

# 충돌하는 구속 다물체계의 동역학 해석

박정훈\* · 유홍희\*\* · 황요하\*\*\* · 양현익\*\*  
(1999년 6월 24일 접수)

## Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems Undergoing Collision

Jung Hun Park, Hong Hee Yoo, Yoha Hwang and Hyun Ik Yang

**Key Words:** Collision(충돌), Impact(충격), Coefficient of Restitution(반발계수), Rigid Body(강체), Partial Velocity Matrix(편속도 행렬), Constrained Multibody Systems(구속 다물체계)

### Abstract

This paper presents a method for the dynamic analysis of constrained multibody systems undergoing abrupt collision. The proposed method uses a longer time interval to check collision than that of conventional method. This reduces the computational effort significantly. To calculate collision points on two colliding rigid bodies, one may introduce constraints of contact. However, this causes reduction of degree of freedom and difficulty of numerical analysis. The proposed method can calculate collision points without above mentioned problems. Three numerical examples are given to demonstrate the computational efficiency and the usefulness of the proposed method.

### 1. 서론

두 물체의 충돌시 짧은 시간 동안에 매우 큰 힘이 충돌하는 물체에 작용하며 충돌은 짧은 시간에 속도와 각속도의 급격한 변화를 초래한다. 충돌은 차량간의 충돌, 야구 방망이와 야구공의 충돌 등 어렵지 않게 주위에서 흔히 볼 수 있는 현상이다. 충돌하는 강체들의 동적해석은 차량 동역학에서 승객의 안전성 측면에서 속도 변화 및 충격량을 정확히 예측하는 것이 반드시 필요하고 야구와 같은 스포츠에서는 야구선수에게 가해지는 충격량의 예측을 위해 필요하다.

충돌과 관련한 연구로 Haug 등과<sup>(1)</sup> Kim 등은<sup>(2)</sup> 충격력이 가해지는 시간, 지점, 그리고 충격력을 알고 있는 경우에 대한 해석을 수행하였다. 충격

력에 대한 정보를 아는 경우는 포발사 전투차량의 거동해석 등에 사용될 수 있으나 충돌하는 두 물체와 같이 충돌시 가해지는 충격력과 충격력이 가해지는 위치에 대한 정보를 모르는 경우 이를 적용하기 어렵다. 두 물체가 충돌하는 경우에 대한 연구로 Haug 등은<sup>(1)</sup> 구속 다물체계에 대한 충돌해석을 수행하였다. Haug 등은 적분시 충돌하는 시간을 예측하기 위해 짧은 적분시간 간격을 유지하거나 넓은 적분시간 간격을 유지하면서 충돌이 발생하는 근처에서 적분시간 간격을 줄이면서 충돌시간을 예측하였다. 충돌검사를 위해 짧은 적분시간 간격을 유지할 경우 계산상 효율성이 저하되고 넓은 적분시간 간격을 유지하면서 충돌발생 근처에서 적분시간을 줄이는 경우 적분 알고리즘이 복잡해진다. 이와 더불어 해석의 편의를 위해 두 물체가 충돌시 서로 간섭된량을 계산하여 충격력을 선형 및 비선형 스프링으로 모델링하는<sup>(3)</sup> 경우가 있다. 이 경우 충돌에 의한 계의 속도 증분을 구하기 위한 별도의 계산이 필요하다. 하지만 충돌지점과 충격력 크기의 정확한 계산이 어렵고 충돌하는 두 물체간의 반발계수

\* 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

\*\*\* 한국과학기술연구원 트라이볼로지 연구센터

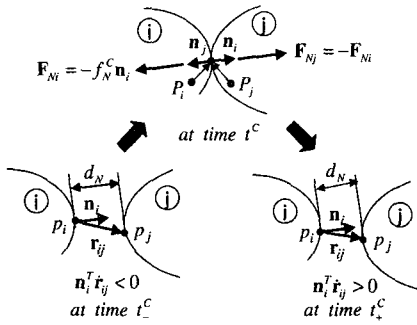


Fig. 1 Impact sequence between two bodies

(coefficient of restitution)를 고려하기 곤란한 단점을 지닌다. 또한 기존의 해석방법들에서 두 강체가 충돌시 두 강체상의 충돌지점의 계산을 위해 접촉 구속조건을 사용할 수 있으나 접촉 구속조건을<sup>(4)</sup> 도입할 경우 구속조건에 의해 자유도가 줄어들어 해석상 어려움이 야기된다.

본 연구에서는 Park 등에<sup>(5)</sup> 의해 제안된 다물체 동역학 해석방법을 이용하여 충돌하는 두 물체에 대한 해석방법을 제시한다. 충돌해석을 위해 제안된 해석 방법에서 충돌하는 두 물체는 탄성변형이 없는 강체이고 두 강체의 표면은 볼록(convex)하다는 가정을 두었다. 제안된 해석방법은 미지의 충격량의 계산뿐 아니라 최적화 기법을<sup>(6)</sup> 사용하여 자유도의 변화가 없고 최대 적분 시간 간격을 짧게 하지 않고도 충돌시간과 충돌지점을 계산할 수 있다. 세 개의 예제에 대한 해석을 통하여 제안된 해석 방법의 계산상 효율성과 해석방법의 유용성을 보였다.

## 2. 본 론

### 2.1 충돌시 속도증분치 계산

방정식 유도의 편의성을 위해 충격력에 의한 일반 작용력을 따로 고려하고 이를 편속도행렬을 이용한 동역학 해석방법에 적용하면 운동방정식은<sup>(5)</sup> 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} B^T M \\ \Phi_q \end{bmatrix} \{ \dot{q} \} = \begin{bmatrix} B^T (Q^0 + Q_N^C) \\ r \end{bmatrix} \quad (1)$$

위 식에서  $B$ ,  $M$ ,  $\dot{q}$ ,  $Q^0$ ,  $Q_N^C$  그리고  $\Phi_q$ 는 각각 편속도행렬, 질량행렬, 가속도, 충격하중을 제외한 외력에 의한 일반력 벡터, 충격하중에 의한 일반력 벡터 그리고 구속방정식의 자코비안 행렬을 나타낸다. 식 (1)에서  $\Phi_q \dot{q} = r$ 는 가속도 구속방정식<sup>(5)</sup> 의미한다. 두 물체가 충돌하는 경우 충돌하는 두 강체상의 충돌점에 충격력이 작용한다. Fig. 1은 두 강체  $i$ 와  $j$ 가 충돌직전 시간  $t_c^-$ , 충돌하는 순간에서의 시간  $t^c$ , 그리고 충돌직후의 시간  $t_c^+$ 에서의 강체들을 보여준다. 그림에서 점  $P_i$ 와  $P_j$ 는 각각 강체  $i$ 와 강체  $j$  상의 충돌점을 의미하고  $f_N^C$ 는 두 강체에 작용하는 충격력을 의미한다.  $n_i$ 와  $n_j$ 는 각각 충돌하는 순간 두 강체상의 충돌점  $P_i$ 와  $P_j$ 가 형성하는 접평면에 수직인 단위벡터를 나타내고 두 강체가 충돌하는 순간 두 물체가 접촉하게 되므로 수직인 두 벡터  $n_i$ 와  $n_j$ 는 서로 평행해야<sup>(4)</sup> 한다.  $r_{ij}$ 는 점  $P_i$ 에 대한 점  $P_j$ 의 상대 위치벡터를 나타내고  $d_N$ 는  $r_{ij}$ 와  $n_i$ 의 내적(dot product)을 의미한다. Fig. 1에 보여진 바와 같이 두 강체가 서로 충돌할 경우 점  $P_i$ 와 점  $P_j$ 에 가해지는 충격력의 크기는 동일하고 작용방향은 반대가 된다. 두 강체  $i, j$ 상의 충돌점  $P_i$ 와  $P_j$ 에 작용하는 충격력을 각각  $F_{Ni}$ ,  $F_{Nj}$ 라 하면  $F_{Ni}$ ,  $F_{Nj}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$F_{Ni} = -n_i f_N^C \quad (2)$$

$$F_{Nj} = -F_{Ni} \quad (3)$$

시간  $t^c$ 에서 두 강체가 서로 충돌할 경우 충격력  $f_N^C$ 는 다음과 같이 충격함수  $\delta(t-t^c)$ 로 표현될 수 있다.

$$f_N^C = p_N^C \delta(t-t^c) \quad (4)$$

여기서  $p_N^C$ 는 두 강체  $i$ 와  $j$ 에 가해진 충격량의 크기를 나타낸다. 충격력  $\mathbf{F}_{Ni}$ ,  $\mathbf{F}_{Nj}$ 에 의한 일반력벡터는 가상일원리에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \mathbf{r}_{P_i}^T \mathbf{F}_{Ni} + \delta \mathbf{r}_{P_j}^T \mathbf{F}_{Nj} \\ &= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_N^C \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\mathbf{Q}_N^C = (\mathbf{r}_{ij})_q^T \mathbf{n}_i p_N^C \quad (6)$$

식 (5)와 (6)에서  $\mathbf{r}_{P_i}$ ,  $\mathbf{r}_{P_j}$ , 그리고  $\mathbf{r}_{ij}$ 는 각각 점  $P_i$ , 점  $P_j$ 의 위치벡터와 점  $P_i$ 로부터 점  $P_j$ 로의 위치벡터를 의미하고  $(\mathbf{r}_{ij})_q$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$(\mathbf{r}_{ij})_q \equiv \frac{\partial(\mathbf{r}_{P_i} - \mathbf{r}_{P_j})}{\partial \mathbf{q}} \quad (7)$$

계의 속도 변화량은 식 (1)을 적분해 구할 수 있다. 먼저 식 (1)의 좌변 첫째 항을 부분적분을 이용하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} dt \\ &= \mathbf{B}^T \left\{ \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \Big|_{t_-^C}^{t_+^C} - \lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} dt \right\} \\ &= \mathbf{B}^T \mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} \equiv \dot{\mathbf{q}}(t_+^C) - \dot{\mathbf{q}}(t_-^C) \quad (9)$$

식 (8)에서  $\dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}$ 는 일반좌표와 일반속력만의 함수이므로  $\dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}$ 에 대한 적분은 0이 된다.  $t^C$ 는  $t_-^C < t^C < t_+^C$ 를 만족하고  $\Delta t^C$ 는  $t_+^C - t_-^C$ 를 의미한다. 또한 충격력을 제외한 외력에 의한 일반 작용력  $\mathbf{B}^T \mathbf{Q}^O$ 는 일반좌표와 일반속력만의 함수이므로 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}^O dt = 0 \quad (10)$$

식 (4)로부터 충격하중  $f_N^C$ 는 충격함수로 표현되므로  $\mathbf{B}^T \mathbf{Q}_N^C$ 를 적분하면 다음 같다.

$$\lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_N^C dt = \mathbf{B}^T (\mathbf{r}_{ij})_q^T \mathbf{n}_i p_N^C \quad (11)$$

가속도 구속방정식은 다음 식으로 처리된다.

$$\lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} dt = \lim_{\Delta t^C \rightarrow 0} \int_{t_-^C}^{t_+^C} \boldsymbol{\gamma} dt \quad (12)$$

위 식에서  $\boldsymbol{\gamma}$ 는 일반좌표와 일반속력만의 함수이므로 우변은 0이 된다. 식 (12)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_q(t^C) \Delta \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (13)$$

식 (8)~식 (13)로부터 속도변화량을 구하기 위한 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \\ \Phi_q \end{bmatrix} \{\Delta \dot{\mathbf{q}}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T (\mathbf{r}_{ij})_q^T \mathbf{n}_i p_N^C \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

충돌하는 다물체계의 거동을 표현하기 위해  $n$ 개의 좌표를 사용할 경우 식 (14)에서 풀어야하는 방정식의 개수  $n$ 에 비해  $n$ 개의  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ 와 1개의 충격량  $p_N^C$ 로 모두  $n+1$ 개의 미지수가 존재한다. 따라서 식 (14)를 풀기 위해서는 한 개의 방정식을 더 필요로 한다. 나머지 한 개의 방정식은 다음과 같은 반발계수  $e$ 를 도입함으로써 구할 수 있다.

$$e = - \frac{v_N(t_+^C)}{v_N(t_-^C)} \quad (15)$$

또는

$$v_N(t_+^C) = -e v_N(t_-^C) \quad (16)$$

위 식에서  $v_N$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$v_N \equiv \mathbf{n}_i^T \dot{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{n}_i^T (\dot{\mathbf{r}}_{ij})_q \dot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

식 (17)에서  $(\dot{\mathbf{r}}_{ij})_q$ 는 holonomic 계에 대해 아래 식을<sup>(7)</sup> 만족한다.

$$(\dot{\mathbf{r}}_{ij})_q = (\mathbf{r}_{ij})_q \quad (18)$$

식 (17)과 식 (18)을 식 (16)에 대입하면 식 (16)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$d_N^q \dot{\mathbf{q}}(t_+^C) = -e d_N^q \dot{\mathbf{q}}(t_-^C) \quad (19)$$

여기서

$$d_N^q \equiv \mathbf{n}_i^T (\mathbf{r}_{ij})_q \quad (20)$$

위 식의 양변에  $d_N^q \mathbf{q}(t_-^C)$ 를 빼면 식 (19)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d_N^q \Delta \dot{\mathbf{q}} = -(1+e) d_N^q \dot{\mathbf{q}}(t_-^C) \quad (21)$$

속도 증분치  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ 를 구하기 위해 식 (14)와 식 (21)은 다음과 같은 선형방정식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} B^T M & -B^T d_N^q \\ \Phi_a & 0 \\ d_N^q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ d_N^q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1+e) d_N^q \dot{\mathbf{q}}(t_-^C) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

### 2.2 두 강체의 충돌 판단 및 두 강체상의 충돌 지점 계산

충돌해석 수행시 식 (22)를 사용하여 계를 구성하는 강체의 속도 변화량을 계산하기에 앞서 언제 충돌이 발생하는지와 충돌발생시 강체상의 어느 점에서 충돌하는지를 계산하는 것이 필요하다. Fig. 2는 두 강체상의 충돌 가능성을 지닌 두 점  $P_i$ 와  $P_j$ 를 보여준다. 그림에서  $\mathbf{s}_i$ 와  $\mathbf{s}_j$ 는 각각 강체  $i$ 와 강체  $j$ 에 고정된 좌표계의 원점으로부터 점  $P_i$ 와  $P_j$ 로의 위치벡터를 의미한다.

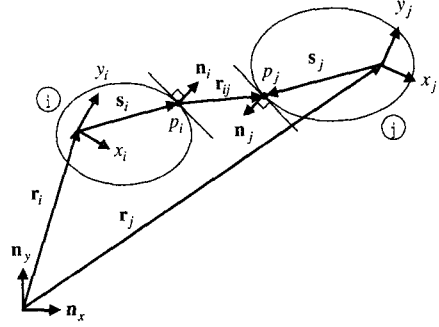


Fig. 2 Relative position vector between two possible contacting points

두 강체가 충돌할 경우 각 강체상의 충돌점에서의 수직 단위벡터들은 평행해야 한다. 본 연구에서는 충돌할 가능성을 지닌 점들을 계산하기 위해 Fig. 2에서와 같이 두 강체상에 존재하는 점들로 각 강체상의 점들에서 수직벡터들이 서로 평행하면서 두 점의 거리가 가장 가까운 점  $P_i$ 와  $P_j$ 를 찾는다. 이를 최적화 문제로 공식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min. } F &= \mathbf{r}_{ij}^T \mathbf{r}_{ij} \\ \text{subject to} \\ \phi_1 &= \mathbf{g}_i(\mathbf{s}_i) = 0 \\ \phi_2 &= \mathbf{g}_j(\mathbf{s}_j) = 0 \\ \phi_3 &= \tilde{\mathbf{n}}_i \mathbf{n}_j = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

위 식에서  $\mathbf{s}_i$ 와  $\mathbf{s}_j$ 는 각각 벡터  $\mathbf{s}_i$ 와  $\mathbf{s}_j$ 의 강체  $i$ 와 강체  $j$ 에 고정된 좌표계에 대해 표현된 벡터를 의미하고  $\mathbf{g}_i$ 와  $\mathbf{g}_j$ 는 각각 강체  $i$ 와 강체  $j$ 의 표면의 방정식을 의미한다.  $\tilde{\mathbf{n}}_i$ 는 수직벡터  $\mathbf{n}_i$ 의 교대행렬(skew symmetric matrix)을 나타낸다. 식 (23)의 최적화 문제를 풀기 위한 설계변수들로  $\mathbf{s}_i$ 와  $\mathbf{s}_j$ 를 선정하였다. Fig. 3은 충돌 검사시간  $t^k$ 와 시간  $t^{k+1}$  사이에서 충돌이 발생하는 경우를 보여준다. 그림에서 점  $P_i$ 와  $P_j$ 는 식 (23)으로 공식화된 최적화 문제를 매 순간마다 풀어 구한 강체  $i$ 와  $j$ 상의 점들을 의미한다. 그림에서 보인 바와 같이 시간  $t^k$ 와

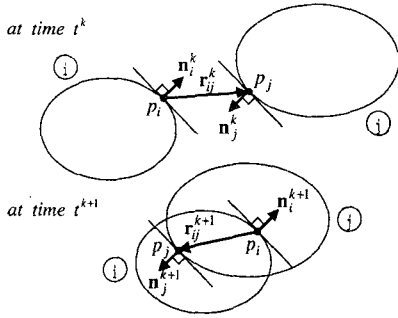


Fig. 3 Collision checking

$t^{k+1}$  사이에서 발생한다고 가정하면 시간  $t^{k+1}$ 에서의 상대변위  $r_{ij}^{k+1}$ 와  $n_i^{k+1}$ 의 방향은 거의 반대방향이 된다. 이를 공식화하면 다음과 같다.

$$d_N^{k+1} = (r_{ij}^{k+1})^T n_i^{k+1} \leq 0 \quad (24)$$

충돌하지 않는 경우는 위의 충돌하는 경우와는 달리  $r_{ij}^{k+1}$ 과  $n_i^{k+1}$  거의 동일한 방향을 가지게 되어 아래의 식을 만족하게 된다.

$$d_N^{k+1} = (r_{ij}^{k+1})^T n_i^{k+1} > 0 \quad (25)$$

임의의 시간  $t^{k+1}$ 에서 두 물체간에 충돌이 발생했는지를 판별하기 위해 식 (24)와 식 (25)를 이용할 수 있다. 유도된 운동방정식으로부터 계를 구성하는 강체들의 위치 및 속도 성분을 구하기 위해 적분기를 사용할 경우 일반적으로 적분 시간은 충돌하는 시간과 일치하지 않는다. 충돌 해석을 정확히 수행하기 위해서 충돌이 발생하는 시간을 예측하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 충돌이 발생하는 시간을 예측하기 위해  $k+1$ 번째 충돌 검사시간  $t^{k+1}$ 와 시간  $t^{k+1}$ 에서의 점  $P_i, P_j$ 의 수직거리  $d_N^{k+1}$ 를 Table 1과 같이 각각  $m$ 개씩의 크기를 갖는 큐(queue)에<sup>(8)</sup> 저장하고 충돌판별식 (24)를 만족하는 경우 배열에 저장된  $d_N^i$ 를  $t^i$ 에 대해 내삽(interpolation)하여  $d_N(t)$ 를 구한다. 내삽된  $d_N(t)$ 로부터  $d_N(t^C)=0$ 를 만족하는 시간  $t^C$ 를 계산한다. 충돌시간  $t^C$ 가 계

Table 1 Queues for time  $t$  and distance  $d_N$

$t^i$	$t^{k-m+2}$	$t^{k-m+3}$	...	$t^k$	$t^{k+1}$
$d_N^i$	$d_N^{k-m+2}$	$d_N^{k-m+3}$	...	$d_N^k$	$d_N^{k+1}$

산된 후 시간  $t^C$ 에서의 충돌점을 계산하기 위해 접촉 구속방정식을 사용할 수도 있다. 그러나 이 경우 접촉 구속방정식에 의해 자유도가 1개 줄어들고 자유도가 감소함에 의해 독립좌표중 하나가 종속좌표로 포함되고 독립좌표중 어떤 좌표를 종속좌표로 선정할 것인가에 대한 문제가 야기된다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 없애기 위해서 식 (23)을 이용하여 접촉점을 계산한다.

### 2.3 수치해석 알고리즘

**step 1:** 적분을 수행하면서 매 충돌 검사시간마다 식 (24)와 식 (25)를 이용하여 충돌이 발생하는지 검사하고 충돌 검사시간  $t^k$ 에서의  $d_N^k$ 와  $t^k$ 를 큐에 저장한다. 식 (24)를 만족하면 step 2를 수행하고 식 (25)를 만족하면 step 4를 수행한다.

**step 2:**  $d_N^k$ 를 시간  $t$ 에 대해 내삽하고 내삽된  $d_N(t)$ 로부터  $d_N(t^C)=0$ 이 되는 시간  $t^C$ 를 계산한 후 시간  $t^{k-1}$ 로부터  $t^C$ 까지 다시 적분을 수행하여  $q(t^C)$ 와  $\dot{q}(t^C)$ 를 구한다. step 3을 수행한다.

**step 3:** 시간  $t^C$ 에서 식 (22)를 풀어서 속도 변화량  $\Delta \dot{q}(t^C)$ 을 구한다. 시간  $t^C$ 에서의 속도를 아래 식으로부터 구한 후 step 4를 수행한다.

$$\dot{q}(t_+^C) = \dot{q}(t^C) + \Delta \dot{q}(t^C) \quad (26)$$

**step 4:** 적분시간이 최종 적분시간을 넘으면 해석을 종료한다. 적분시간이 적분구간내에 있을 경우 step 1을 다시 수행한다.

## 3. 수치 예제

### 3.1 슬라이드 크랭크 기구

Fig. 4는 슬라이드 크랭크 기구와 슬라이드를 보여준다. 그림에서  $n_1, n_2$ 는 지면에 고정된

좌표계의 직교 단위벡터들을 의미한다. 지면과 강체 ①, 강체 ①과 강체 ②, 그리고 강체 ②와 강체 ③은 각각 회전 조인트들로 연결되어 있고 지면과 강체 ③ 그리고 지면과 강체 ④는 병진 조인트들로 연결되어 있다. 계에 작용하는 외력으로는 중력이  $n_2$  반대 방향으로 작용하고 중력가속도는  $9.81m/sec^2$ 의 크기를 갖는다. Table 2는 해석에 사용된 계의 관성특성치와 위치 및 속도의 초기치를 나타낸다. 표에서  $m_i, J_i$  ( $i=1,2,3,4$ )는 각각 강체  $i$ 의 질량과 질량 관성모멘트를 의미하고  $r_i, \dot{r}_i, \theta_i$ , 그리고  $\dot{\theta}_i$ 는 각각 강체  $i$ 의 위치, 속도, 자세각 그리고 각 속도를 의미한다. 강체 ③과 ④의 표면의 방정식

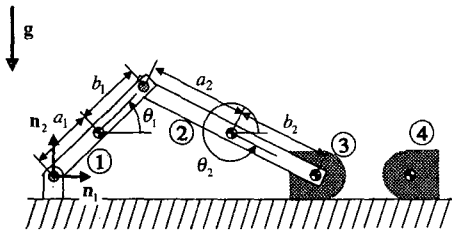


Fig. 4 Slider crank colliding with a sliding body

Table 2 Inertia properties and Initial values of example 1

Inertia properties	
$m_1, J_1$	2.0 [kg], 1.0 [kg·m <sup>2</sup> ]
$m_2, J_2$	3.0 [kg], 2.0 [kg·m <sup>2</sup> ]
$m_3, J_3$	4.0 [kg], 1.0 [kg·m <sup>2</sup> ]
$m_4, J_4$	5.0 [kg], 1.0 [kg·m <sup>2</sup> ]
Initial values	
$r_1, \theta_1$	[1.299 0.750] <sup>T</sup> [m], 0.524 [rad]
$\dot{r}_1, \dot{\theta}_1$	[-0.750 1.299] <sup>T</sup> [m/sec], 1.000 [rad/sec]
$r_2, \theta_2$	[4.452 0.750] <sup>T</sup> [m], -0.384 [rad]
$\dot{r}_2, \dot{\theta}_2$	[-2.025 1.299] <sup>T</sup> [m/sec], -0.701 [rad/sec]
$r_3, \theta_3$	[6.306 0.000] <sup>T</sup> [m], 0.000 [rad]
$\dot{r}_3, \dot{\theta}_3$	[-2.551 0.000] <sup>T</sup> [m/sec], 0.000 [rad/sec]
$r_4, \theta_4$	[7.000 0.000] <sup>T</sup> [m], 0.000 [rad]
$\dot{r}_4, \dot{\theta}_4$	[0.000 0.000] <sup>T</sup> [m/sec], 0.000 [rad/sec]

Table 3 CPU Time ratio

$\Delta t$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
CPU time ratio	1.000	1.223	2.569	3.884	15.571

은 각각 강체에 고정된 좌표계의 원점을 중심으로 0.1m의 반경을 갖는 반원의 방정식으로 표현된다. Fig. 5는 반발계수  $e=0.8$ 일 때 강체 ③의 시간에 따른 횡방향 속도를 보여준다. 그림에서 PROPOSED는 본 연구를 통해 제안된 해석방법에 의한 해석결과로 최대 적분시간 간격 0.1sec에 대한 해석결과를 나타내고  $\Delta t = \tau$  ( $\tau=0.1, 0.01, 0.001sec$ )는 최대 적분시간 간격  $\tau$ 를 유지하는 기존의 해석방법에<sup>(1)</sup> 의한 해석결과를 나타낸다. Fig. 6은 3.0초 근처에서 Fig. 5의 확대된 그림을 보여준다. 해석결과로부터 제안된 해석방법의 해석결과가 최대 적분시간 간격이 가장 짧은 경우와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Table 3은 최대 적분 시간 간격에 따른 해석에 사용된 계산 시간비를 보여준다. 최대 적분 시간 간격이 줄어들어 따라 계산시간은 크게 증가됨을 알 수 있다. 이상의 해석결과들로부터 제안된 해석방법을 충돌해석에 사용할 경우 기존의 방법에 비해 최대 적분시간 간격을 증가시킬 수

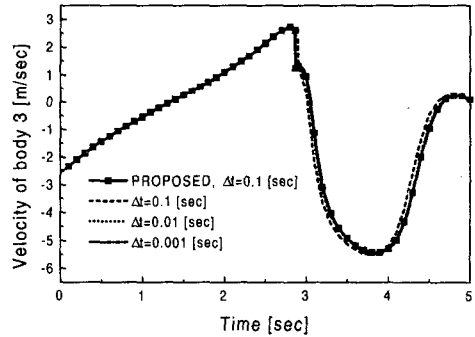


Fig. 5 Velocity of body 3 mass center

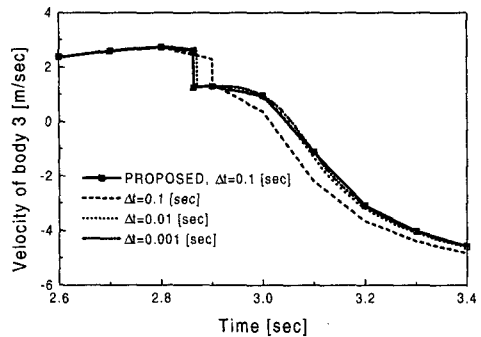


Fig. 6 Magnified plot near 3.0sec

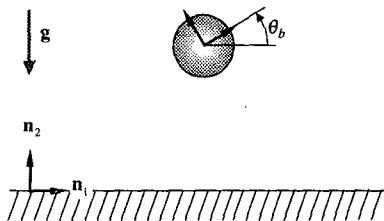


Fig. 7 Ball colliding with ground

Table 4 Inertia properties and Initial values of example 2

Inertia properties	
$m_b, J_b$	$1.0 [kg], 0.4 [kg \cdot m^2]$
Initial values	
$r_b, \theta_b$	$[0.000 \ 1.000]^T [m], 0.000 [rad]$
$\dot{r}_b, \dot{\theta}_b$	$[0.100 \ 0.000]^T [m/sec], 0.000 [rad/sec]$

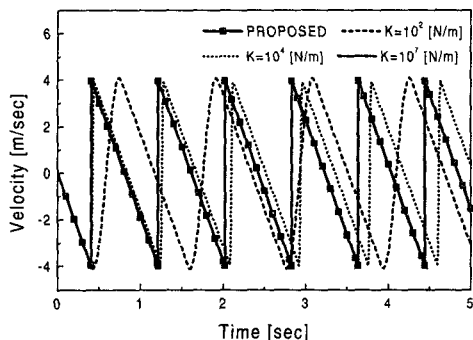


Fig. 8 Vertical velocity of ball

있고 해석결과는 최대 적분시간 간격이 짧은 경우와 동일한 해석결과를 가짐을 알 수 있다.

### 3.2 지면과 충돌하는 공

Fig. 7은 지면과 충돌하는 공을 보여준다. 계에 작용하는 외력으로는 중력이  $n_2$ 의 반대 방향으로 작용하고 중력가속도는  $9.81m/sec^2$ 의 크기를 갖는다. Table 4는 해석에 사용된 공의 관성특성치와 위치 및 속도의 초기치를 나타낸다. 표에서  $m_b, J_b$ 는 각각 공의 질량과 질량 관성모멘트를 의미하고  $r_b, \dot{r}_b, \theta_b$  그리고  $\dot{\theta}_b$ 는 각각 공의 위치, 속도, 자세각, 그리고 각속도를 의

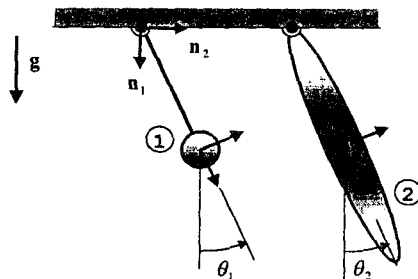


Fig. 9 Two pendulums

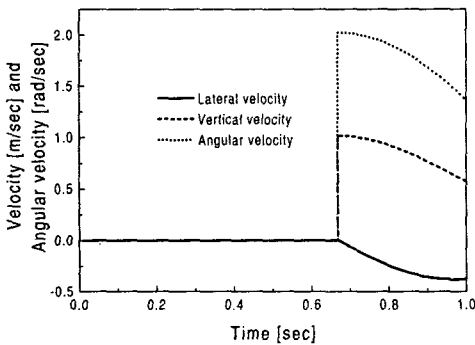
미한다. 공의 표면은 질량중심을 원점으로 하고  $0.2m$ 의 반경을 갖는 원의 방정식으로 표현된다. Fig. 8은 충돌해석을 위해 공과 지면과의 접촉력을 탄성계수  $K$ 를 갖는 선형 스프링으로 모델링한 경우<sup>(3)</sup> 탄성계수에 따른 공의 수직방향 속도와 본 연구를 통해 제안된 해석방법에 의한 결과를 보여준다. PROPOSED는 최대 적분시간 간격으로  $0.1 \text{ sec}$  그리고 반발계수로  $1.0$ 을 사용한 경우 제안된 해석방법에 의한 해석결과를 나타낸다. 해석결과로부터 강성계수가 가장 큰 경우와 제안된 해석방법에 의한 해석결과가 거의 일치함을 알 수 있다. 하지만 강성계수의 증가는 계의 운동방정식을 수치적으로 stiff하게<sup>(3)</sup> 만들고 이로 인해 수치적분의 실패와 같은 해석상 어려움이 야기된다. 또한 충격력을 스프링과 댐퍼로 모델링 할 경우 완전탄성 충돌이 아닌 경우에 대한 해석의 수행에 스프링의 강성계수와 댐퍼의 감쇠계수의 선정에 어려움을 지닌다.

### 3.3 두 개의 단진자

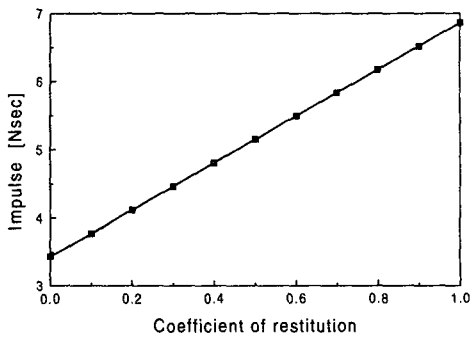
Fig. 9는 두 개의 단진자로 구성된 계를 보여준다. 지면과 강체 ①, 지면과 강체 ②는 회전 조인트들로 연결되어 있다. 계에 작용하는 외력으로는 중력이  $n_1$  방향으로 작용하고 중력가속도는  $9.81m/sec^2$ 의 크기를 갖는다. Table 5는 해석에 사용된 계의 관성특성치와 위치 및 속도의 초기치를 나타낸다. 강체 ①의 표면은 질량중심을 원점으로 하고  $0.1m$ 의 반경을 갖는 원의 방정식으로 표현된다. 강체 ②의 표면은 질량중심을 원점으로 하고  $0.5m$ 의 장반경과  $0.1m$ 의 단반경을 갖는 타원의 방정식으로 표현된다. Fig. 10은 강체 ②의 속도 및 각속도를 보여준다. 해석 결과로부터 시간  $0.67$ 초에서 두 강체가 충

**Table 5** Inertia properties and Initial values of example 3

Inertia properties	
$m_1, J_1$	1.0 [kg], 0.3 [kg·m <sup>2</sup> ]
$m_2, J_2$	2.0 [kg], 1.0 [kg·m <sup>2</sup> ]
Initial values	
$r_1, \theta_1$	[0.000 -0.500] <sup>T</sup> [m], -1.571 [rad]
$\dot{r}_1, \dot{\theta}_1$	[0.000 0.000] <sup>T</sup> [m/sec], 0.000 [rad/sec]
$r_2, \theta_2$	[0.500 0.300] <sup>T</sup> [m], 0.000 [rad]
$\dot{r}_2, \dot{\theta}_2$	[0.000 0.000] <sup>T</sup> [m/sec], 0.000 [rad/sec]



**Fig. 10** Velocity and angular velocity of body 2



**Fig. 11** Impulse vs. coefficient of restitution

돌하고 충돌에 의해 속도와 각속도의 갑작스런 변화가 생김을 알 수 있다. Fig. 11은 반발계수의 변화에 따른 충격량의 변화를 보여준다. 해석 결과로부터 충격량은 반발계수에 비례함을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 편속도행렬을 이용한 다물체 동역학 해석방법에 적용 가능한 충돌하는 두 물체에 대한 해석방법을 제시하였다. 제안된 해석방법은 미지의 충격량의 계산뿐 아니라 최적화 기법을 사용하여 자유도의 변화없이 충돌점들을 계산할 수 있고 최대 적분시간 간격을 짧게 하지 않고도 충돌시간과 충돌지점을 계산할 수 있어 기존의 해석방법에 비해 계산상 효율성과 해의 정확성을 갖는다. 수치예제를 통해 제안된 방법이 기존의 방법들에 비해 계산상 효율성과 해의 정확성을 지님을 보였다.

참고문헌

- (1) Wu, S. C., Yang, S. M., and Haug, E. J., 1984, *Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Stiction, Impact, and Constraint Addition-deletion*, Technical Report N0. 84-19.
- (2) 김상국, 박정훈, 유홍희, 1998, “충격하중을 받는 시스템의 케인 방법을 이용한 다물체 동역학 해석,” 자동차공학회 논문집, 제6권, 제3호, pp. 169~176.
- (3) ADAMS/View manual (version 8.0), 1994, *Mechanical Dynamics*.
- (4) 박정훈, 유홍희, 황요하, 1998, “접촉하는 두 강체 사이에서의 접촉력 계산을 위한 동역학 해석 알고리즘,” 대한기계학회 1998년도 춘계학술대회논문집(A), pp. 560~565.
- (5) 박정훈, 유홍희, 황요하, 배대성, 1997, “케인 방법을 이용한 구속 다물체계의 동역학 해석,” 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제12호, pp. 2156~2164.
- (6) Vanderplaats, G. N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company.
- (7) Rosenberg, R. M, 1977, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press.
- (8) 이용현, 1997, “기계시스템의 동적 거동 해석을 위한 그래프 이론을 이용한 변환기의 개발,” 한양대학교 대학원 석사학위논문.