

# 응력과 변형률의 Dyad와 행렬에 의한 표현

김 찬 중\* · 조 종 두\*\*  
(1999년 5월 29일 접수)

## Matrix and Dyadic Representation of Stress and Strain

Charn-Jung Kim and Chongdu Cho

**Key Words:** Dyad(다이애드), Matrix(행렬), Stress(응력), Strain(변형률)

### Abstract

Stress and strain in continuum mechanics have a mathematical form of the second order tensor. It is well-known that the usefulness of tensor components could be explained in a relation with coordinates system transformation and Mohr's circle could be easily used to make a coordinate system transformation of tensors. However, Mohr's circle is applied mainly to plane problems and its use to three dimensional cases is limitedly employed. In this paper, we propose a matrix and dyadic representation of stress and strain tensors which could equivalently replace the graphical representation of second order tensors. The use of the proposed representation might provide a valuable means for the educational respects as well as research view point.

### 1. 서론

응력(stress)과 변형률(strain)은 연속체역학에서 매우 중요한 물리량이다. 수학적으로 응력과 변형률은 모두 2차텐서이며 물리적으로는, 특정한 면이 주어질 때 그 면에 대한 벡터량으로 표현된다. 또한, 응력과 스트레인은 물리량의 불변성(physical invariance)의 관점에서 좌표의 변환에 무관한 연속체 내부점의 상태량으로 주어진다. 이러한 성질을 기술하기 위하여 대부분의 연속체역학과 관련된 문헌<sup>(1~3)</sup>에서는 응력의 경우

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

형태의 3×3행렬을 이용하여 표현하거나 또는

$$\sigma_{ij}' = l_{im}l_{jn}\sigma_{mn} \quad (2)$$

\* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

\*\* 회원, 인하대학교 기계공학과

E-mai : cdcho@dragon.inha.ac.kr

TEL : (032)860-7321 FAX : (032)868-1716

과 같이 좌표변환에 관여하는 2차텐서를 사용하여 나타낸다. 그러나, 식 (1)은 직교좌표계에 대해서는 이해하기가 쉽지만 비직교좌표계에 대하여는 매우 복잡한 표현이 필요하다.

본 연구에서는 수학적으로 단순한 벡터 연산 중의 하나인 dyad를 이용하여 응력과 변형률을 표현함으로써 도식적인 표현(예를 들면 Mohr의 원)과 대등하게 쉽게 이해할 수 있는 방법을 제시한다.

### 2. 응력의 Dyad에 의한 해석

#### 2.1 행렬을 이용한 벡터곱 dyad의 표현

내적, 외적, 삼중적(triple scalar product) 등의 벡터 연산과 마찬가지로 벡터곱 dyad는 매우 중요한 연산 중의 하나이다. 보통 dyad는 벡터와 벡터를 그냥 붙여서 쓰는 형태로 표현하며, 예를 들어 직각좌표계의 정규직교 기저벡터  $i, j, k$ 를 이용하여 임의의 벡터  $a, b$ 의 dyad를 구하면

$$\begin{aligned}
 \mathbf{ab} &= (\mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3)(\mathbf{i}b_1 + \mathbf{j}b_2 + \mathbf{k}b_3) \\
 &= \mathbf{ii}a_1b_1 + \mathbf{ij}a_1b_2 + \mathbf{ik}a_1b_3 \\
 &\quad + \mathbf{ji}a_2b_1 + \mathbf{jj}a_2b_2 + \mathbf{jk}a_2b_3 \\
 &\quad + \mathbf{ki}a_3b_1 + \mathbf{kj}a_3b_2 + \mathbf{kk}a_3b_3
 \end{aligned} \quad (3)$$

을 얻는다. 본 연구에서는 행렬을 이용하여 dyad를 다음과 같이 나타내기 위하여(반복되는 첨자는 합을 나타내는 Einstein 표기법을 사용한다).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{ab} &= \mathbf{i}; \mathbf{i}_j a_i b_j = \\
 &(\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

위의 특수한 경우로 단위 dyad는

$$\vec{\mathbf{I}} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (5)$$

으로 쓸 수 있다.

식 (4)와 같이 행렬을 이용하여(특히 벡터를 행렬의 원소처럼 취급하여) dyad를 표현하는 것은 직각좌표계에서 표현된 벡터의 경우

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad (6)$$

인 전형적인 표현법과는 달리

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3 = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (7)$$

와 같이 직각좌표계의 정규직교기저벡터  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 가 포함되도록 행렬을 이용하여 나타내는 것과 매우 유사한 점이 있다. 식 (7)과 같은 표현은 현재 대부분의 문헌에서 거의 쓰이지 않지만 좌표의 변환과 같이 기저벡터의 변환에 따른 물리량의 해석에 매우 유리하다.

## 2.2 Dyad의 전치

두 개의 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 로부터 얻는 dyad  $\mathbf{ab}$ 와  $\mathbf{ba}$ 에 대해서는 행렬의 전치(transpose)연산과 유사한 형태의 연산이 정의된다. 즉,  $(\mathbf{ab})^T = \mathbf{ba}$ 가 성립한다. 이것은 식 (4)로부터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 역할을 바꾸면

$$\mathbf{ba} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (8)$$

이고,  $(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ 인 전치공식을 이용하면

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{ba})^T &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{pmatrix}^T (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k})^T \\
 &= (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_2 a_1 & b_3 a_1 \\ b_1 a_2 & b_2 a_2 & b_3 a_2 \\ b_1 a_3 & b_2 a_3 & b_3 a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \mathbf{ab}
 \end{aligned} \quad (9)$$

인 관계를 얻을 수 있기 때문이다.

## 2.3 응력텐서의 dyad 표현

공간기울기  $\nabla\phi$ 는 미소변위  $\delta\mathbf{r}$ 에 따른 물리량의 미소변화  $\delta\phi$ 를 이용하여

$$\begin{aligned}
 \nabla\phi &= \frac{\delta\phi}{\delta\mathbf{r}} = \frac{\delta\phi}{i\delta x + j\delta y + k\delta z} \\
 &= \mathbf{i} \frac{\delta\phi}{\delta x} + \mathbf{j} \frac{\delta\phi}{\delta y} + \mathbf{k} \frac{\delta\phi}{\delta z}
 \end{aligned} \quad (10)$$

와 같이 분모에 위치하는 벡터가 밖으로 빠져나오는 “상징적인 연산”을 통해 이해할 수 있다.<sup>(4,5)</sup>

응력은 이와 매우 유사하게 미소면  $\delta\mathbf{A}$ 에 작용하는 미소힘  $\delta\mathbf{F}$ 에서 비롯된다. 따라서, 응력을 “상징적”으로  $\vec{\sigma} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta\mathbf{A}}$ 인 표현을 사용하여

이해할 수도 있을 것이다. 실제로, 면적  $\delta\mathbf{A}$ 에 작용하는 힘  $\delta\mathbf{F}$ 에 대해서  $\delta\mathbf{F} = \delta\mathbf{A} \cdot \square$ 로 부터  $\square = \vec{\sigma}$ 를 “상징적인 연산”을 수행하여 구하면

$$\begin{aligned}
 \square &= \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta\mathbf{A}} = \frac{\delta\mathbf{F}}{i\delta A_1 + j\delta A_2 + k\delta A_3} \\
 &= \mathbf{i} \frac{\delta}{\delta A_1} (\mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3) \\
 &\quad + \mathbf{j} \frac{\delta}{\delta A_2} (\mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3) \\
 &\quad + \mathbf{k} \frac{\delta}{\delta A_3} (\mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3)
 \end{aligned} \quad (11)$$

즉,

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma} &= \frac{\delta F}{\delta A} \\ &= \mathbf{ii} \frac{\delta F_1}{\delta A_1} + \mathbf{ij} \frac{\delta F_2}{\delta A_1} + \mathbf{ik} \frac{\delta F_3}{\delta A_1} \\ &\quad + \mathbf{ji} \frac{\delta F_1}{\delta A_2} + \mathbf{jj} \frac{\delta F_2}{\delta A_2} + \mathbf{jk} \frac{\delta F_3}{\delta A_2} \\ &\quad + \mathbf{ki} \frac{\delta F_1}{\delta A_3} + \mathbf{kj} \frac{\delta F_2}{\delta A_3} + \mathbf{kk} \frac{\delta F_3}{\delta A_3} \end{aligned} \quad (12)$$

을 얻는다. 위에서,  $x_i$ -축에 수직인 면  $\delta A_i$ 에 작용하는 응력의  $x_j$ -축방향의 성분은

$$\sigma_{ij} = \lim_{\delta A_i \rightarrow 0} \frac{\delta F_j}{\delta A_i} \quad (13)$$

$\swarrow$  면의 방향       $\searrow$  힘의 방향

와 같이 극한을 이용하여  $\sigma_{ij}$ 로 정의된다. 다시 말해서

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma} &= \lim_{|\delta A_i| \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A} = \mathbf{ii}\sigma_{11} + \mathbf{ij}\sigma_{12} + \mathbf{ik}\sigma_{13} \\ &\quad + \mathbf{ji}\sigma_{21} + \mathbf{jj}\sigma_{22} + \mathbf{jk}\sigma_{23} \\ &\quad + \mathbf{ki}\sigma_{31} + \mathbf{kj}\sigma_{32} + \mathbf{kk}\sigma_{33} \end{aligned} \quad (14)$$

으로 정의된다. 위의 응력텐서를 앞에서 식 (4)로 표현된 형태(dyadic representation)으로 다시 쓰면

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \sigma_{ij} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (15)$$

으로 간략하게 된다. 특히, 2차원 평면에서의 plane텐서는

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \sigma_{ij} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j}) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (16)$$

형태로 표현된다.

식 (16)의 응용으로 Fig. 1에 보인 응력의 상태를 고려해보자. 직각좌표계의 각 축에 수직인 면에 작용하는 단위면적당의 힘이 Fig. 1에 주어졌으며 이것을 표로 나타내면 Table 1과 같다.

위의 결과를 dyad와 행렬을 이용하여 다시 나타내면

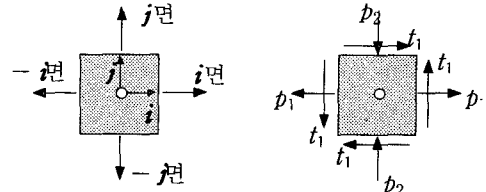


Fig. 1 A plane stress tensor

Table 1 A typical case of a plane stress

Surface direction	Force direction	Stress component	Dyadic representation
$i$	$i$	$\sigma_{11} = p_1$	$ii p_1$
$i$	$j$	$\sigma_{12} = t_1$	$ij t_1$
$j$	$i$	$\sigma_{21} = t_1$	$ji t_1$
$j$	$j$	$\sigma_{22} = -t_2$	$-jj p_2$

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \mathbf{ii} p_1 + \mathbf{ij} t_1 + \mathbf{ji} t_1 - \mathbf{jj} p_2 \quad (17)$$

$$= (\mathbf{i} \ \mathbf{j}) \begin{pmatrix} p_1 & t_1 \\ t_2 & -p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$$

으로 된다. 음의 면인 경우, 예를 들어  $-i$ 면에 작용하는  $-j$ 방향의 힘은  $t_1$ 이므로 응력텐서의 구성성분은  $(-i)(-j)t_1 = ij t_1$ 으로 이미 위식에 포함되어 있다. 즉, 음의 면의 경우는 따로 고려할 필요가 없다.

#### 2.4 응력텐서와 좌표변환

행렬에 의한 응력텐서의 표현

$$\overleftrightarrow{A} = \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j A_{ij} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (18)$$

또는 2차원인 경우의 표현

$$\overleftrightarrow{A} = \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j A_{ij} = (\mathbf{i} \ \mathbf{j}) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (19)$$

에서 나타나는 직각좌표계의 정규직교기저벡터  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  또는  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 는 다른 좌표계의 정규직교기저벡터로 표현될 수 있으며, 이러한 좌표변환 특히 회전에 의한 변환의 경우는 직교행렬을 이용하여 나타낼 수 있다.

간결한 논의를 위하여 식 (19)로 주어지는, 2차원 공간에서의 응력텐서를 고려하기로 한다. 먼저, Fig. 2에 보인 회전에 의한 좌표변환으로부터

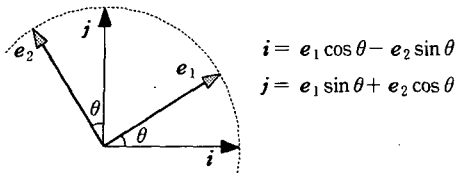


Fig. 2 Transformation by a rotation

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad L \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (20)$$

의 관계를 얻을 수 있다. 위에서, 변환행렬  $L$ 은 직교행렬로  $L^{-1} = L^T$ 인 성질을 가진다. 계속하여, 식 (20)의 전치를 취하고

$$(i \ j) = \left[ L \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \right]^T = (e_1 \ e_2) L^T$$

행렬  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 를 정의하여 식 (19)에 대입하면

$$\begin{aligned} \vec{A} &= i_i \ i_j A_{ij} = (i \ j) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \\ &= (e_1 \ e_2) L^T A L \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

을 얻는다. 특히, 직교행렬의 성질  $L^{-1} = L^T$ 를 이용하면

$$\vec{A} = (e_1 \ e_2) L^{-1} A L \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

인 일반형으로 된다. 위에서, 행렬  $L^{-1} A L$ 은  $A$ 의 상사행렬이며, 원래 행렬의 고유값을 보존하는 중요한 성질은 응력을 Mohr의 원으로 나타내는 수학적 근거를 제공한다.

식 (21)로 주어지는 상사행렬  $\tilde{A} = L^{-1} A L$ 의 각 원소는 직교행렬의 성질  $L^{-1} = L^T$ 를 이용하면

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= L^{-1} A L \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

즉,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= A_{11} \cos^2 \theta + A_{22} \sin^2 \theta + (A_{12} + A_{21}) \cos \theta \sin \theta \\ \tilde{A}_{22} &= A_{11} \sin^2 \theta + A_{22} \cos^2 \theta - (A_{12} + A_{21}) \cos \theta \sin \theta \\ \tilde{A}_{12} &= A_{12} \cos^2 \theta - A_{21} \sin^2 \theta + (A_{22} - A_{11}) \cos \theta \sin \theta \\ \tilde{A}_{21} &= A_{21} \cos^2 \theta - A_{12} \sin^2 \theta + (A_{22} - A_{11}) \cos \theta \sin \theta \quad (22) \end{aligned}$$

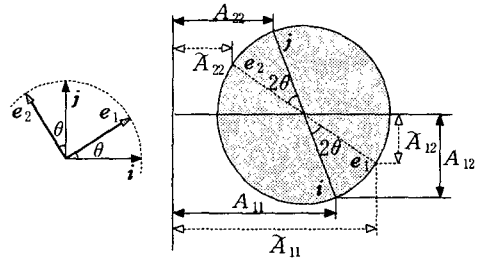


Fig. 3 Mohr's circle for a plain stress

으로 된다. 만일, 행렬  $A$ 가 대칭행렬이라면(실제로 응력의 물리적인 성질로부터 항상 대칭이 된다)  $A_{12} = A_{21}$ 이 되고, 위 식으로부터 상사행렬  $\tilde{A}$ 가 대각행렬이 되기 위해서는

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{12} = \tilde{A}_{21} &= A_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &\quad + (A_{22} - A_{11}) \cos \theta \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

이 성립해야 한다. 그런데, 식 (23)을 풀면

$$\tan 2\theta = \frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}} \quad (24)$$

로 현 좌표계를 기준으로 주응력 방향의 기울기를 얻는다. 이 경우 식 (22)의  $\tilde{A}_{11}$ 과  $\tilde{A}_{22}$ 는 주응력이다.

### 2.5 2차원 응력텐서와 Mohr의 원

연속체역학에서 응력텐서는 대칭으로 주어진다.

이때, 2차원 응력텐서  $\vec{A} = (e_1 \ e_2) L^{-1} A L \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

의 경우  $A_{12} = A_{21}$ 이므로 식 (22)로부터

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \frac{A_{11} + A_{22}}{2} + \frac{A_{11} - A_{22}}{2} \cos 2\theta + A_{12} \sin 2\theta \\ \tilde{A}_{12} &= -\frac{A_{11} - A_{22}}{2} \sin 2\theta + A_{12} \cos 2\theta \\ \tilde{A}_{22} &= \frac{A_{11} + A_{22}}{2} - \frac{A_{11} - A_{22}}{2} \cos 2\theta - A_{12} \sin 2\theta \end{aligned}$$

인 형태를 얻을 수 있다. 위의 계산은 Fig. 3에 보인 Mohr의 원을 이용하여 구하는 것이 연속체역학에서 잘 알려져 있다.

### 2.6 Dyad를 이용한 응력텐서의 변환

응력텐서의 변환을 행렬을 이용하여 식 (21)과 같이 구하는 방법 이외에도 dyad를 쓸 수도 있다. 이것은 Fig. 2에 보인 좌표변환관계

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta$$

를 직접 응력 텐서의 dyadic 형태에 대입하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{A}} &= \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j A_{ij} \\ &= A_{11} \mathbf{i}\mathbf{i} + A_{12} \mathbf{i}\mathbf{j} + A_{21} \mathbf{j}\mathbf{i} + A_{22} \mathbf{j}\mathbf{j} \\ &= A_{11} (\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta)(\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta) \\ &\quad + A_{12} (\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta)(\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta) \\ &\quad + A_{21} (\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta)(\mathbf{e}_1 \cos \theta - \mathbf{e}_2 \sin \theta) \\ &\quad + A_{22} (\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta)(\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta) \\ &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 (A_{11} \cos^2 \theta + A_{12} \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + A_{21} \sin \theta \cos \theta + A_{22} \sin^2 \theta) \\ &\quad + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 (-A_{11} \cos \theta \sin \theta + A_{12} \cos^2 \theta \\ &\quad - A_{21} \sin^2 \theta + A_{22} \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 (-A_{11} \sin \theta \cos \theta - A_{12} \sin^2 \theta \\ &\quad + A_{21} \cos^2 \theta + A_{22} \cos \theta \sin \theta) \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 (A_{11} \sin^2 \theta - A_{12} \sin \theta \cos \theta \\ &\quad - A_{21} \cos \theta \sin \theta + A_{22} \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

가 되고 위 식을

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \tilde{A}_{ij} \quad (25)$$

와 비교하면 동일한 결과를 얻게 된다.

### 3. 변형률의 dyad에 의한 해석

#### 3.1 변형률의 dyadic 표현

직각좌표계에서  $x, y, z$  방향의 변위를 각각  $u, v, w$  라고 하면 변위 벡터는

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w \quad (26)$$

로 주어진다. 이때, (공학) 변형률은

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (27)$$

와 같이 정의된다. 변형률이 수학적 의미 갖기 위한 정의<sup>(3)</sup>에 따라서

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (28)$$

를 도입하면

$$\epsilon_x = e_{11}, \epsilon_y = e_{22}, \epsilon_z = e_{33}, \gamma_{ij} = 2e_{ij} \quad (29)$$

인 관계가 성립한다. 여기서  $i \neq j$  이다.

이때, 식 (28)으로 주어진 변형률 텐서는

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{E}} &= \mathbf{i}\mathbf{i}e_{11} + \mathbf{j}\mathbf{j}e_{22} + \mathbf{k}\mathbf{k}e_{33} \\ &\quad + \mathbf{j}\mathbf{i}e_{21} + \mathbf{j}\mathbf{j}e_{22} + \mathbf{j}\mathbf{k}e_{23} \\ &\quad + \mathbf{k}\mathbf{i}e_{31} + \mathbf{k}\mathbf{j}e_{32} + \mathbf{k}\mathbf{k}e_{33} \\ &= \mathbf{i}\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\mathbf{j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mathbf{k}\mathbf{k} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mathbf{j}\mathbf{i} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mathbf{j}\mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{j}\mathbf{k} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mathbf{k}\mathbf{i} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k}\mathbf{j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \mathbf{k}\mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

가 되고, 계속해서 기울기의 정의

$$\nabla \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

를 이용하면 총 18개 항이 3개씩 6개의 묶음으로 다음과 같이

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} [(\nabla u) \mathbf{i} + (\nabla v) \mathbf{j} + (\nabla w) \mathbf{k} \\ &\quad + \mathbf{i}(\nabla u) + \mathbf{j}(\nabla v) + \mathbf{k}(\nabla w)] \end{aligned} \quad (30)$$

정리된다.<sup>(7)</sup> 위의 결과에서 변형률 텐서는 행렬의 전치(transpose)  $\mathbf{i} \nabla u = (\nabla u \mathbf{i})^T$  의 관계를 써서

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (31)$$

으로 더욱 간단히 표현된다.<sup>(7)</sup>

#### 3.2 곡선직교좌표계에서의 변형률 텐서

Cartesian 좌표계에서 단위벡터  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  와 변위 성분  $u_1, u_2, u_3$  으로 표현된 변형률 텐서를 곡선 직교좌표계  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  에서 나타내야 할 경우가 많이 있다. 곡선직교좌표계에서  $\eta_j$  축의 접선방향 단위벡터를  $\mathbf{e}_j$  라고 하고, 변위 성분은  $v_j$  라고 하자. 그리고 두 좌표계 사이의 관계는 변환행렬  $L = (l_{ij})$  에 의해서

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (32)$$

으로 주어진다고 하자. 또한 곡선 직교좌표계의 기울기 연산자

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{h_1 \partial \eta_1} + e_2 \frac{\partial}{h_2 \partial \eta_2} + e_3 \frac{\partial}{h_3 \partial \eta_3}$$

를 쉽게 다루기 위하여

$$\frac{\partial}{h_i \partial \eta_i} \equiv \partial_i \quad (\text{no sum on } i) \quad (33)$$

로 나타내기로 하면, 기울기 연산자는

$$\nabla = e_i \partial_i \quad (34)$$

가 된다. 그리고

$$\begin{aligned} 2\vec{E} &= (\nabla u_1 \mathbf{i}_1 + \nabla u_2 \mathbf{i}_2 + \nabla u_3 \mathbf{i}_3) \\ &\quad + (\mathbf{i}_1 \nabla u_1 + \mathbf{i}_2 \nabla u_2 + \mathbf{i}_3 \nabla u_3) \quad (35) \\ &= \left[ (\mathbf{i}_1 \ \mathbf{i}_2 \ \mathbf{i}_3) \nabla \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right]^T + (\mathbf{i}_1 \ \mathbf{i}_2 \ \mathbf{i}_3) \nabla \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

으로 쓸 수 있고, 우변에서 두 번째 항은 다시 식 (32)를 이용하면

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u})^T &= (\mathbf{i}_1 \ \mathbf{i}_2 \ \mathbf{i}_3) \nabla \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= (e_1 \ e_2 \ e_3) L^T \nabla \left[ L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] \quad (36) \end{aligned}$$

가 된다. 그런데 스칼라  $\phi$  에 대해서

$$\partial_j (b\phi) = (\partial_j b)\phi + b(\partial_j \phi)$$

로 쓸 수 있기 때문에, 위의 관계를 행렬로 확장하면

$$\begin{aligned} \nabla \left[ L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] &= e_j \partial_j \left[ L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= e_j [\partial_j L] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + e_j L \left[ \partial_j \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] \quad (37) \end{aligned}$$

와 같이 될 것이다. 이것을 식 (36)에 대입하면

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u})^T &= (e_1 \ e_2 \ e_3) e_j [L^T \partial_j L] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &\quad + (e_1 \ e_2 \ e_3) e_j [L^T L] \left[ \partial_j \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

가 된다(위에서  $e_j$  는 행렬의 곱  $L^T \partial_j L$  에 대해서는 스칼라 처럼 행동하므로  $e_j$  와 행렬  $L^T$  의 순서를 바꿀 수 있다). 만일, 직교좌표계를 사용하면 변환행렬은 직교행렬이므로  $L^T L = I$  가 된다. 그러면 위식은

$$(\nabla \mathbf{u})^T = (e_1 \ e_2 \ e_3) e_j [L^T \partial_j L] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + e_j e_i \partial_j v_i \quad (38)$$

으로 간단히 된다. 위 식에서  $e_j$  의 위치만을 바꾸면 전치가 되기 때문에

$$(\nabla \mathbf{u}) = e_j (e_1 \ e_2 \ e_3) [L^T \partial_j L] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + e_j e_i \partial_j v_i$$

따라서 변형률텐서는 다음과 같다.

$$\vec{E} = \frac{1}{2} [e_i e_j (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + (e_i \lambda_j + \lambda_j e_i)]$$

여기서

$$\lambda_j = (e_1 \ e_2 \ e_3) [L^T \partial_j L] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (39)$$

로 정의하였다.

특히, 우변의 첫째 항은 Cartesian인 경우와 동일한 형태임을 알 수 있다.

#### 4. 적용 예 및 토론

Fig. 4의 왼쪽에 보인 것처럼 순수히 전단응력만이 작용하는 경우 45° 회전한 미소체적면에서는 전단응력이 0으로 표현되는 사실은 Mohr의 원을 이용하면 쉽게 보일 수 있다. 이러한 도식적인 방법(graphical method) 외에도 본 연구에서는 수학적인 단순한 조작으로부터 구할 수 있는 방법을 제시한다. 먼저, 그림에 나타난 응력은

$$\sigma(\mathbf{ij} + \mathbf{ji})$$

로 쓸 수 있다(앞의 식 (17) 참조). 계속해서,  $\theta = 45^\circ$  인 경우에 대한 좌표변환관계

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= e_1 \cos \theta - e_2 \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) \\ \mathbf{j} &= e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \quad (40) \end{aligned}$$

를 대입하면

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) &= \sigma \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) \right] \\ &= \frac{\sigma}{2} [(e_1 e_2 + e_1 e_2 - e_2 e_1 - e_2 e_2) \\ &\quad + (e_1 e_2 - e_1 e_2 + e_2 e_1 - e_2 e_2)] \\ &= \sigma(e_1 e_1 - e_2 e_2) \end{aligned} \quad (41)$$

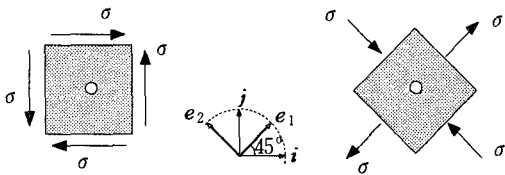


Fig. 4 Pure shear stress

가 된다. 위의 결과를 해석하면

- ①  $e_1$  면에서  $e_1$  방향으로  $\sigma$ 만큼의 압력
  - ②  $e_2$  면에서  $e_2$  방향으로  $-\sigma$ 만큼의 압력
- 이 되고, Fig. 4의 오른쪽에 보인 것과 같다.

또한, 식 (39)의 응용으로  $(r, \theta)$ 좌표계에서 변형률텐서의 각 성분을 구해보자.  $(r, \theta)$ 좌표계는 직교좌표계이므로  $L^{-1} = L^T$ 가 되고

$$L = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

를 얻는다. 그리고  $\partial_r L = 0$ 이므로

$$\lambda_r = (e_r, e_\theta) [L^T \partial_r L] \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = 0$$

이다. 한편

$$\begin{aligned} (L^T \partial_\theta L) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lambda_\theta &= (e_r, e_\theta) [L^T \partial_\theta L] \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \\ &= (e_r, e_\theta) \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \\ &= (e_r, e_\theta) \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -v_\theta \\ v_r \end{pmatrix} \\ &= -e_r \frac{v_\theta}{r} + e_\theta \frac{v_r}{r} \end{aligned}$$

를 얻는다. 최종적으로

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2} \left[ e_i e_j (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + e_\theta e_\theta \frac{2v_r}{r} \right. \\ &\quad \left. - (e_r e_\theta + e_\theta e_r) \frac{v_\theta}{r} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

가 되고, 이것을 정리하면

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= e_{11} = \partial_r v_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= e_{22} = \partial_\theta v_\theta + \frac{v_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \\ \gamma_{r,\theta} &= 2e_{12} = (\partial_r v_\theta + \partial_\theta v_r) - \frac{v_\theta}{r} \\ &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \end{aligned} \quad (43)$$

과 같이 변형률텐서의 각 성분을 쉽게 얻을 수 있다.

### 5. 결론

본 논문에서는 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- (1) 응력과 변형률의 텐서를 표현하기 위하여 사용되는 모어의 원과 같은 도식적인 방법과 대등하게 사용될 수 있는 행렬 및 dyad 로 표현하는 방법을 제시하였다.
- (2) 제안된 방법은 텐서와는 달리 쉽게 응력과 같은 물리적 의미와 수학적 의미를 연결시킬 수 있다.
- (3) 제안된 방법으로 표현된 응력과 변형률 텐서는 2차 텐서성분을 벡터연산수준으로 쉽게 좌표 변환된 성분을 공간의 차원과 관계없이 얻을 수 있다.

### 참고문헌

- (1) Timoshenko, S. P. and Young D. H., 1968, *Elements of Strength of Materials*, D. Van Nostrand Company, Inc.
- (2) Barber, J. R., 1992, *Elasticity*, Kluwer Academic Publishers.
- (3) Flugge, W., 1972, *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*, Springer-Verlag.
- (4) 김찬중, 1998, 길잡이 공업수학, 문운당.
- (5) 김찬중, 1998, 길잡이 전산유체역학, 문운당.
- (6) Riley, W. F., Sturges, L. D., and Morris, D. H., 1999, *Mechanics of Materials (5ed)*, Wiley.
- (7) Pozrikidis, C., 1997, *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press.