

직사각형 MEMS 판 구조의 리츠 해석 (I)

- 수식화 및 수치해법 -

이 병 채* · 김 은 석**
(1999년 4월 16일 접수)

Ritz Analysis of Rectangular MEMS Structures (I)

- Formulation and its Implementation -

Byung Chai Lee and Eun Sok Kim

Key Words: MEMS Structure(극미세기계구조), Ritz Method(리츠 방법), Multi-Layered Plate(다층 판), Deformation Coupling(변형의 연성), Residual Stress(잔류응력)

Abstract

We apply the Rayleigh Ritz method to analyze multi-layered plates with residual stresses. The method is very simple, straight forward, and easily programmable, but it should be applied to structures only in simple shapes. We derive coupled variational equations based on the principle of virtual displacement, and investigate what kind of basis functions is desirable for the analysis of rectangular plates with various boundary conditions. We demonstrate the effectiveness and usefulness of the method through several examples. The analysis results obtained with the method are in good agreement with those available in literature. A multi-layered MEMS plate example shows that the coupling effect should not be ignored and that residual stresses do influence the stiffness of the structure very much.

1. 서 론

전기-기계적 극미세 구조(Microelectromechanical system)의 설계 및 제작은 최근 많은 관심의 대상이 되고 있다. 일반적으로 MEMS 구조는 비교적 형상이 단순한 다층 판구조라는 면에서 복합재료와 유사하다. 그러나, 보통의 복합재료와는 달리 MEMS 판 구조는 보통 기하학적 중심면에 대해 어떤 대칭성도 가지고 있지 않다. 또, MEMS 판 구조는 하중 지지 역할보다는 적당한 운동과 변형을 통한 기능 수행이 더 중요하다. 이러한 구조의 합리적인 설계를 위해 단순 형상에 적합하며 일반적인 다층 구조를 잘 다룰 수 있고 응력 및 변형을 효과적으로 구할 수 있는 해석 기법이

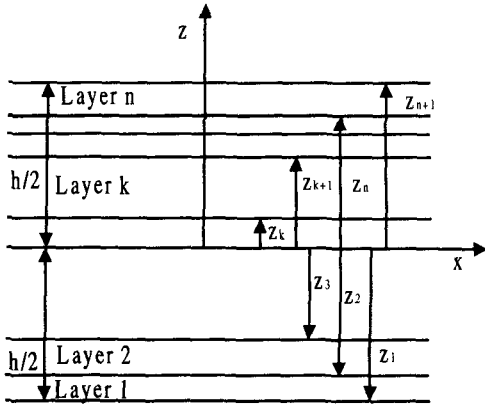
요구된다. 이러한 요구에 잘 부응하는 해석 기법이 리츠(Rayleigh Ritz)의 근사해석 기법이다. 본 논문에서는 이 방법을 다층 MEMS 판 구조에 적용할 수 있도록 기본적인 수식을 유도하고 실제 계산시 필요한 세부사항을 검토한다. 또, 프로그램을 개발하여 몇가지 수치예를 풀고 결과를 검증한다.

일반적인 다층판에서 쌓는 판의 푸아송 비가 층마다 다른 경우 한 방향으로의 인장이 서로 다른 횡방향 압축 변형을 유발해 판의 굽힘 변형이 일어나게 된다.^(1,2) 이러한 연성이 있는 경우에 대한 유한요소 해석은 복잡하다. 삼차원 요소를 이용하면 엄밀하게 해석할 수 있겠으나 계산량이 막대하게 소요된다.

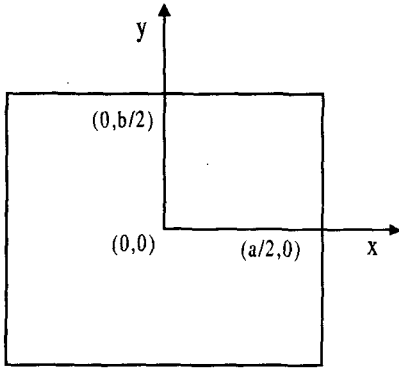
리츠의 해석 기법은 단층 및 다층 판의 경우 많이 사용되어 온 전통적인 기법이며 수식화가 간단하며 프로그램하기도 쉽다.⁽³⁾ 변형이 연성되어 있는 경우도 어려움 없이 다룰 수 있으며 응력도 각점에서 쉽게 구할 수 있다. 형상과 경계 조건이 단순한 경우로 한정된다는 것이 큰 단점

* 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : bclee@syz713.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3031 FAX : (042)869-3210

** 미국 하와이대학교 전기공학과



(a)



(b)

Fig. 1 Cross-sectional View(a) and Top View(b) of a Multi-layered Rectangular Plate. The coordinate system used in the analyses is depicted in (b)

이나 MEMS 판 구조의 형상이 비교적 단순한 것을 고려하면 오히려 적절한 방법이라 할 수 있다. 또, 후속 연구를 통해 단순지와 고정지 중간 정도인 경계 조건의 처리, 다중 영역 다적층 판 해석, 비선형 해석 등으로 확장하면 유용한 도구가 될 수 있을 것이다.

본 논문에서는 횡 전단 변형을 무시할 수 있는 임의 적층 다층판에 등가 단층 이론과 가상변위의 원리를 적용하여 변분 수식을 유도한다. 변위장을 기저함수의 선형 결합으로 근사하여 변분식

에 대입하면 선형연립방정식을 얻을 수 있고 이를 풀어 변위장을 구한다. 몇가지 종류의 기저함수 집합을 고려하여 다층판 해석에 적합한 기저함수를 선정하고 수치예를 통해 본 방법의 특성과 효율성을 보인다.

2. 다층판의 변분 수식화

본 내용은 비등방성 다층판을 다룬 교과서^(1,2)에서 찾아볼 수 있으나 논문의 완결성을 위해 가능한 한 단순하게 핵심 내용만 수식과 함께 기술한다.

전체 두께가 h 인 직사각형 판을 대상으로 하며 일반적으로 직교 이방성을 가진 n 개의 층으로 이루어져 있으며 좌표계를 Fig. 1과 같이 정의한다. 여기서 xy 평면은 판 두께 방향의 기하학적 중심면이며 이 면에 수직인 방향을 z 축으로 한다. 판의 크기는 가로 a , 세로 b 이다. 재료는 선형 탄성 재료로 가정한다. 또, 각층에 초기응력이나 초기 변형을 고려한다.

MEMS 판 구조는 수명보다는 기능이 더 중요하고 층간 분리에 의한 파손이 큰 문제가 아니므로 삼차원 탄성이론이나 두께방향 전단을 고려하지 않고 등가 단층 이론에 따라 수식화한다. 변형에너지를 U , 외력에 의한 포텐셜 에너지 변화량을 V , 운동에너지를 K 라 표현하면 고체의 평형 상태를 구할 수 있는 가상 일의 원리는 다음과 같다.

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (1)$$

여기서 T 는 시간 종속 문제의 끝 시점, $\delta(\cdot)$ 은 해당 물리량의 일차 변분량을 나타낸다. 전단을 무시하는 Kirchhoff 가정과 등가 단층 (equivalent single layer) 이론을 적용할 때, 판의 변위장은 다음과 같이 표현된다.

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (4)$$

여기서 (u_0, v_0, w_0) 은 xy -평면에 있는 질점의 해당 좌표 방향으로의 변위를 나타낸다. 이 변위장을 미분하여 변형률을 얻을 수 있는데 판의 특성상 소변형, 보통의 회전을 가정한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &= \epsilon_{xx}^{(0)} + z \epsilon_{xx}^{(1)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ &\quad - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{(0)} + z \gamma_{xy}^{(1)}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &= \epsilon_{yy}^{(0)} + z \epsilon_{yy}^{(1)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0 \quad (8)$$

이 식에서 상첨자 (0)은 단면의 중심인 xy -평면에서의 변형률을 나타내고 상첨자 (1)은 단면에서 선형으로 변하는 변형률을 나타낸다. 이 변형률은 일반적인 비선형 변형률에서 판에 수직인 w 변위의 일차미분의 곱은 무시하지 않은 변형률이다.

판을 구성하고 있는 각층의 두께는 판의 다른 특성 길이에 비해 상당히 작기 때문에 각층의 응력 상태를 평면 응력 상태로 가정할 수 있으며 이 때 각 층의 응력-변형률 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy} - \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 \\ \sigma_{yy}^0 \\ \sigma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서 상첨자 (0)은 초기응력 혹은 초기 변형률을 의미하며 초기변형률에는 온도차에 의한 변형률을 포함시킬 수 있다. 가상일의 원리인 식 (1)의 각 항은 다음과 같이 정의된다.

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz dx dy \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \delta V &= - \int_{\Omega_0} (q_b(x, y) + q_t(x, y)) \delta w(x, y) dx dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_F} \int_{-h/2}^{h/2} (\overline{\sigma_{nn}} \delta u_n + \overline{\sigma_{ns}} \delta u_s + \overline{\sigma_{nz}} \delta w) dz ds \end{aligned} \quad (11)$$

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dz dx dy \quad (12)$$

여기서 q_b 와 q_t 는 판의 상면과 하면에 작용하는 분포하중이며 $(\overline{\sigma_{nn}}, \overline{\sigma_{ns}}, \overline{\sigma_{nz}})$ 은 하중이 주어진 경계 Γ_F 에서의 응력벡터이다. 방향 n 은 경계에 수직인 방향, 방향 s 는 경계를 따라 가는 방향, 방향 z 는 두께 방향이다. ρ_0 는 판 구성재료의 밀도이며 Ω_0 은 판의 기하학적 중심면을 나타낸다. 등가 단층이론에 따라 두께 방향의 적분을 수행하면 식 (10)-(12)은 다음과 같이 합력벡터와 중심면의 물리량으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} (N_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(0)} + N_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(0)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)}) dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_0} (M_{xx} \delta \epsilon_{xx}^{(1)} + M_{yy} \delta \epsilon_{yy}^{(1)} + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)}) dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_0} (\overline{N_{xx}^0} \delta \epsilon_{xx}^{(0)} + \overline{N_{yy}^0} \delta \epsilon_{yy}^{(0)} + \overline{N_{xy}^0} \delta \gamma_{xy}^{(0)}) dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_0} (\overline{M_{xx}^0} \delta \epsilon_{xx}^{(1)} + \overline{M_{yy}^0} \delta \epsilon_{yy}^{(1)} + \overline{M_{xy}^0} \delta \gamma_{xy}^{(1)}) dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \delta V &= - \int_{\Gamma_F} \overline{Q_n} \delta w_0 ds - \int_{\Omega_0} q \delta w_0 dx dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_F} (\overline{N_{nn}} \delta u_{0n} + \overline{N_{ns}} \delta u_{0s} - \overline{M_{nn}} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - \overline{M_{ns}} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s}) ds \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_{\Omega_0} I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0) dx dy \\ &\quad - \int_{\Omega_0} I_1 (\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \delta \dot{v}_0 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y}) dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_0} I_2 (\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y}) dx dy \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $q = q_b + q_t$ 이며, $N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz$ 을.

$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz$ 을, $I_k = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 z^k dz$ 을 나타낸다. 또, 초기응력, 초기변형률, 및 외력에 의한 합력벡터들은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \overline{N_{xx}^0} \\ \overline{N_{yy}^0} \\ \overline{N_{xy}^0} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 \\ \sigma_{yy}^0 \\ \sigma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \right) dz \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{M_{xx}^0} \\ \overline{M_{yy}^0} \\ \overline{M_{xy}^0} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 \\ \sigma_{yy}^0 \\ \sigma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \right) z dz \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{N_{nn}} \\ \overline{N_{ns}} \\ \overline{Q_n} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \overline{\sigma_{nn}} \\ \overline{\sigma_{ns}} \\ \overline{\sigma_{nz}} \end{bmatrix} dz \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{M_{nn}} \\ \overline{M_{ns}} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \overline{\sigma_{nn}} \\ \overline{\sigma_{ns}} \end{bmatrix} z dz \quad (19)$$

외력경계의 중심면에서 법선 및 접선 방향 변위를 각각 u_{0n} 과 u_{0s} 로 나타낸다.

가상변형률은 가상변위로부터 구할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\delta \varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \quad (20)$$

$$\delta \varepsilon_{yy}^{(0)} = \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \quad (21)$$

$$\delta \gamma_{xy}^{(0)} = \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \quad (22)$$

$$\delta \varepsilon_{xx}^{(1)} = -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$\delta \varepsilon_{yy}^{(1)} = -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \quad (24)$$

$$\delta \gamma_{xy}^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \quad (25)$$

등가 단층이론에 따라 두께 방향의 변화를 각 층에 대해 적분하면 가상일에 표현된 합력벡터와 변형률의 관계가 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서 A_{ij} 는 등가면내강성, D_{ij} 는 등가굽힘강성, B_{ij} 는 면내와 굽힘 연성강성을 나타내며 다음과 같이 k 번째층의 평면응력 재료상수 $Q_{ij}^{(k)}$ 를

두께 방향으로 적분하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} dz \\ &= \sum_{k=1}^n Q_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} z dz \\ &= \sum_{k=1}^n Q_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2)/2 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} z^2 dz \\ &= \sum_{k=1}^n Q_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)/3 \end{aligned} \quad (30)$$

3. 근사해석

리츠 방법을 적용하기 위해 각 좌표 방향의 기저함수를 f_j , h_j , 또 g_j 라 하고 면내변형 근사항수를 n_p 면외변형 근사항수를 n_w 라 하면 기하학적 중심면에서의 각 방향 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$u_0(x, y) = \sum_{j=1}^{n_p} C_{uj} f_j(x, y) \quad (31)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{j=1}^{n_p} C_{vj} h_j(x, y) \quad (32)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{j=1}^{n_w} C_{wj} g_j(x, y) \quad (33)$$

여기서 C_{uj} , C_{vj} , 와 C_{wj} 는 미지의 선형결합상수이다. 변위 근사식과 이의 일차변분량인 가상변위를 가상일의 원리에 대입하면 연립방정식을 얻을 수 있으나 문제를 간단히하기 위해 소변형 가정을 적용하여 결합상수의 이차 이상 항들을 무시한다. 또, 일반적으로 MEMS 판 구조에서 재료의 주축이 구조의 주축과 일치한다는 점과 일반적인 직교이방성 재료 보다는 평면에서는 등방성을 지니고 수직방향으로 직교이방성을 가진 재료를 많이 이용한다는 점을 고려하여 식을 보다 간단히 표현하기 위해 Q_{16} 와 Q_{26} 를 영으로 하였다. 얻어진 연립방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{n_x} [C_{uk}(A_{11}\langle f_{k,x}, f_{i,x} \rangle + A_{66}\langle f_{k,y}, f_{i,y} \rangle)] \\
 + & \sum_{k=1}^{n_x} [C_{uk}(A_{12}\langle h_{k,y}, f_{i,x} \rangle + A_{66}\langle h_{k,x}, f_{i,y} \rangle)] \\
 - & \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk}(B_{11}\langle g_{k,xx}, f_{i,x} \rangle + B_{12}\langle g_{k,yy}, f_{i,x} \rangle) \quad (34) \\
 + & 2B_{66}\langle g_{k,xy}, f_{i,y} \rangle + \langle \overline{N_{xx}^0}, f_{i,x} \rangle + \langle \overline{N_{xy}^0}, f_{i,y} \rangle \\
 - & \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk} I_0 \omega^2 \langle f_k, f_i \rangle + \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk} I_1 \omega^2 \langle g_{k,x}, f_i \rangle \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{n_x} [C_{uk}(A_{12}\langle f_{k,x}, h_{i,y} \rangle + A_{66}\langle f_{k,y}, h_{i,x} \rangle)] \\
 + & \sum_{k=1}^{n_x} [C_{uk}(A_{22}\langle h_{k,y}, h_{i,y} \rangle + A_{66}\langle h_{k,x}, h_{i,x} \rangle)] \\
 - & \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk}(B_{12}\langle g_{k,xx}, h_{i,y} \rangle + B_{22}\langle g_{k,yy}, h_{i,y} \rangle) \quad (35) \\
 + & 2B_{66}\langle g_{k,xy}, h_{i,x} \rangle + \langle \overline{N_{xx}^0}, h_{i,y} \rangle + \langle \overline{N_{xy}^0}, h_{i,x} \rangle \\
 - & \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk} I_0 \omega^2 \langle h_k, h_i \rangle + \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk} I_1 \omega^2 \langle g_{k,y}, h_i \rangle \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - & \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk}(B_{11}\langle f_{k,x}, g_{i,xx} \rangle + B_{12}\langle f_{k,x}, g_{i,yy} \rangle \\
 + & 2B_{66}\langle f_{k,y}, g_{i,xy} \rangle) - \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk}(B_{12}\langle h_{k,y}, g_{i,xx} \rangle \\
 + & B_{22}\langle h_{k,y}, g_{i,yy} \rangle + 2B_{66}\langle h_{k,x}, g_{i,xy} \rangle) \\
 + & \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk}(D_{11}\langle g_{k,xx}, g_{i,xx} \rangle + D_{12}\langle g_{k,yy}, g_{i,xx} \rangle \\
 + & D_{12}\langle g_{k,xx}, g_{i,yy} \rangle) + \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk}(D_{22}\langle g_{k,yy}, g_{i,yy} \rangle \\
 + & 4D_{66}\langle g_{k,xy}, g_{i,xy} \rangle + \langle \overline{N_{xx}^0} g_{k,x}, g_{i,x} \rangle) \quad (36) \\
 + & \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk}(\langle \overline{N_{yy}^0} g_{k,y}, g_{i,y} \rangle + \langle \overline{N_{xy}^0} g_{k,y}, g_{i,x} \rangle \\
 + & \langle \overline{N_{xy}^0} g_{k,x}, g_{i,y} \rangle) \\
 + & \sum_{k=1}^{n_x} I_1 \omega^2 (C_{uk}\langle f_k, g_{i,x} \rangle + C_{uk}\langle h_k, g_{i,y} \rangle) \\
 - & \sum_{k=1}^{n_x} C_{uk} \omega^2 (I_0 \langle g_k, g_i \rangle + I_2 \langle g_{k,x}, g_{i,x} \rangle \\
 + & I_2 \langle g_{k,y}, g_{i,y} \rangle) - \langle \overline{M_{xx}^0}, g_{i,xx} \rangle - \langle \overline{M_{yy}^0}, g_{i,yy} \rangle \\
 - & 2\langle \overline{M_{xy}^0}, g_{i,xy} \rangle - \langle q, g_i \rangle = 0
 \end{aligned}$$

여기서 부호 $\langle f, g \rangle$ 는 함수 f 와 g 의 곱을 중심면 위에서 적분한 값을 나타낸다. 또, 함수에서 쉼표 뒤의 하첨자는 해당 방향으로의 편미분을 나타낸다. 동적 특성을 나타내는 관성항은 조화해로 표현할 수 있으며, 이 때 고유진동수를 ω 로 표현하였다.

4. 수치해와 검토

채택한 수치해법을 실제로 적용할 때, 수렴성, 정확성과 실용성 등을 검토하기 위해 다양한 경계조건을 가진 직사각형 판들을 해석하였다. 수치 결과들은 가능한 경우에는 문헌의 해와 비교하였다. 적분기법으로는 엄밀 적분을 우선으로 하였으며 엄밀 적분이 불가능한 경우에는 수치적분을 이용하였다. 수치적분 방법으로는 Gauss 적분법을 택하였으며 충분한 정밀도로 적분되도록 적분점을 택하였다. 최저 고유진동수를 구하기 위해 역추차기법을 이용하였다. 이때 초기벡터는 정규화한 변위해로 하였다.

4.1 기저함수 선택

기저함수의 종류에 따른 수렴 특성을 살펴보기 위해 몇가지의 함수 집합을 고려하였다. 해석하는 문제는 균질인 등방성 직사각형 판에 균일 분포하중이 가해지며 모든 모서리가 고정지된 문제로 하였다. 기저함수를 보다 간단히 표현하기 위해 자연좌표 (ξ, η) 를 도입하였으며 $\xi = 2x/a$ 이며 $\eta = 2y/b$ 이다. 기저함수의 종류에 따라, 다항식을 POLY, 일반 삼각함수를 TRIG, 보의 고유함수를 두 방향으로 복합한 것을 EIGF로 표현하였다. 다음 식에서 i, j 는 각각 1 이상인 자연수이며 한쌍의 값을 규정하면 유일한 기저함수가 설정된다. 표현의 단순화를 위해 $k=i(m-1)+j$ 관계를 도입하여 한 개의 하첨자로만 함수를 표현했으며 이때 m 은 한 방향으로의 기저함수 수이다.

POLY

$$\begin{aligned}
 f_k &= (1-\xi^2)(1-\eta^2)\xi^{2i-1}\eta^{2j-2} \\
 h_k &= (1-\xi^2)(1-\eta^2)\xi^{2i-2}\eta^{2j-1} \quad (37) \\
 g_k &= (1-\xi^2)^2(1-\eta^2)^2\xi^{2i-2}\eta^{2j-2}
 \end{aligned}$$

TRIG

$$\begin{aligned}
 f_k &= \sin i\pi\xi \sin j\pi\eta \\
 h_k &= \sin i\pi\xi \sin j\pi\eta \quad (38) \\
 g_k &= (1-\cos 2i\pi\xi)(1-\cos 2j\pi\eta)
 \end{aligned}$$

EIGF

$$\begin{aligned}
 f_k &= \sin i\pi\xi \sin j\pi\eta \\
 h_k &= \sin i\pi\xi \sin j\pi\eta \\
 g_k &= (\sin \lambda_i x' - \sinh \lambda_i x' + \alpha_i (\cosh \lambda_i x' - \cos \lambda_i x')) \\
 &\quad \cdot (\sin \mu_j y' - \sinh \mu_j y' + \beta_j (\cosh \mu_j y' - \cos \mu_j y'))
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

여기서 $x' = x + a/2$ 이며 $y' = y + b/2$ 이다. 또, 상수 λ_i 와 μ_j 는 보의 고유치를 나타내며 다음 식들을 풀어 구한다.

$$\cos \alpha \lambda_i \cdot \cosh \alpha \lambda_i = 1 \tag{40}$$

$$\cos b \mu_j \cdot \cosh b \mu_j = 1 \tag{41}$$

또, 상수 α_i 와 β_j 는 다음과 같이 정해진다.

$$\alpha_i = \frac{\sinh \alpha \lambda_i - \sin \alpha \lambda_i}{\cosh \alpha \lambda_i - \cos \alpha \lambda_i} \tag{42}$$

$$\beta_j = \frac{\sinh b \mu_j - \sin b \mu_j}{\cosh b \mu_j - \cos b \mu_j} \tag{43}$$

계산 결과를 Table 1, Table 2와 Table 3에 보였다. 다항식 기저함수를 채택한 경우가 가장 빨리 수렴하였으며 a/b의 비를 달리 한 경우에도 같은 경향을 보였다. 표에서 근사하는 기저함수 수를 $n \times n$ 형태로 표현하였는데 이는 x 방향으로 n 개의 함수, y 방향으로 n 개의 함수를 택해 근사한 것을 의미한다. 두 방향의 근사함수를 곱하여 변위 기저함수를 구성하기 때문에 사용한 기저함수의 총수는 $n \times n$ 개가 된다.

응력의 수렴성은 다항식의 경우가 가장 우수하였다. 고유함수를 이용한 EIGF의 경우 수렴성이 좋지 않았는데 이는 근사함수 수를 늘려갈 때 고유상수 λ_i 와 μ_j 값이 점차로 커지게 되며 이 때 쌍곡선 함수 값이 삼각함수 값보다 매우 커져, 유한 정도의 컴퓨터 표현으로 구별이 어려워지기 때문인 것으로 생각된다. 실제 프로그램에서는 계산 순서를 값이 큰 항부터, 덧셈을 먼저, 뺄셈을 나중에 함으로써 이를 완화시켰으나 근본적인 해결책은 아니어서 항수를 증가시켰음에도 불구하고 고유상수 값이 커져 오차가 커지는 경우도 생겼다.

기저함수의 분석으로부터 고정지지의 경우 다

Table 1 Relative Errors of the Calculated Results with TRIG. The calculations are for an isotropic and homogeneous square plate, where $E=272$ GPa, $\nu=0.25$, thickness= $3.8 \mu\text{m}$ and $a=b=2$ mm

Number of Terms	Center Deflection $w(0, 0)$	Normal Stress $\sigma_x(a/2, 0)$	Normal Stress $\sigma_x(0, b/2)$	Normal Stress $\sigma_x(0, 0)$
1 × 1	-3.41 %	-34.2 %	-34.2 %	-17.8 %
2 × 2	-0.53 %	-19.2 %	-19.2 %	-6.05 %
3 × 3	-0.16 %	-13.3 %	-13.3 %	-2.96 %
4 × 4	-0.07 %	-10.2 %	-10.2 %	-1.75 %
5 × 5	-0.03 %	-8.27 %	-8.27 %	-1.15 %
7 × 7	-0.01 %	-5.62 %	-5.62 %	0.52 %
10 × 10	0.00 %	-4.24 %	-4.24 %	-0.30 %
12 × 12	0.00 %	-3.42 %	-3.42 %	0.19 %
15 × 15	0.00 %	-2.86 %	-2.86 %	-0.14 %

항식을 이용하여 변위뿐 아니라 응력의 관점에서 도 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 이러한 결과는 문제의 특성에 따라 달라질 수 있으나 균일 분포 하중을 받는 MEMS 판 구조에서는 같은 경향을 보였다. MEMS 판 구조의 전형적인 몇가지 경계 조건에 대한 다항식 기저함수 집합을 Table 4에 기술하였다. 기술의 편의를 위해 영문 대문자 네 개로 경계조건을 표현하였는데 앞의 둘은 x 방향 경계조건을, 뒤의 둘은 y 방향 경계조건을 뜻한다. 영문자 S는 단순지지조건을, C는 고정지지조건을, F는 자유경계조건을 나타낸다.

4.2 잔류응력이 있는 판의 해석

잔류응력을 가진 균질, 등방성 정사각형 판을 해석하여 문헌의 해와 비교하였다. 경계조건으로는 SSSS와 CCCC의 경우를 풀었다. 문헌과의 비교를 위해 SSSS 경우는 한방향으로의 잔류응력(x 방향의 균일 잔류응력)을 부과하였고, CCCC 경우는 양방향 잔류응력(x, y 방향의 균일 잔류응력)을 고려하였다. 수치 결과를 Table 5와 Table 6에 보였다. 표에서 α , $\beta(x, y, z)$ 와 γ 는 각각 정규화 된 중앙 변위, x방향 수직응력, 잔류응력이며 다음과 같이 정의된다.

Table 2 Relative Errors of the Calculated Results with EIGF. The calculations are for an isotropic and homogeneous square plate, where E=272 GPa, $\nu=0.25$, thickness= 3.8 μm and a=b=2 mm

Number of Terms	Center Deflection $w(0, 0)$	Normal Stress $\sigma_x(a/2, 0)$	Normal Stress $\sigma_x(0, b/2)$	Normal Stress $\sigma_x(0, 0)$
1 × 1	5.54 %	-26.7 %	-26.7 %	-29.8 %
3 × 3	-1.01 %	-11.8 %	-11.8 %	-7.99 %
5 × 5	0.14 %	-5.73 %	-5.72 %	3.11 %
7 × 7	-0.08 %	-3.11 %	-3.11 %	-1.91 %
9 × 9	-0.08 %	-3.11 %	-3.11 %	-1.91 %
11 × 11	0.14 %	-5.70 %	-5.70 %	3.14 %
13 × 13	0.64 %	-5.70 %	-5.36 %	12.4 %

Table 3 Relative Errors of the Calculated Results with POLY. The calculations are for an isotropic and homogeneous square plate, where E=272 GPa, $\nu=0.25$, thickness= 3.8 μm and a=b=2 mm

Number of Terms	Center Deflection $w(0, 0)$	Normal Stress $\sigma_x(a/2, 0)$	Normal Stress $\sigma_x(0, b/2)$	Normal Stress $\sigma_x(0, 0)$
1 × 1	-3.41 %	-34.2 %	-34.2 %	-17.8 %
2 × 2	-0.53 %	-19.2 %	-19.2 %	-6.05 %
3 × 3	-0.16 %	-13.3 %	-13.3 %	-2.96 %
4 × 4	-0.07 %	-10.2 %	-10.2 %	-1.75 %
5 × 5	-0.03 %	-8.27 %	-8.27 %	-1.15 %
7 × 7	-0.01 %	-5.62 %	-5.62 %	0.52 %
10 × 10	0.00 %	-4.24 %	-4.24 %	-0.30 %
12 × 12	0.00 %	-3.42 %	-3.42 %	0.19 %
15 × 15	0.00 %	-2.86 %	-2.86 %	-0.14 %

Table 4 Polynomial Basis Functions for Various Boundary Conditions

Boundary Condition	Basis Functions
SSSS	$u_0 = (1 - \eta^2) \xi^{2i-1} \eta^{2j-2}$
	$v_0 = (1 - \xi^2) \xi^{2i-2} \eta^{2j-1}$
	$w_0 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \xi^{2i-2} \eta^{2j-2}$
CCCC	$u_0 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \xi^{2i-1} \eta^{2j-2}$
	$v_0 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \xi^{2i-2} \eta^{2j-1}$
	$w_0 = (1 - \xi^2)^2 (1 - \eta^2)^2 \xi^{2i-2} \eta^{2j-2}$
CCFF	$u_0 = (1 - \xi^2) \xi^{2i-1} \eta^{2j-2}$
	$v_0 = (1 - \xi^2) \xi^{2i-2} \eta^{j-1}$
	$w_0 = (1 - \xi^2)^2 \xi^{2i-2} \eta^{2j-2}$
CFFF	$u_0 = (1 + \xi) \xi^{i-1} \eta^{2j-2}$
	$v_0 = (1 + \xi) \xi^{i-1} \eta^{j-1}$
	$w_0 = (1 + \xi)^2 \xi^{i-1} \eta^{2j-2}$

$$\alpha = \frac{E h^3}{q b^4} w(0,0) \tag{44}$$

$$\beta_x(x, y, z) = \frac{h^2}{6 q b^2} \sigma_{xx}(x, y, z) \tag{45}$$

$$\beta_y(x, y, z) = \frac{h^2}{6 q b^2} \sigma_{yy}(x, y, z) \tag{46}$$

$$\gamma = \frac{3(1 - \nu^2) b^2 \sigma^0}{\pi^2 E h^2} \tag{47}$$

수치결과는 문헌의 것과 잘 일치하고 있다.

4.3 복합적층 판의 해석

전형적인 복합재료 적층판을 해석하였다. 첫번째 예는 3층 크로스 적층 ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) 정방형 판에 균일 분포하중이 가해지는 경우이다. i 번째 판이 놓인 방향이 재료 주축에 대해 θ_i 각을 이루는 경우의 적층을 $(\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_{n-1}/\theta_n)$ 형태로 표현하였다. y 값이 일정한 모서리에서는 단순지지되었고 x 값이 일정한 모서리는 다양한 경계조건을 가지는 경우를 해석하여 Table 7에 그 결과를 수록하였다.

Table 5 Analysis Results of a Simply Supported Square Plate with Uniform Residual Stress

γ	α		$\max(\beta_x)$		$\max(\beta_y)$	
	Present	Ref. [4]	Present	Ref. [4]	Present	Ref. [4]
0	.0444	.044	.0479	.048	.0479	.048
1	.0218	.023	.0224	.021	.0218	.023
2	.0143	.015	.0143	.013	.0133	.015
3	.0106	.010	.0103	.009	.0092	.012
4	.0084	.008	.0079	.007	.0068	.009
5	.0070	.006	.0064	.006	.0052	.008

Table 6 Analysis Results of a Clamped Square Plate with Uniform Residual Stress

γ	α		$\beta_x(0, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$		$\beta_x(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$	
	Present	Ref. [5]	Present	Ref. [5]	Present	Ref. [5]
0	.0138	.0138	.0513	.0513	.0229	.0231
1	.0078	.0074	.0359	.0372	.0113	.0096
2	.0054	.0050	.0292	.0302	.0072	.0057
3	.0042	.0038	.0252	.0261	.0052	.0040

결과는 문헌⁽¹⁾의 것과 잘 일치하고 있다. 사용한 직교이방성 재료의 물성치는 재료 주축 방향에서 $Q_{11}=192.9\text{GPa}$, $Q_{22}=15.67\text{GPa}$, $Q_{12}=3.76\text{GPa}$, $Q_{66}=8.2\text{GPa}$ 이었다. 두번째 예는 비대칭 크로스 적층판으로 정방형이며 균일 분포하중을 받고 있으며 모든 모서리가 단순지지되어 있다. 재료상수들은 기준 강성을 E라 할 때, $Q_{11}=1.0025 E$, $Q_{22}=0.0041 E$, $Q_{12}=0.01 E$, $Q_{66}=0.008 E$ 로 규정된다. 수치해석 결과를 Table 8에 수록하였는데 문헌과 잘 일치하고 있다.

4.4 비대칭 적층판의 해석

MEMS 판 구조의 예로 비대칭 적층된 사각판을 균일 압력, 완전지지 조건 하에서 해석하였다.

Table 7 Calculated Results of a Symmetric Cross-ply Laminates with Uniform Pressure

Boundary Condition	α		$\beta_x(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$		$\beta_y(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$	
	Present	Ref. [1]	Present	Ref. [1]	Present	Ref. [1]
SS	.01206	.01206	.1209	.1209	.0323	.0323
SC	.00544	.00544	.0680	.0680	.00110	.00109
CC	.00280	.00280	.0465	.0465	.00318	.00308
FF	.1092	.1092	.00325	.00325	.3601	.3600
FS	.05992	.05992	.0630	.0630	.1938	.1937
FC	.02376	.02376	.0281	.0281	.07198	.07188

Table 8 The Results of a Nonsymmetric Cross-ply Laminates under Uniform Pressure

Laminates	α		$\beta_x(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$		$\beta_y(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$	
	Present	Ref. [1]	Present	Ref. [1]	Present	Ref. [1]
$(0^\circ/90^\circ)$.01696	.01696	.02115	.02113	.1794	.1794
$(90^\circ/0^\circ)$.01696	.01696	.1794	.1794	.02115	.02113
$(90^\circ/0^\circ)_2$.008086	.008085	.00902	.00902	.1228	.1228
$(90^\circ/0^\circ)_4$.00715	.00715	.00749	.00749	.1250	.1249

판은 Table 9에 보이는 바와 같이 일곱층으로 적층되어 있으며 기하학적 중심면을 기준으로 대칭성도, 스큐(skew) 대칭성도 없다. 재료중 LTO는 저온 산화실리콘이며 절연재료 사용된 것이다. 이 구조는 산화아연의 압전효과에 의해 음향을 측정하거나 발생시킬 수 있는 구조이며 산화아연층의 응력 분포와 발생되는 기전력이 직접 관련

된다(6). 따라서 전술한 바와 같이 면내 변형과 굽힘변형이 연성되며 연성 효과를 무시하면 상당한 오차가 생긴다. 굽힘변위를 x, y 각 방향으로 다섯항으로 근사하고 면내 변위들은 변량으로 하여 해를 구하였고 중앙점의 변위와 최저 고유진동수, 산화 아연 층의 윗면에서 평면 방향의 응력값을 Table 10에 수록하였다.

표의 첫째 행은 면내 변위를 근사하지 않은 결과를 나타내며 연성을 고려한 경우와는 상당한 차이를 보인다. 강성은 최대 20% 정도, 응력은 최대 40% 정도의 오차를 보인다. 따라서, 산화아연 층의 기전력이 응력에 따라 변하는 MEMS 판 구조의 기능을 시뮬레이션하기 위해서는 연성 효과를 고려해야 할 것이다. 이 연성 효과를 고려한 해석에는 유한차분법, 유한요소법 보다는 본 논문의 리츠 방법이 보다 적절하다고 판단된다. 표의 마지막 행에는 재료상수들의 영향을 적분하여 등가굽힘강성을 구하고 이로부터 굽힘 변형만을 해석하여 결과를 보인 것이다. 변위와 최저 고유진동수는 연성을 무시한 경우와 비슷하나 응력 값은 상당한 차이를 보였다. 마지막으로

Table 9 Layer Properties for a 7-layered Plate(a=b=2 mm). The minus sign in the residual stress indicates a compressive stress

Layer	Material	Thickness [μm]	Residual Stress [MPa]	Material Properties
1	Si _x N _y	1.7	140	E=272 GPa, ν=0.25, d=3100 kg/m ³
2	LTO	0.3	-30	E=73 GPa, ν=0.17, d=2200 kg/m ³
3	Poly Si	0.4	-40	E=169 GPa, ν=0.26, d=2300 kg/m ³
4	LTO	0.2	-30	E=73 GPa, ν=0.17, d=2200 kg/m ³
5	ZnO	0.5	variable	Q ₁₁ =Q ₂₂ =157.5 GPa, Q ₁₂ =67.5 GPa, Q ₁₆ =Q ₂₆ =0, Q ₆₆ =45 GPa, d=5700 kg/m ³
6	LTO	0.1	-30	E=73 GPa, ν=0.17, d=2200 kg/m ³
7	Al	0.6	20	E=69 GPa, ν=0.33, d=2700 kg/m ³

MEMS 판 구조에서는 일반적인 잔류응력이 있는 경우를 해석하여 Table 11에 결과를 보였다. 산화아연 층의 잔류응력은 변화시켰으며 다른 층의 잔류응력은 Table 9에 수록한 값으로 하였다. 모든 변위를 5x5 다항식으로 근사하였다. 이 경우에도 1 Pa 의 균일 압력이 가해지는 경우를 해석하였으며 모든 경계가 고정되지 되어 있다. 산화아연 층의 잔류응력이 -451.18 MPa이 되면 탄성좌굴이 일어나는 것으로 예측되었다. 표에 수록한 응력은 잔류응력을 제외한 변형에 의해서 유발되는 응력으로 잔류응력의 영향이 매우 큼을 알 수 있다. 전술한 바와 같이 이 응력이 만들어진 구조의 주요한 성능을 좌우하므로 이를 잘 구하는 것이 매우 중요하다.

Table 10 Calculated Results on the 7-layered Plate(a=b=2 mm) without Considering the Residual Stresses. The stresses shown are developed at the top surface of the ZnO layer for an applied pressure of 1 Pa. The out-of-plane displacement is approximated by 5x5 basis functions and equivalent isotropic properties are calculated so that the bending stiffness would be the same

Number of Terms for In-plane Displacements	w(0, 0) [μm]	Lowest Natural Frequency [kHz]	σ _x (a/2, 0) [Pa]	σ _x (0, b/2) [Pa]	σ _x (0, 0) [Pa]
0 × 0	.02299	12.275	-44050	-18880	21610
1 × 1	.02746	11.265	-66340	-28430	36390
2 × 2	.02762	11.199	-73030	-31300	35660
3 × 3	.02762	11.199	-72690	-31150	35660
4 × 4	.02762	11.199	-72680	-31150	35660
5 × 5	.02762	11.199	-72710	-31160	35660
Equivalent Isotropic	.02299	12.275	-53850	-14770	23570

Table 11 Calculated Results on the 7-layered Plate(a=b=2 mm)

Residual Stress in the ZnO Layer [MPa]	w(0, 0) [μm]	Lowest Natural Frequency [kHz]	$\sigma_x(a/2, 0)$ [Pa]	$\sigma_x(0, b/2)$ [Pa]	$\sigma_x(0, 0)$ [Pa]
0	.001204	50.832	-12720	-5450	900
-100	.001535	45.063	-14570	-6240	1150
-200	.002127	38.376	-17350	-7450	1620
-300	.003492	30.128	-22490	-9640	2810
-400	.01023	17.964	-39890	-17100	10360
-420	.01687	14.163	-53280	-22840	19420
-430	.02498	11.750	-68070	-29170	31550
-440	.04781	8.608	-106640	-45700	68190
-445	.08719	6.432	-170230	-72950	134050
-448	.1705	4.629	-302280	-129550	275730
-450	.4615	2.827	-760430	-325900	774110

5. 결론

다양한 경계조건을 가진 직사각형 다층 적판을 리츠 방법으로 근사해석하였다. 가상일의 원리에 근거하여 면내변형과 굽힘변형이 연성된 적분형 방정식을 유도하였으며 몇가지 기저함수 종류에 대한 수치실험을 통해 다항식 기저함수가 좋은 결과를 줌을 보였다. 보의 고유함수를 확장, 적용한 쌍곡선 기저함수의 거동이 가장 좋지 않았으며 이는 수치적 불안정성 때문이었다. 문헌에서 찾아 볼 수 있는 직사각형 판에 대해 해석하여 그 결과를 비교하였으며 각종 경계조건, 잔류응력, 복합재료 판 등의 경우에 기존 결과와 일치하는 해를 얻었다. MEMS 판 구조의 예로 등방성, 평면 직교이방성 재료들이 7층으로 비대칭 적층된 판을 해석하였다. 변형의 연성 효과와 잔

류응력의 영향이 이러한 구조의 성능 예측에 매우 중요함과 제안된 방법으로 이러한 문제를 잘 풀 수 있음을 보였다.

본 논문의 방법은 유한요소법과는 달리 형상이 단순한 경우 정확한 해를 효율적으로 구할 수 있는 방법이며 프로그램도 비교적 간단하다. 본 논문에서는 직사각형, 잔류응력이 있는 경우를 해석하였으나 방법을 확장하여 다영역 문제, 복잡한 경계조건 처리, 비선형 문제에의 적용, 수학적 분석 등이 이루어지면 MEMS 판 구조 해석에 잘 이용될 수 있는 유용한 방법이 될 것이다.

참고문헌

- (1) Reddy, J. N., 1997, *Mechanics of Laminated Composite Plates, Theory and Analysis*. CRC Press, New York.
- (2) Ambartsumyan, S. A. and Kunin, I., 1991, *Theory of Anisotropic Plates, Strength, Stability, and Vibrations*. 2nd Ed. Hemisphere Pub. New York.
- (3) Ritz, W., 1909, "Ueber eine Methode zur Loesung Gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik," *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 135, 1-61.
- (4) Timoshenko, S. and Woinowsky, Krieger S., 1959, *Theory of Plates and Shells*. 2nd Ed. Mc Graw Hill, New York.
- (5) Chang, C. C. and Conway, H. D., 1952, "The Marcus Method Applied to Solution of Uniformly Loaded and Clamped Rectangular Plate Subjected to Forces in Its Plane," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 19, 179-194.
- (6) Ried, R. P., Kim, E. S., Hong, D. M. and Muller, R. S., 1993, "Piezoelectric Microphone with On-Chip CMOS Circuits," *IEEE/ASME J. of Microelectromechanical Systems*, Vol. 2, 111-120.