리고 접촉력을 나타내고 편속도 행렬  $B$ 는<sup>(2)</sup> 다음과 같이 계산된다.

$$B = \begin{bmatrix} -\Phi^a_{Y_d}^{-1} \Phi^a_{Y_i} \\ I \end{bmatrix} \quad (29)$$

위 식에서  $\Phi^a_{Y_d}$ 와  $\Phi^a_{Y_i}$ 는 각각 독립 속도와 종속 속도에 대한 구속방정식  $\Phi^a$ 의 자코비안 행렬을 나타내고  $\Phi^a_{Y_i}$ 를 풀피벗팅(full pivoting)하여<sup>(2)(3)</sup> 속도  $Y$ 를 종속 속도  $Y_d$ 와 독립 속도  $Y_i$ 로 나눌 수 있다. 식 (28)에서 접촉력  $F_f$ 가 마찰력으로 사용될 경우 접촉점에 작용하는 마찰력은 다음과 같이 수직반력  $N$ 의 함수로 표현된다.

$$F_f = -\mu N \frac{\mathbf{v}_0^j}{|\mathbf{v}_0^j|}, \quad (\mathbf{v}_0^j \neq 0) \quad (30)$$

위 식에서  $\mu$ 는 운동마찰계수를 의미한다. 접촉점에서의 상대운동이 없는 순수구름이 발생할 경우 접촉점에 작용하는 정지 마찰력은 반력의 계산을 통해 구할 수 있고 정지 마찰력의 크기는 정지 마찰계수  $\mu_s$ 와 수직반력  $N$ 의 곱보다 작은 값을 지닌다. 식 (28)에서 풀어야 하는 방정식의 개수는 가속도  $\dot{Y}$ 의 개수와 일치하나 방정식의 개수만큼의  $\dot{Y}$  외에 미지의 수직반력  $N$ 이 존재하므로 식 (28)을 바로 풀 수 없다. 비선형 운동방정식 (28)을 풀기 위해 뉴턴-랩슨 방법이 사용될 수 있으나 뉴턴-랩슨 방법을 사용할 경우

필요한 일반작용력  $Q$ 의  $\dot{Y}$ 에 대한 자코비안 행렬  $\partial Q / \partial \dot{Y}$ 의 계산이 복잡하고 어렵다. 본 연구에서는 복잡한  $\partial Q / \partial \dot{Y}$ 의 계산을 피하기 위해 해의 수렴속도는 뉴턴-랩슨 방법에 비해 다소 느리지만  $\partial Q / \partial \dot{Y}$ 의 계산이 필요 없는 고정점 반복 알고리즘(fixed point iteration algorithm)을<sup>(7)</sup> 사용한다. 식 (28)을 풀기 위해 먼저 수직반력의 근사추정치를 대입하여 가속도를 구한 다음 구한 가속도로부터 수직반력을 다시 구해서 식 (28)에 대입하여 또 가속도를 구한다. 가속도의 편차가 허용오차 내에서 만족할 때까지 이런 과정을 되풀이한다. 접촉점에서의 수직반력을 구하기 위해 필요한 라그랑지승수  $\lambda^a$ 는 다음과 같은 구속된 다물체계의 운동방정식으로부터 쉽게 구할 수 있다.

$$M \dot{Y} + \Phi^a_Y{}^T \lambda^a = Q \quad (31)$$

식 (31)로부터  $\lambda^a$ 를 구하기 위한 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi^a_Y{}^T \lambda^a = \mathbf{b} \equiv Q - M \dot{Y} \quad (32)$$

식 (32)는 아래와 같이 분할된 식으로<sup>(9)</sup> 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Phi^a_{Y_d}{}^T \\ \Phi^a_{Y_i}{}^T \end{bmatrix} \lambda^a = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ \mathbf{b}_i \end{bmatrix} \quad (33)$$

위 식으로부터 라그랑지 승수를 구하기 위한 독립적인 선형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi^a_{Y_d}{}^T \lambda^a = \mathbf{b}_d \quad (34)$$

편속도행렬  $B$ 를 구하는 과정에서 종속 속도에 대한 구속방정식  $\Phi^a$ 의 자코비안행렬  $\Phi^a_{Y_d}$ 의 LU 분해를 수행하기 때문에 한 번의 후방치환(back substitution)을 수행하여 라그랑지 승수를 구할 수 있다.

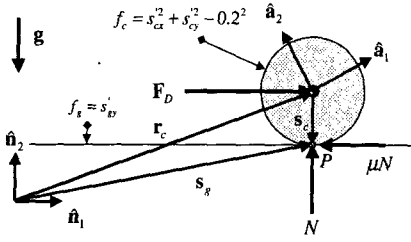


Fig. 3 A rolling disk in contact with a straight line

Table 1 Inertia properties and initial conditions for example 1

Inertia properties	
$m, J$	3,000[kg], 2,000[kg · m <sup>2</sup> ]
Initial conditions	
$r$	[0.000 0.200] <sup>T</sup> [m]
$\theta$	0.000 [rad]
$\dot{r}$	[10.000 0.000] <sup>T</sup> [m/sec]
$\dot{\theta}$	-60.000 [rad/sec]

3. 수치 해석

본 연구에서 제시한 해석방법의 효용성을 검증하기 위해 네 가지의 예제에 대한 과도해석을 수행하였고 주어진 예제의 과도해석을 위해 DE 적분기가<sup>(10)</sup> 사용되었다.

3.1 지면상의 직선과 접촉하는 원판

Fig. 3은 지면상의 직선과 한 점에서 접촉하면서 움직이는 원판을 보여준다. 그림에서  $\hat{n}_k$ ,  $\hat{a}_k$  ( $k=1,2$ )는 각각 지면과 강체에 고정된 직교단위벡터들을 나타내고  $r_c$ 는 원판의 질량중심까지의 위치벡터를 나타낸다. 점 P는 접촉점을 의미하고  $s_g$ 와  $s_c$ 는 각각 지면상에 고정된 좌표계의 원점으로부터 지면상의 접촉점까지의 위치벡터와 원판에 고정된 좌표계의 원점으로부터 원판상의 접촉점까지의 위치벡터를 의미한다.  $g$ 와  $F_D$ 는 중력가속도와 강체의 질량중심에 가해지는 외력을 의미하고 접촉점에는 마찰력이

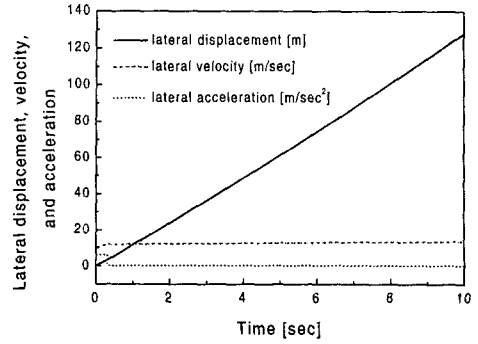


Fig. 4 Displacement, velocity, and acceleration of a disk in moving direction

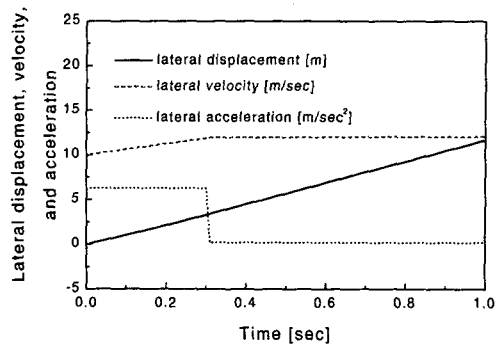


Fig. 5 Magnified plot near 0.5[sec]

존재한다. 중력가속도  $g$ 는 9.81[m/sec<sup>2</sup>]의 크기를 갖고 중력은  $\hat{n}_2$ 의 반대방향으로 작용한다. 원판의 질량중심에 작용하는 힘은  $\hat{n}_1$ 의 방향으로 10[N]이 작용한다.  $N$  그리고  $\mu$ 는 접촉점에서의 수직반력과 운동 마찰계수를 나타낸다. 해석에 사용된 운동마찰계수  $\mu$ 와 정지마찰계수  $\mu_s$ 는 각각 0.3과 0.35가 사용되었고 원판의 반경은 0.2[m]가 사용되었다. Table 1은 수치해석에 사용된 관성특성치 및 초기값들을 나타낸다. 해석결과로부터 지면과 접촉하는 원판상의 접촉점에서의 수직반력은 29.43[N]이 작용하고 이는  $\hat{n}_2$  방향에 대한 힘의 평형방정식에 의한 결과와 동일하다. Fig. 4는 지면과 접촉하는 원판의  $\hat{n}_1$  방향으로의 위치, 속도, 그리고 가속도의 시간에 대한 궤적을 보여주고 있다. Fig. 5는 시간 0.5초 근처에서 확대된 그림을 보여준다. 해석결

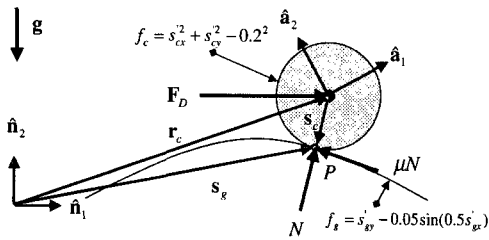


Fig. 6 A rolling disk in contact with sine wave

Table 2 Initial conditions for example 2

Initial conditions	
$r$	$[0.000 \ 0.200]' [m]$
$\theta$	$0.000 [rad]$
$\dot{r}$	$[10.000 \ 0.250]' [m/sec]$
$\dot{\theta}$	$-60.000 [rad/sec]$

과로부터 0.32초 근처에서 가속도의 불연속이 생김을 알 수 있고 이는 해석초기 원판은 구름과 미끄럼운동을 하다가 0.32초 이후 순수 구름운동을 함에 기인한다.

3.2 정형파형(sine wave)의 지면상의 곡선과 접촉하는 원판

Fig. 6은 한 점에서 지면상의 정형파형의 곡선과 접촉하면서 움직이는 강체를 보여준다. 그림에 나타난 기호는 예제 3.1의 경우와 동일하다. 원판의 질량중심에 작용하는 힘은  $\hat{n}_1$ 의 방향으로 10[N]이 작용한다. 운동마찰계수  $\mu$ 와 정지마찰계수  $\mu_s$ 는 각각 0.3과 0.35가 사용되었다. 지면상을 움직이는 강체의 관성특성치는 예제 3.1의 경우와 동일하며 Table 2는 수치해석에 사용된 계의 초기값들을 나타내고 있다. Fig. 7은 시간에 따른 강체상의 접촉점에서의 수직반력의 궤적을 나타내고 그림에서  $N_x$ 와  $N_y$ 는 각각 접촉점 P에서  $\hat{n}_1$ ,  $\hat{n}_2$ 방향으로의 수직반력 N의 성분을 나타낸다. 해석결과로부터 접촉점의 위치변화에 따라 접촉점에 작용하는 수직반력이 변화함을 알 수 있다. Fig. 8은 시간에 따른 강체의 질량중심의  $\hat{n}_1$ 방향으로의 위치, 속도, 가

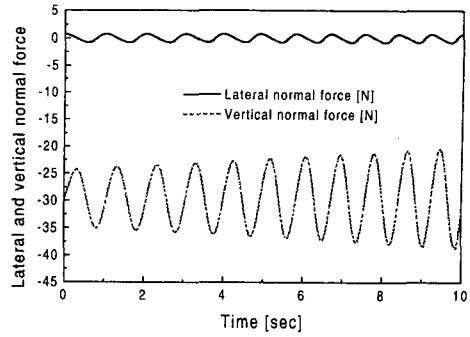


Fig. 7 Lateral and vertical normal force on a contact point of a disk

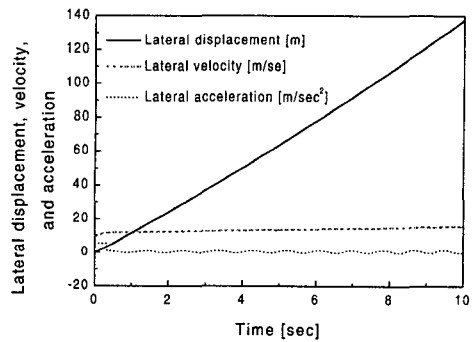


Fig. 8 Displacement, velocity and acceleration of a disk in moving direction

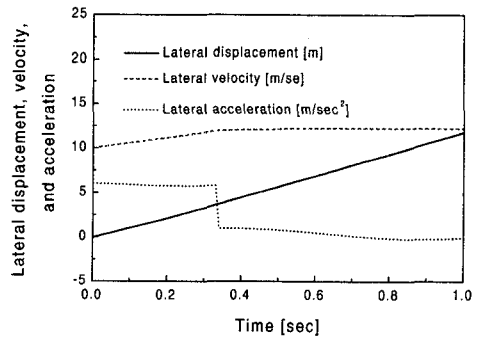


Fig. 9 Magnified plot near 0.5[sec]

속도에 대한 궤적을 보여주고 있다. Fig. 9는 시간 0.5초 근처에서의 확대된 그림을 보여준다. 해석결과로부터 0.34초 근처에서 가속도의 불연속이 생김을 알 수 있고 이는 해석초기 원판은 구름과 미끄럼운동을 하다가 0.34초 이후 순수 구름운동을 함에 기인한다.

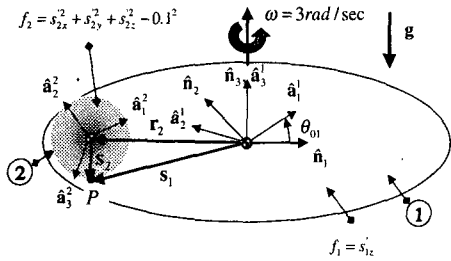


Fig. 10 A moving ball in contact with a rotating circular plate

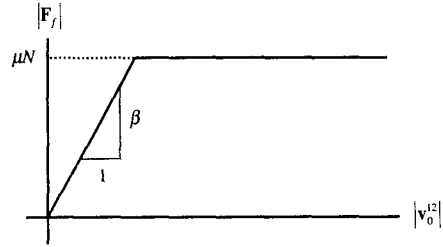


Fig. 11 Magnitude of friction force vs. relative velocity

Table 3 Inertia properties and initial conditions for example 3

Inertia properties	
$m_1$	50.000[kg]
$J_{1xx}, J_{1yy}, J_{1zz}$	10.000, 10.000, 15.000[kg · m <sup>2</sup> ]
$m_2$	10.000[kg]
$J_{2xx}, J_{2yy}, J_{2zz}$	1.000, 1.000, 1.000[kg · m <sup>2</sup> ]
Initial conditions	
$r_1$	[0.000 0.000 0.000] <sup>T</sup> [m]
$e_1$	[0.000 0.000 0.000 1.000] <sup>T</sup>
$r_2$	[0.000 0.000 0.100] <sup>T</sup> [m]
$e_2$	[0.000 0.000 0.000 1.000] <sup>T</sup>
$\dot{r}_1$	[0.000 0.000 0.000] <sup>T</sup> [m/sec]
$\omega_1$	[0.000 0.000 3.000] <sup>T</sup> [rad/sec]
$\dot{r}_2$	[0.000 0.000 0.000] <sup>T</sup> [m/sec]
$\omega_2$	[0.000 0.000 0.000] <sup>T</sup> [rad/sec]

### 3.3 회전원판과 접촉하는 구

Fig. 10은 원판이 회전할 때 그 위를 구르는 구를 보여준다. 그림에서  $\hat{n}_k$ ,  $\hat{a}_k^1$  그리고  $\hat{a}_k^2$  ( $k=1, 2, 3$ )는 각각 절대좌표계, 회전하는 원판, 그리고 회전원판을 구르는 구에 고정된 좌표계의 직교단위벡터를 나타낸다.  $t=0.0$ [sec]에서 절대좌표계와 회전원판에 고정된 좌표계는 일치하고 회전원판과 구는 점 P에서 접촉하고 있다.  $\theta_{01}$ 은 회전조인트에서의 상대회전각을 나타낸다.  $r_2$ ,  $s_1$  그리고  $s_2$ 는 각각 구의 질량중심까지

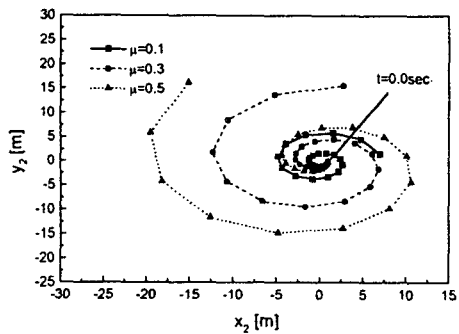


Fig. 12 Loci of a ball mass center according to frictional coefficient to  $\mu$

의 위치벡터, 원판의 질량중심으로부터 접촉점까지의 위치벡터, 그리고 구의 질량중심으로부터 접촉점까지의 위치벡터를 나타낸다. 회전하는 원판은 지면에 대해  $\hat{n}_3$  축을 중심으로 일정 각속도  $\omega$ 로 회전하고 있다. 외력으로는 두 강체에 중력과 접촉점에서의 마찰력이 작용한다. 중력가속도  $g$ 는 9.81[m/sec<sup>2</sup>]의 크기를 갖고 중력은  $\hat{n}_3$ 의 반대방향으로 작용한다. 접촉하는 두 강체가 미끄럼운동을 하다가 순수구름운동을 할 경우 마찰력과 정지 마찰력간의 불연속과 같은 수치적 어려움이 발생한다. 이러한 수치적 어려움을 극복하기 위해 접촉점에 작용하는 마찰력을 Fig. 11과 같이 간단하게 모델링하고<sup>(11)</sup> 그림에서 기울기  $\beta$ 는 1000 [N·sec/m]을 사용하였다. Table 3은 수치해석에 사용된 계의 관성특성치 및 초기값들을 나타내고  $e_k$  ( $k=1, 2$ )는 오일러 매개변수(Euler parameters)를 의미한다. Fig. 12는



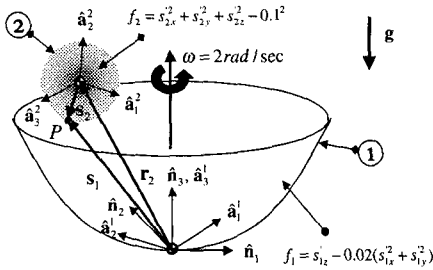


Fig. 13 A moving ball in contact with a rotating surface

Table 4 Initial conditions for example 4

Initial conditions	
$r_1$	$[0.000 \ 0.000 \ 0.000]^T$ [m]
$e_1$	$[0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 1.000]^T$
$r_2$	$[0.000 \ 0.000 \ 0.1200]^T$ [m]
$e_2$	$[0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 1.000]^T$
$\dot{r}_1$	$[0.000 \ 0.000 \ 0.000]^T$ [m/sec]
$\omega_1$	$[0.000 \ 0.000 \ 2.000]^T$ [rad/sec]
$\dot{r}_2$	$[0.000 \ 0.000 \ 0.000]^T$ [m/sec]
$\omega_2$	$[0.000 \ 0.000 \ 0.000]^T$ [rad/sec]

마찰계수  $\mu$ 에 따른 회전원판에 고정된 좌표계에 대한 구의 질량중심의 궤적을 보여주고 있다. 해석결과로부터 마찰계수가 증가함에 따라 구의 접촉점에 작용하는 마찰력이 증가하고 속도가 커져서 큰 원심력을 받게 됨을 알 수 있다.

### 3.4 회전하는 곡면과 접촉하는 구

Fig. 13은 회전하는 곡면을 구르는 구를 보여준다. 그림에서 강체 ②의 구와 접촉하는 면은 곡면으로 되어있고 강체 ②는 강체 ①의 접촉면을 따라 움직이는 구를 나타낸다. 회전하는 곡면은 지면과 회전조인트로 연결되어 있고  $\hat{n}_3$  축을 중심으로 일정각속도  $\omega$ 로 회전하고 있다. 외력으로 두 강체에 중력과 접촉점에서 마찰력이 작용한다. 마찰력은 Fig. 11과 같이 동일하게 모델링하였고 계의 물성치는 예제 3.3과 동일하다. Table 4는 수치해석에 사용된 계의 초기값들을 나타낸다. Fig. 14는 구의 질량중심의 시간에 따

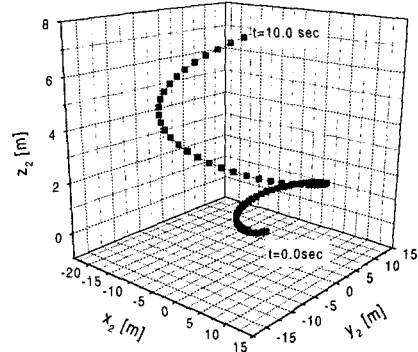


Fig. 14 Loci of ball mass center

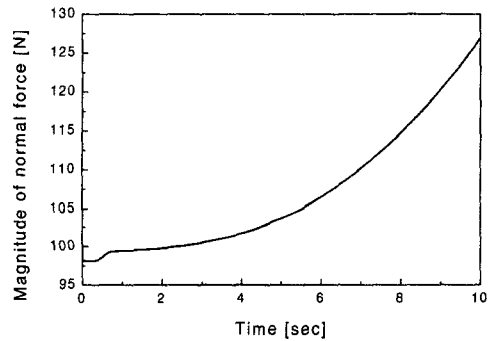


Fig. 15 Magnitude of normal force

른 공간상에서의 궤적을 보여주고 Fig. 15는 접촉점에서 접촉면에 수직인 방향으로 작용하는 수직반력의 크기를 보여준다. 해석 결과로부터 강체 ②가 강체 ①의 원점으로부터 멀어질수록 원심력이 증가하고 접촉점에 작용하는 수직반력의 크기를 증가시킴을 알 수 있다.

## 4. 결론

본 논문에서는 접촉하는 두 강체의 운동 및 접촉력 계산을 위한 해석방법을 제시하였다. 본 논문에 제시된 방법은 위치해석을 위한 매개변수를 도입하여 곡선과 곡선은 물론 곡면과 곡면간의 접촉점의 위치를 계산하고 비선형 운동방정식을 반복적으로 풀어서 접촉력 계산을 수행할 수 있다. 본 논문에서 제시한 해석방법은 일반좌표 개수만큼의 확장 라그랑지 방정식과 가속도 구속방정식을 함께 반복적으로 풀어야 하는 기존의 방법에 비해 반복적으로 풀어야 하는 운동방정식

크기를 줄임으로써 계산상 효율성을 높일 수 있다.

## 후 기

본 논문의 연구는 건설교통부, 산업자원부, 과학기술부 공동주관 아래 선도기술개발사업으로 시행되는 고속전철기술개발사업에 의해 지원을 받아 수행되었으며, 이에 관계자께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Dukkipati, R. V. and Joseph, R. A., 1988, *Computer-Aided Simulation in Railway Dynamics*, Marcel Dekker, Inc..
- (2) 박정훈, 유홍희, 황요하, 배대성, 1997, "케인 방법을 이용한 구속 다물체계의 동역학 해석," 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제12호, pp. 2156~2164.
- (3) Wehage, R. A. and Haug, E. J., 1982, "Generalized Coordinates Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic System," *J. Mechanical Design*, Vol. 104, pp. 247~255.
- (4) Baumgarte, J., 1972, "Stabilization of Constraints and Integrals of Motion," *Computational Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 1, pp. 1~16.
- (5) Choi, J. H., 1996, "Use of Recursive and Approximation Methods for Dynamics Analysis of Spatial Tracked Vehicles," Ph. D. Thesis, University of Illinois at Chicago.
- (6) Kim, S. S., Shabana, A. A. and Haug, E. J., 1984, "Automated Vehicle Dynamic Analysis with Flexible Components," *J. Mecha., Trans., and Auto. in Design*, Vol. 106, pp. 126~132.
- (7) Wu, S. C., Yang, S. M. and Haug, E. J., *Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Stiction, Impact, and Constraint Addition-deletion*, 1984, Technical Report NO. 84-19.
- (8) 박정훈, 유홍희, 황요하, 1998, "접촉하는 두 강체 사이에서의 접촉력 계산을 위한 동역학 해석 알고리즘," 대한기계학회 1998년도 춘계학술대회논문집, pp. 560~565.
- (9) 박정훈, 유홍희, 황요하, 1999, "편속도 행렬을 이용한 구속 다물체계의 동역학 해석," 대한기계학회논문집(A), 제23권, 제5호, pp. 861~870.
- (10) Shampine, L. F. and Gordon, M. K. Gordon, 1975, *Computer Solution of Ordinary Differential Equations*, W. H. Freeman and Company.
- (11) Nikravesh, P. E., 1988, *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall Inc.