

# 두 이방성 띠판에 내재된 면외변형하의 등속평행 균열

박재완\* · 김남훈\*\* · 최성렬\*\*\*  
(1999년 6월 1일 접수)

## Parallel Crack with Constant Velocity in Two Bonded Anisotropic Strip Under Anti-Plane Deformation

Jae-Wan Park, Nam-Hoon Kim and Sung-Ryul Choi

**Key Words:** Dynamic Stress Intensity Factor(동적 응력확대계수), Parallel Crack(평행균열), Strip(띠판), Anti-Plane(면외), Energy Release Rate(에너지방출률)

### Abstract

A semi-infinite parallel crack propagated with constant velocity in two bonded anisotropic strip under anti-plane clamped displacement is analyzed. Using Fourier integral transform a Wiener-Hopf equation is derived. By solving this equation the asymptotic stress and displacement fields near the crack tip are determined, where the results give the more general expression applicable to the extent of the anisotropic material having one plane of elastic symmetry for the parallel crack.

The dynamic stress intensity factor and energy release rate are also obtained as a closed form, which are the results applicable to the problem both of dynamic and static crack under the same geometry as this study. The stress intensity factor approaches zero at the critical crack velocity which is less than the shear wave velocity, but in typical case of isotropic or orthotropic material agrees with the velocity of shear wave. Also a circular shear stress around crack tip is considered, from which the stress is shown to be approximately symmetric about the horizontal axis. Referring to the maximum stress criteria, it could be shown that a branched crack is formed by crack growth as crack velocity increases.

### 1. 서론

구조물이 파손될 때 보편적으로 동적파괴거동을 일으키는 예가 많으며, Sih<sup>(1)</sup> 및 Freund<sup>(2)</sup>의 문헌에서 보는 바와 같이 많은 연구자에 의하여 수행되어 왔다.

등속균열에 대한 면외문제로서, 등방성 균질띠판에 대한 해석은 몇몇 연구자에 의하여 수행된 바 있다. Sih의 문헌<sup>(1)</sup>에는 띠판 상하면에 일정변위경계가 주어질 때 두 등방성 띠판의 중심에 놓

인 반무한 등속 평행균열이 해석되어 있다.

Chiang<sup>(3)</sup>은 무한 크기의 두 등방성체 계면에서 등속평행균열을 복소함수법으로 해석하고, 원주방향응력을 계산하여 속도가 증가함에 따라 꺾인 균열 생성이 가능함을 보였다. Huang<sup>(4)</sup>은 등방성 균질띠판에서 균열면의 유한역에 임의로 분포하는 하중에 대한 균열문제를 복소함수법으로 해석하였다. Lee<sup>(5)</sup>는 등방성체와 직교이방성체가 접합된 이중재료에 대한 등속전파균열선단의 응력장, 변위장 관계식을 복소응력함수법을 사용하여 구하였으며 균열선단에서 각도 변화에 따른 응력의 변화를 살펴보았다. 한편 이방성재료로서, 접합된 직교 이방성 띠판에 대한 평행균열 문제는 앞서 수행된 바 있다.<sup>(6)</sup>

본 연구에서는 직교 이방성 재료에서 보다 일 반화된 문제로서, 재료의 대칭면이 한 개 존재하

\* 회원, 삼익공업(주)  
\*\* 영남대학교 대학원 기계공학부  
\*\*\* 회원, 영남대학교 기계공학부  
E-mail : srchoi@ynucc.yeungnam.ac.kr  
TEL : (053)810-2443 FAX : (053)813-3703

는 이방성 재료에 대한 문제를 해석하고자 한다. 즉, 접합된 두 이방성 재료의 띠판 상하면이 일정변위로 구속되어 있고, 계면에서 유한거리에 형성된 반무한 크기의 평행균열이 등속으로 전파하는 문제를 해석한다. 이와 같은 문제는 부동침하가 일어나는 구조물 혹은 지진 등의 수직변형이 일어나는 구조물에 적용될 수 있으며, 또한 면내 모드문제에 대한 정성적인 정보를 제공하게 된다. 아울러 이 문제는 기존의 등방성 및 직교 이방성재료와 정지균열을 포함한 임의의 등속 균열문제에 대한 해를 모두 제공하는 문제라는 점에서 그 해석의 의의가 있다.

평행균열에 대한 응력장과 변위장에 대한 엄밀해를 각각 구하고, 이로부터 동적 응력확대계수(SIF)를 구한다. 아울러 재료의 물성치와 균열전파속도가 SIF에 미치는 영향을 조사하였고, 또한 원주방향의 응력을 알아보고, 에너지 방출율에 대한 관계식을 구하였다.

### 2. 문제의 수식화

본 연구의 문제는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 재료 대칭면이 한 개 존재하는 두 이방성 띠판이 접합되어 있고, 등속도  $v$ 로 전파하는 반무한 평행균열에 관한 해석으로서, 상하 띠판의 면외방향 상대변위가  $W_0$ 로 일정하게 유지되는 문제이다. 고정 직교좌표계(X,Y,Z)를 도입하고 이방성체의 대칭면을 XY면으로 고정하여 단성주축을 Z축이 되게 하고, 균열면을 X축으로 둔다. 계면 윗부분과 아랫부분의 재료를 각각 "재료 1"과 "재료 2"로 표기하자. 또한 "재료1"에 놓인 평행균열은 계면에서  $h_3$  ( $h_3 \neq 0$ )거리를 유지하며 등속운동한다고 두고, 기준시간  $t=0$ 일때 평행균열 선단을 고정좌표계의 원점으로 두자. 그러면 시간  $t$ 에서 반무한 평행균열은  $X < vt$ ,  $Y=0$ 에 해당하고, 균열 상하면은 무하중상태의 자유면이다. "재료 1"과 "재료 2"에 관한 X면 및 Y면의 전단계수, 두 평면에 연계된 상호전단계수 및 밀도를 각각  $\mu_{X(k)}$ ,  $\mu_{Y(k)}$ ,  $\mu_{XY(k)}$ ,  $\rho_k$  ( $k=1,2$ )로 표기하고, 띠판을 각각 두께가  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ 인 "영역 j" ( $j=1,2,3$ )인 세 개의 영역으로 나눈다. 또한, 문제해석의 편의를 위하여 균열선단을 원점으로 하는 이동 직교좌표계(x,y,z)를 도입한다.

X, Y, Z방향의 변위를 각각 U, V, W라 하면, 본 문제는 Z축에 수직인 XY평면이 재료의 거울 대칭면이 되므로

$$U_j = 0, V_j = 0, W_j = W_j(X, Y, t), (j=1, 2, 3) \quad (1)$$

으로 표현되고,<sup>(1,6,7)</sup> 여기서 하첨자 j는 "영역 j" ( $j=1,2,3$ )를 구분하여 표기한 것이다. 또한 각 영역에 대해 영이 아닌 응력성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{XZ(j)}(X, Y, t) &= \mu_{X(j)} \frac{\partial W_j}{\partial X} + \mu_{XY(j)} \frac{\partial W_j}{\partial Y} \\ \sigma_{YZ(j)}(X, Y, t) &= \mu_{XY(j)} \frac{\partial W_j}{\partial X} + \mu_{Y(j)} \frac{\partial W_j}{\partial Y} \end{aligned} \quad (2)$$

이 때 변위로 표현된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{X(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial X^2} + 2\mu_{XY(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial X \partial Y} + \mu_{Y(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial Y^2} \\ = \rho_j \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

균열면과 띠판 상하면의 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{YZ(1)}(X, Y=0, t) = 0, \quad -\infty < X < vt \quad (4a)$$

$$\sigma_{YZ(3)}(X, Y=0, t) = 0, \quad -\infty < X < vt \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} W_1(X, Y=h_1, t) - W_2(X, Y=-h_2-h_3, t) \\ = W_0, \quad -\infty < X < \infty \end{aligned} \quad (4c)$$

Fig. 1에서 보는 바와 같이 고정좌표계와 이동좌표계는 다음의 관계에 있다.

$$x = X - vt, \quad y = Y, \quad z = Z \quad (5)$$

Fig. 1과 같은 본 문제를 중첩의 원리를 사용하면, Fig. 2 즉 띠판 상하면의 변위차가 영인 반면에 균열면에 등가의 면력이 존재하는 대등한 경계치 문제로 바꿀 수 있고, 여기에 이동좌표계를

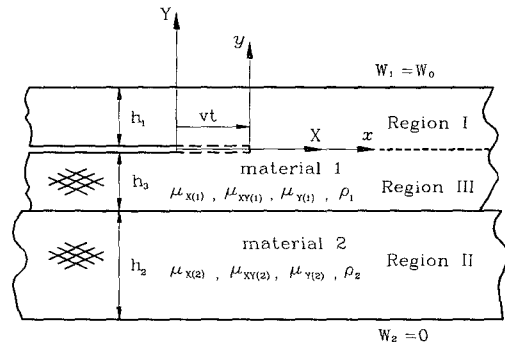


Fig. 1 Semi-infinite parallel crack with constant velocity in dissimilar anisotropic strip under anti-plane clamped condition

도입하면 보다 해석이 용이하게 된다.

식 (5)를 사용하면 고정좌표계로 표현된 경계치 문제 식 (1)-(4)는 이동좌표계로 표현된 경계치 문제로 용이하게 기술된다. 그 유도과정은 직교이 방체문제인 이전 연구에서 행한 절차와 동일하다.<sup>(6)</sup>

식 (1)의 "영역 j"(j=1,2,3)에 대한 변위를 이동좌표계로 나타내면,

$$U_j=0, V_j=0, W_j=W_j(x, y), (j=1, 2, 3) \quad (6)$$

이 되고, 식 (2)의 응력성분은 다음과 같은 변위 성분으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz(j)} &= \mu_{x(j)} \frac{\partial W_j}{\partial x} + \mu_{xy(j)} \frac{\partial W_j}{\partial y} \\ \sigma_{yz(j)} &= \mu_{xy(j)} \frac{\partial W_j}{\partial x} + \mu_{y(j)} \frac{\partial W_j}{\partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

이 때 식 (3)의 운동방정식은 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \{ \mu_{x(j)} - \rho_j v^2 \} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + 2\mu_{xy(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x \partial y} \\ + \mu_{y(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

중첩의 원리를 사용하면 식 (4)의 경계조건에서 다음과 같은 등가 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, y=0) = -\tau_0, \quad -\infty < x < 0 \quad (9a)$$

$$\sigma_{yz(3)}(x, y=0) = -\tau_0, \quad -\infty < x < 0 \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} W_1(x, y=h_1) &= W_2(x, y=-h_2-h_3) \\ &= 0, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (9c)$$

여기서  $\tau_0$ 는 균열 상하면의 면력이 되며 다음과 같이 계산된다.

$$\tau_0 = \frac{\mu_{y(1)} \mu_{y(2)} W_0}{\mu_{y(2)}(h_1+h_3) + \mu_{y(1)}h_2} \quad (10)$$

또한 각 영역의 경계면에 대한 면력과 변위의 연속조건은 다음이 된다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, y=0) = \sigma_{yz(3)}(x, y=0), \quad 0 < x < \infty \quad (11a)$$

$$W_1(x, y=0) = W_3(x, y=0), \quad 0 < x < \infty \quad (11b)$$

$$\sigma_{yz(3)}(x, y=-h_3) = \sigma_{yz(2)}(x, y=-h_3), \quad -\infty < x < \infty \quad (11c)$$

$$W_3(x, y=-h_3) = W_2(x, y=-h_3), \quad -\infty < x < \infty \quad (11d)$$

이때 변위  $W_j(j=1, 2, 3)$ 의 점근거동은 다음과 같이 무한거리에서 어떤 유계(bounded)값 M보다 작음을 알 수 있다.

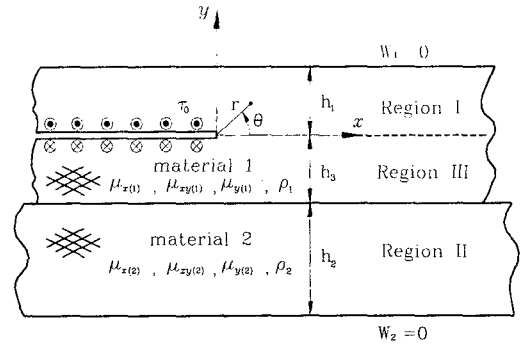


Fig. 2 Equivalent crack problem involving anti-plane surface loadings

$$\begin{aligned} W_j \rightarrow 0, \quad \text{as } x \rightarrow \infty, \\ |W_j| < M, \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (12)$$

만일 "영역 j"(j=1,2,3)의 변위  $W_j$ 에 대한 Fourier 적분변환을  $\overline{W}_j$ 라고하면,  $\overline{W}_j$ 은

$$\overline{W}_j(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) e^{ixs} dx, \quad (j=1, 2, 3) \quad (13a)$$

으로 표현된다. 이와같은  $\overline{W}_j$ 가 존재하는 복소변수 s의 범위는 변위에 대한 점근거동식에서 용이하게 결정된다.<sup>(8,10)</sup> 즉, 식 (12)를 식 (13a)에 적용하여 적분을 평가하면, s의 허수부  $\text{Im}[s]$ 를  $c_0$ 라고 할 때,  $-d < c_0 < 0$  ( $d > 0$ )에 대하여  $\overline{W}_j$ 가 존재함을 알 수 있다.

그러면 허수부가  $-d < c_0 < 0$  ( $d > 0$ )인 임의의 적분경로 s에 대하여 Fourier 역변환이 존재하게 되는바, 이를 식으로 나타내면 변위  $W_j$ 는 다음과 같이 표현된다.<sup>(8,10)</sup>

$$\begin{aligned} W_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic_0-\infty}^{ic_0+\infty} \overline{W}_j(s, y) e^{-ixs} ds, \\ (j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (13b)$$

평형식 (8)에 식 (13a)와 같은 Fourier변환을 적용하면

$$\begin{aligned} \mu_{y(j)} \frac{\partial^2 \overline{W}_j}{\partial y^2} - 2is\mu_{xy(j)} \frac{\partial \overline{W}_j}{\partial y} \\ - \{ \mu_{x(j)} - \rho_j v^2 \} s^2 \overline{W}_j = 0, \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (14a)$$

와 같은  $\overline{W}_j$ 에 대한 상미분 방정식을 얻는다.

$\overline{W}_j$ 를

$$\overline{W}_j = e^{\lambda_j y s} \quad (14b)$$

로 두고 식 (14a)에 대입하면,

$$\mu_{x(j)} \alpha^2 - 2i\mu_{xy(j)} \alpha - \{\mu_{x(j)} - \rho_j v^2\} = 0 \quad (14c)$$

인 특성방정식을 얻고 이로부터 근  $\alpha$ 가 결정된다.

따라서 식 (14)의 해  $\overline{W}_j(s, y)$ 는

$$\overline{W}_j(s, y) = A_j(s) e^{\lambda_j y s} + B_j(s) e^{\omega_j y s} \quad (15)$$

처럼 쓸 수 있다.  $\lambda_j, \omega_j$ 는 특성방정식  $\alpha$ 의 근으로서 구체적으로는 식 (16)에 보인 값을 말한다.

해석에 사용되는 상수로서, “재료1” 및 “재료2”에 대한 전단계수  $\mu_{x(j)}, \mu_{xy(j)}, \mu_{y(j)}$  및 밀도  $\rho_j$ , 속도  $v$ 로 구성된 상수들을 다음과 같은 정의하자.

$$c_j = \sqrt{\frac{\mu_{x(j)}}{\rho_j}}, \quad s_j = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_j^2}}, \quad \alpha_j = \frac{\mu_{xy(j)}}{\mu_{x(j)}}, \quad (16)$$

$$\Gamma_j = \sqrt{-\mu_{xy(j)}^2 + \mu_{x(j)} \mu_{y(j)} (1 - \frac{v^2}{c_j^2})}, \quad (16)$$

$$\delta_j = \Gamma_j / \mu_{y(j)}, \quad \lambda_j = (i\alpha_j + \delta_j), \quad \omega_j = (i\alpha_j - \delta_j), \quad (j=1, 2)$$

여기서  $c_j$ 는 각 재료( $j=1,2$ )에서 수평축으로 진행하는 전단파의 속도,  $s_j$ 는 속도관련상수이고,  $\alpha_j$ 는 재료의 상호전단비,  $\Gamma_j$  및  $\delta_j$  각각 균열속도가 고려된 재료의 등가전단계수 및 등가전단비를 말하며,  $\lambda_j, \omega_j$ 는 특성방정식 (14c)의 복소근을 말한다. Fig. 2에서 보는 바와 같이, “영역1”과 “영역3”은 모두 “재료1”로 구성되어 있으므로, 이하 서술에서 “영역3”에 대한 상수들은 식 (16)에 보인 “재료1”에 대한 상수값과 동일함을 언급해 둔다.

또한 식 (15)에서  $A_j, B_j$  ( $j=1, 2, 3$ )는 경계 및 연속조건에서 결정되어야 할 미지상수이다.

식 (15)를 식 (13b)에 대입함으로써 각 영역의 변위  $W_j$ 는 다음과 같은 적분형태로 표현된다.

$$W_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic_0 - \infty}^{ic_0 + \infty} [A_j(s) e^{\lambda_j y s} + B_j(s) e^{\omega_j y s}] e^{-ixs} ds, \quad (j=1, 2, 3) \quad (17)$$

여기서  $c_0$ 는 식 (13)에서 설명한  $-d < c_0 < 0$  ( $d > 0$ )을 말한다.

변위와 유사하게, 각 영역의 응력성분  $\sigma_{xz(j)}, \sigma_{yz(j)}$  ( $j=1,2,3$ )의 Fourier 변환을 각각  $\overline{\sigma_{xz(j)}}, \overline{\sigma_{yz(j)}}$  라고 두면,

$$\overline{\sigma_{xz(j)}}(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xz(j)} e^{ixs} dx, \quad (18)$$

$$\overline{\sigma_{yz(j)}}(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yz(j)} e^{ixs} dx,$$

으로 표현되고, 여기에 식 (7) 및 (15)을 사용하여 계산하면 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{\sigma_{xz(j)}}(s, y) = s(\mu_{xy(j)} \lambda_j - i\mu_{x(j)}) A_j(s) e^{\lambda_j y s} + s(\mu_{xy(j)} \omega_j - i\mu_{x(j)}) B_j(s) e^{\omega_j y s}$$

$$\overline{\sigma_{yz(j)}}(s, y) = \Gamma_j s [A_j(s) e^{\lambda_j y s} - B_j(s) e^{\omega_j y s}], \quad (j=1, 2, 3) \quad (19)$$

또한 이를 역변환에 의하여 각영역에 대한 응력성분  $\sigma_{xz(j)}, \sigma_{yz(j)}$  ( $j=1,2,3$ )은 다음과 같은 적분식으로 주어진다.

$$\sigma_{xz(j)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic_0 - \infty}^{ic_0 + \infty} s [(\mu_{xy(j)} \lambda_j - i\mu_{x(j)}) A_j(s) e^{\lambda_j y s} + (\mu_{xy(j)} \omega_j - i\mu_{x(j)}) B_j(s) e^{\omega_j y s}] e^{-ixs} ds$$

$$\sigma_{yz(j)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic_0 - \infty}^{ic_0 + \infty} \Gamma_j s [A_j(s) e^{\lambda_j y s} - B_j(s) e^{\omega_j y s}] e^{-ixs} ds, \quad (j=1, 2, 3) \quad (20)$$

여기서 적분경로중  $c_0$ 는 식 (13)에 보인 바와 같다.

미지함수  $A_j, B_j$  ( $j=1, 2, 3$ )는 경계 및 연속조건에서 결정된다. 경계 및 연속조건 식 (9), (11)을 각각 Fourier 변환하고, 여기에 적분변환된 변위 및 응력 식 (15) 및 (19)를 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$A_3(s) - B_3(s) = A_1(s) - B_1(s), \quad (21a)$$

$$A_1(s) = -B_1(s) e^{-2\delta_1 h_1 s}, \quad (21b)$$

$$B_2(s) = -A_2(s) e^{-2\delta_2 (h_2 + h_3) s}, \quad (21c)$$

$$A_3(s) + B_3(s) - A_1(s) - B_1(s) = 2 N_-(s), \quad (21d)$$

$$\Gamma_1 [A_3(s) e^{-\lambda_1 h_3 s} - B_3(s) e^{-\omega_1 h_3 s}] = \Gamma_2 [A_2(s) e^{-\lambda_2 h_3 s} - B_2(s) e^{-\omega_2 h_3 s}], \quad (21e)$$

$$\begin{aligned} A_3(s) e^{-\lambda_1 h_3 s} + B_3(s) e^{-\omega_1 h_3 s} \\ = A_2(s) e^{-\lambda_2 h_3 s} + B_2(s) e^{-\omega_2 h_3 s}, \end{aligned} \quad (21f)$$

$$\Gamma_1 s [A_1(s) - B_1(s)] = \frac{-\tau_0}{is} + M_+(s). \quad (21g)$$

식 (21)내의  $N_-(s), M_+(s)$ 는 해석의 편의상 각각 다음과 같이 정의된 새로운 미지함수이다.

$$\begin{aligned} N_-(s) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 [W_3(x, 0) - W_1(x, 0)] e^{ixs} dx, \\ M_+(s) &= \int_0^{\infty} \sigma_{yz(1)}(x, 0) e^{ixs} dx. \end{aligned} \quad (22a, b)$$

$N_-(s)$ 는  $\text{Im}[s] < 0$ 에서 해석적이고,  $M_+(s)$ 는  $\text{Im}[s] > -d_0$  ( $d_0 > 0$ )에서 해석적임을 점근거동 식 (12)에서 알 수 있다.

식 (21a)-(21f)를 연립하여  $A_j, B_j$  ( $j=1,2,3$ )을 미지함수  $N_-(s)$ 로 나타내면 다음과 같이 주어진다.

$$A_1(s) = \frac{N_-(s)}{F(s)} [C(s) - D(s) e^{-2\delta_1 h_3 s}] e^{-2\delta_1 h_1 s} \quad (23a)$$

$$B_1(s) = \frac{-N_-(s)}{F(s)} [C(s) - D(s) e^{-2\delta_1 h_3 s}] \quad (23b)$$

$$A_2(s) = \frac{N_-(s)}{F(s)} 2\Gamma_1 [1 + e^{-2\delta_1 h_1 s}] e^{(\lambda_2 - \lambda_1) h_3 s} \quad (23c)$$

$$B_2(s) = \frac{-N_-(s)}{F(s)} 2\Gamma_1 [1 + e^{-2\delta_1 h_1 s}] \times e^{-2\delta_2 h_2 s - (\lambda_1 - \omega_2) h_3 s} \quad (23d)$$

$$A_3(s) = \frac{N_-(s)}{F(s)} C(s) [1 + e^{-2\delta_1 h_1 s}] \quad (23e)$$

$$B_3(s) = \frac{N_-(s)}{F(s)} D(s) [1 + e^{-2\delta_1 h_1 s}] e^{-2\delta_1 h_3 s} \quad (23f)$$

여기서  $C(s), D(s), F(s)$ 는 다음과 같은 값이다.

$$\begin{aligned} C(s) &= \{(\Gamma_1 + \Gamma_2) - (\Gamma_1 - \Gamma_2) e^{-2\delta_2 h_2 s}\} \\ D(s) &= \{(\Gamma_1 - \Gamma_2) - (\Gamma_1 + \Gamma_2) e^{-2\delta_2 h_2 s}\} \\ F(s) &= C(s) + D(s) e^{-2\delta_1 (h_1 + h_3) s} \end{aligned} \quad (23g)$$

최종적으로 식 (23a)-(23f)을 나머지 식 (21g)에 대입함으로써,  $N_-(s), M_+(s)$ 에 대한 다음의 Wiener-Hopf 식을 얻는다.

$$\Gamma_1 G(s) N_-(s) = \frac{-\tau_0}{is} + M_+(s) \quad (24)$$

여기서 커널함수  $G(s)$ 는

$$G(s) = \frac{s\{C(s) - D(s) e^{-2\delta_1 h_3 s}\} \{1 + e^{-2\delta_1 h_1 s}\}}{C(s) + D(s) e^{-2\delta_1 (h_1 + h_3) s}} \quad (25)$$

로 결정된다. 일단 식 (24)의 해가 주어지면 식 (23)에서 모든 미지함수들이 결정되고, 식 (20)을 평가함으로써 균열선단에 대한 응력의 점근거동을 계산할 수 있다.  $x \neq 0, y = 0$ 에 해당하는 균열선단에 대한 응력의 점근거동은, 식 (20)의 우변에서  $|s| \rightarrow \infty$ 에 대한 적분평가에 대응되므로, 결국  $|s| \rightarrow \infty$ 에서 미지함수들의 거동을 구하는 문제에 귀결된다.

### 3. 미지함수 $N_-(s)$ 의 결정

Noble의 저서<sup>(10)</sup>에는 Wiener-Hopf 식에 대한 해석기법이 잘 기술되어 있으며, 많은 연구가 이방법에 의해 수행되었다.<sup>(1,6,8,9)</sup> 이들 해석기법을 따르면 식 (24)와 같은 미지함수  $N_-(s)$ 는 용이하게 결정된다.

먼저 식 (24)내의 커널함수  $G(s)$ 는 식 (25)와 같고, 이로부터 함수의 특성을 조사해 보면,  $G(s)$ 는 우함수임을 알 수 있고, 또한  $s$ 의 실수축에서 영점(zero)점이 없고  $-d < \text{Im}(s) < d$  ( $d > 0$ )에서 해석적인 적절한 영역이 존재함을 알 수 있다. 따라서  $G(s)$ 를  $s$ 의 상하반 평면에서 각각 해석적인 함수, 즉  $\text{Im}(s) > -d$ 의 상반평면에서 해석적인 함수  $G_+(s)$ 와  $\text{Im}(s) < -d$ 인 하반평면에서 해석적인 함수  $G_-(s)$ 의 곱으로 나타낼 수 있고, 이를 형식적으로 표현하면 다음과 같다.

$$G(s) = G_-(s) G_+(s) \quad (26)$$

식 (26)을 식 (24)에 적용하고, 기존연구자와 동일한 해석절차를 밟아가면 다음과 같은 두 해석적인 함수로 분리된다.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 G_-(s) N_-(s) + \frac{\tau_0}{is G_+(s)} \\ = \frac{M_+(s)}{G_+(s)} - \frac{\tau_0}{is} \left[ \frac{1}{G_+(s)} - \frac{1}{G_+(0)} \right] \quad (27) \\ [\equiv C] \end{aligned}$$

식 (27)의 좌변은  $\text{Im}(s) < 0$ 인  $s$ 의 하반평면에서 해석적이고, 한편 우변은  $\text{Im}(s) > -d$  ( $d > 0$ )인 상반평

면에서 해석적이다. 따라서 식 (27)의 좌우변 함수는  $-d < \text{Im}(s) < 0$ 에서 모두 해석적이므로, 해석적속<sup>(8)</sup>에 의하여 식 (27)의 좌우변은 각각 전체영역에서 해석적인 전함수 C가 된다. s의 무한거동으로부터  $C=0$ 임을 알 수 있다. 그러면 식 (27)로부터  $N_-(s)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$N_-(s) = \frac{-\tau_0}{i\Gamma_1 G_+(0) s G_-(s)} \quad (28)$$

$|s| \rightarrow \infty$ 에 대한  $N_-(s)$ 결정을 위하여 식 (28)내의  $G_+(0)$ ,  $G_-(s)$ 에 관한 세부적인 계산을 수행하고자 한다.

식 (25)로부터  $s \rightarrow 0$  및  $s \rightarrow \pm\infty$ 에 대한  $G(s)$ 의 점근거동을 각각 계산하면 다음을 얻는다.

$$G(0) = \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1\delta_2 h_2 + \Gamma_2\delta_1(h_1 + h_3)}, s \rightarrow 0 \quad (29a)$$

$$G(s) = |s|, \text{ as } s \rightarrow \pm\infty \text{ for } h_3 \neq 0 \quad (29b)$$

3장 위에서 설명한 바 있는 커널함수  $G(s)$ 에 대해 추가로 근의 특성을 고려해 보자. 만일  $\xi_n$  ( $\text{Re}[\xi_n] > 0$ ) 이  $G(s)=0$ 의 복소근이라면,  $-\xi_n$ ,

$\pm \overline{\xi_n}$  또한 근이 되고, 식 (25)의  $G(s)$ 를 식 (26)과 연계하여 무한점으로 나타내면<sup>(10)</sup> 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(s) = G_+(s)G_-(s) \sim K \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\xi_n}\right) \left(1 + \frac{s}{\xi_n}\right) \left(1 + \frac{s}{\xi_n}\right) \left(1 - \frac{s}{\xi_n}\right) \quad (30)$$

식 (30)을 서로 비교하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$G_+(s) = G_-(-s) \quad (31)$$

따라서 식 (26), (29a), (31)을 연립하면 다음을 얻는다.

$$G_+(0) = G_-(0) = \sqrt{\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1\delta_2 h_2 + \Gamma_2\delta_1(h_1 + h_3)}} \quad (32)$$

같은 방법으로 식 (31)과 (29b)로부터  $|s| \rightarrow \infty$ 일 때  $G_+(s) \sim \sqrt{s}$ ,  $G_-(s) \sim \sqrt{s}$ 인 동일 차수임을 감안하여, 식 (26), (29b), (31)을 연계하면  $|s| \rightarrow \infty$ 인 점근거동은 다음과 같이 결정된다.

$$G_+(s) = e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{s}}, \left(-\frac{\pi}{2} < \arg s < \frac{3\pi}{2}\right) \quad (33a)$$

$$G_-(s) = e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{s}}, \left(-\frac{3\pi}{2} < \arg s < \frac{\pi}{2}\right) \quad (33b)$$

$\text{as } |s| \rightarrow \infty \text{ for } h_3 \neq 0$

따라서 식 (32), (33b)를 식 (28)에 대입하면  $|s| \rightarrow \infty$ 일 때  $N_-(s)$ 의 점근거동은 다음과 같이 결정된다.

$$N_-(s) = \frac{-\tau_0 e^{-\frac{3\pi}{4}\sqrt{s}}}{\Gamma_1 \sqrt{\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1\delta_2 h_2 + \Gamma_2\delta_1(h_1 + h_3)}}} \quad (34)$$

$\left(-\frac{3\pi}{2} < \arg s < \frac{\pi}{2}\right)$

#### 4. 결과 및 토의

##### 4.1 응력, 변위의 점근거동과 응력확대계수

$x \approx 0$ ,  $y=0^+$  및  $x \approx 0$ ,  $y=0^-$ 인 균열선단의 변위와 응력은 각각 식 (17), (20)에서 계산된다. 이들 적분식을 평가함에 있어서 s가 유한크기구간의 적분값은 상수값이 되므로, 균열선단의 변위와 응력의 점근거동은  $|s| \rightarrow \infty$ 의 평가에 귀결된다.<sup>(11)</sup>

Fig. 2에서 보는 바와 같이 평행균열( $h_3 \neq 0$ )은 “재료1”에 위치하고, 영역으로는 “영역1”, “영역 3”에 놓이게 된다. 식 (17), (20) 적분식에 포함된 함수의 점근거동은 식 (23)으로부터 다음과 같이 평가된다.

$$A_1(s) = B_3(s) = 0$$

$$B_1(s) = -A_3(s) = -N_-(s) \text{ as } s \rightarrow \infty \quad (35a)$$

$$A_1(s) = -B_3(s) = -N_-(s) \text{ as } s \rightarrow -\infty \quad (35b)$$

$$B_1(s) = A_3(s) = 0$$

여기서  $N_-(s)$ 는 식 (34)와 같다.

Fig. 2에서 보듯이 직교좌표계는 극좌표계와

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (35c)$$

의 관계에 있고, 그러면  $x \approx 0$ ,  $y \approx 0$ 인 균열선단의 응력  $\sigma_{yz}(x,y)$ 는  $r \rightarrow 0$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ 인  $\sigma_{yz}(r,\theta)$ 으로 나타낼 수 있다.

식 (35)를 각각 식 (17), (20)에 대입하여 이전의 연구와 같은 방법<sup>(6)</sup>으로 계산하면 다음과 같은 균열선단 변위와 응력의 점근거동을 얻는다.

$$W(r, \theta) = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{K_3}{\Gamma_1} \text{Im}[\sqrt{\cos \theta + i\lambda_1 \sin \theta}] \quad (36)$$

$$\sigma_{xz}(r, \theta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \text{Re}\left[\frac{\mu_{xz(1)}\lambda_1 - i\mu_{xz(1)}}{\Gamma_1 \sqrt{\cos \theta + i\lambda_1 \sin \theta}}\right]$$

(37a)

$$\sigma_{yz}(r, \theta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + i\lambda_1 \sin \theta}} \right] \quad (37b)$$

( $r \rightarrow 0, -\pi < \theta < \pi, h_3 \neq 0$ )

여기서  $K_3$ 는 동적응력확대계수로서 다음과 같이 계산된다.

$$K_3 = \mu_{y(1)} W_0 \left\{ \frac{\delta_1 \mu_{x(2)}}{\mu_{x(1)} h_2 + \mu_{x(2)} (h_1 + h_3)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

( $h_3 \neq 0$ )

4.2 결과식 검토 및 토의

본 연구와 동일한 기하학적 모양에 직교이방성 재료인 문제를 이전에 해석한 바 있다.<sup>(6)</sup>

직교이방성재료는 본 연구의 경우에서 상호전단계수가  $\mu_{xy(j)} = 0$  ( $j=1, 2$ )인 재료에 해당한다. 균열선단의 응력 및 변위와 응력확대계수에 관한 식(36)-(38)에  $\mu_{xy(j)} = 0$  ( $j=1, 2$ )을 대입하면, 그 결과는 이전의 연구결과<sup>(6)</sup>와 일치를 보임을 알 수 있었다. 이로부터 본 연구결과 식(36)-(38)은 등방성 및 직교이방성재료를 비롯하여 재료의 대칭면이 1개만 존재하는 이방성재료의 정적 및 등속균열문제에 적용되는 일반화된 결과식임을 알 수 있다.

재료의 물성치와 균열전파속도  $v$ 가 응력확대계수(SIF)에 미치는 영향을 살펴보자. 먼저 두 재료가 동일한 등방성재료이고,  $v=0$ 인 정지균열에 대한 응력확대계수를  $K_3^0$ 라고 하면,  $K_3^0$ 는

$$K_3^0 = \mu_{x(1)} W_0 \sqrt{h_1 + h_2 + h_3} \quad (39)$$

으로 알려져있고, 식 (38)에서도 확인된다. 일반적인 경우로 식 (38)의 SIF  $K_3(h_3, v)$ 는 균열전파속도  $v$ 가 증가할수록 감소를 보이며, 등가전단비  $\delta_1 = 0$ 가 되는  $v$ 에서는  $K_3(h_3, v) = 0$ 임을 알 수 있다.  $\delta_1 = 0$ 인  $v$ 를 임계균열전파속도  $v_c$ 라고 하면,  $v_c$ 는 식 (16)에서 다음과 같이 계산된다.

$$V_c = c_1 \sqrt{1 - \frac{\mu_{xy(1)}^2}{\mu_{x(1)} \mu_{y(1)}}} \quad (40)$$

식 (40)에서 상호전단계수  $\mu_{xy(1)} \neq 0$ 인 경우에 임계균열전파속도  $v_c$ 는 전단파의 속도  $c_1$ 보다 작음을 알 수 있다.

식 (38)에서 SIF  $K_3(h_3, v)$ 는,  $x$ 면 전단비

$\mu_{x(1)}/\mu_{y(1)}$ , 상호전단비  $\mu_{xy(1)}/\mu_{y(1)}$ , “재료2”의  $y$ 면 전단비  $\mu_{y(2)}/\mu_{y(1)}$ , 띠판 두께비  $(h_1 + h_3)/h_2$  및 균열전파 속도비  $v/c_1$  등 많은 인자에 의하여 영향을 받고 있음을 알 수 있다. 그 일례를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

Fig. 3은 주어진 재료물성치에서 띠판의 두께비에 따른 SIF  $K_3(h_3, v)/K_3^0$ 를 균열전파속도비의 함수로 그린 것이다.  $y$ 면 전단계수  $\mu_{y(1)}$ 를 기준하여 “재료2”가 단단할 경우에는 “재료1”의 두께를 두껍게 할수록 SIF는 감소함을 보인다.

Fig. 4는 상호전단비가 증가할수록 혹은  $x$ 면 전단비가 감소할수록 SIF는 감소함을 보이고 있다.

식 (38)를 두고서 기타 여러 인자의 영향을 조사한 결과를 종합해보면, 면의변위가 작용하여

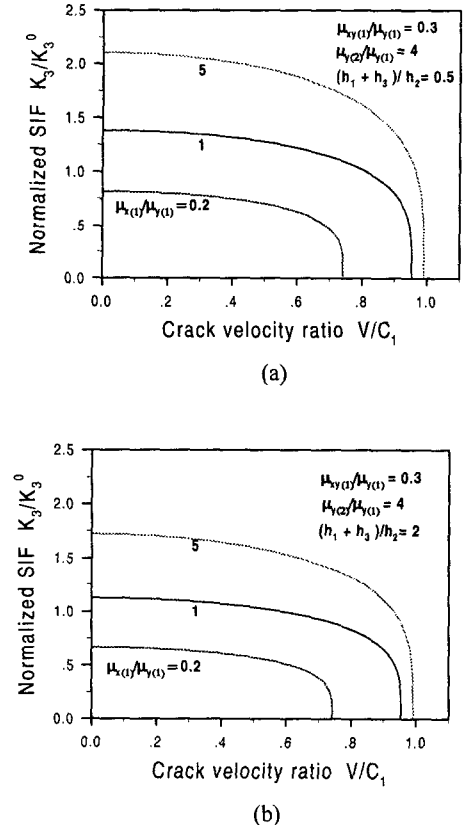
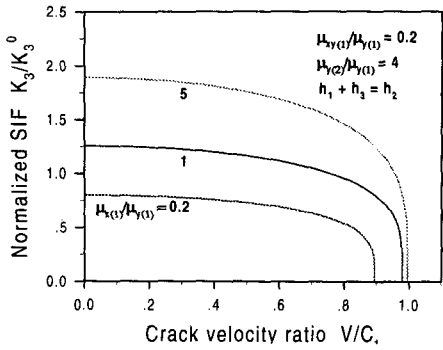
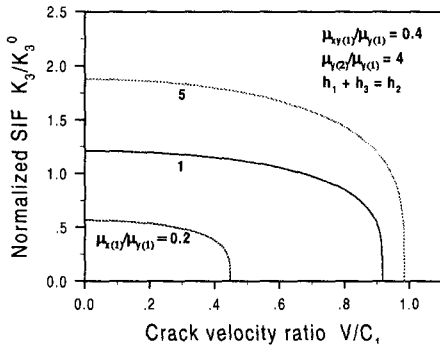


Fig. 3 Normalized stress intensity factor,  $K_3/K_3^0$  ( $h_3 \neq 0$ ) as a function of crack velocity for various values of thickness  $h_j(j=1,2,3)$



(a)



(b)

**Fig. 4** Normalized stress intensity factor,  $K_3/K_3^0$  ( $h_3 \neq 0$ ) as a function of crack velocity for various values of  $\mu_{xy}/\mu_y$  ( $\mu_y(1)$ )

등속평행균열이 "재료 1"에 형성될 때, "재료 1"의 두께를 크게 할수록 그리고 "재료 2"를 무른 재료로 택할수록 SIF는 감소함을 알 수 있었다. 또한 상호전단비가 증가할수록, x면 전단비가 감소할수록 SIF가 영이 되는 임계 균열전파속도는 감소함을 알 수 있다.

또한 응력과 변위의 접근거동식 (36) 및 (37)의 도움으로, 기존 연구자들에 의해 제시된 식인, 동적 에너지방출율을 구하는 식<sup>(3,11)</sup>에 적용함으로써 다음과 같은 동적에너지방출율  $G_D(h_3, v)$ 와 SIF의 관계식을 얻었다.

$$G_D(h_3, v) = \frac{1}{2\Gamma_1} [K_3(h_3, v)]^2 \text{ for } h_3 \neq 0 \quad (41)$$

### 4.3 원주방향 전단응력

일반적으로 모균열이 등속평행균열이라고 하더

라도 균열전파속도 등 여러 인자에 따라 분기균열 혹은 쪼임균열이 형성될 수 있다. 이와같은 균열성장방향을 예측하는 용이한 방법으로 원주방향 전단응력이 사용될 수 있다. Chiang<sup>(3)</sup>은, 수평선에서 원주각  $\theta$ 인 면의 원주방향 전단응력을  $\sigma_{\theta z}(\theta)$ 라고 할 때, 등방성 이중재료에 대하여  $\sigma_{\theta z}(\theta)$ 가 최대가 되는 원주각을 균열전파속도에 따라 알아보았다. 여기서 작은 균열전파속도에서는 최대전단응력이 모균열과 같은 방향이지만, 속도가 점차 증가하여 전단파의 약 0.6배 달하면 최대전단응력은 일정한 경사 방향이 되어 분기균열이 발생할수 있음을 보였다.

등방성재료의 경우의 균열성장방향은, 재료의 파괴인성치가 방향에 무관한 바, 원주방향 전단응력이 최대인 방향으로 볼수 있다. 그러나 이방성재료와 같이 파괴인성치가 원주각에 따라 변하는 경우에는 단순히 전단응력이 최대인 방향이 균열성장방향으로 볼 수는 없다. 이와같은 경우에 He 및 Hutchinson<sup>(12)</sup>은 파괴인성치비를 도입하여 식을 유도한 바 있다. 만일 파괴인성치로 SIF를 택한다면, 모균열에서 원주각  $\theta$  방향으로 균열이 성장할 때,  $\theta$  방향 SIF를  $K_3(\theta)$ 라 두자. 이들<sup>(12)</sup>은 함수  $F(\theta)$ 를 도입하여  $\theta$  방향( $\theta \neq 0$ )으로 균열이 성장할 조건을 다음으로 표현하였다.

$$\text{Max}[F(\theta)] > 0 \quad (42)$$

이때  $F(\theta)$ 는

$$F(\theta) = \frac{K_3(\theta)}{K_3(0)} - \left( \frac{K_3(\theta)}{K_3(0)} \right)_{mat} \quad (43)$$

이 된다. 식 (43)의 우변 첫째항은 수평방향과 임의 원주방향의 SIF비를 말하고, 한편 우변 둘째항은 재료상수에 해당하는 값으로 실험에 의해 얻는 재료의 SIF비를 말한다. 식 (42)의 의미는  $F(\theta)$ 가 양의 최대값을 갖는다면 그 방향이 균열 성장방향이고 반면에 최대값이 양이 아닌 경우에는 수평방향이 균열성장방향이 됨을 나타낸다.

그러나 이와같은 SIF비는 근사값으로 원주방향 전단응력비가 되고, 그러면

$$\frac{K_3(\theta)}{K_3(0)} \approx \frac{\sigma_{\theta z}(\theta)}{\sigma_{\theta z}(0)},$$

$$\left( \frac{K_3(\theta)}{K_3(0)} \right)_{mat} \approx \left( \frac{\sigma_{\theta z}(\theta)}{\sigma_{\theta z}(0)} \right)_{mat} \quad (44)$$

로 둘 수 있다.



식 (44)를 식 (43)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$F(\theta) \approx \frac{\sigma_{\theta z}(\theta)}{\sigma_{\theta z}(0)} - \left( \frac{\sigma_{\theta z}(\theta)}{\sigma_{\theta z}(0)} \right)_{mat} \quad (45)$$

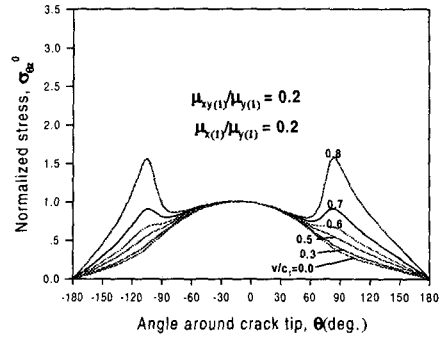
따라서 식 (45)에서 보는 바와 같이 원주방향 전단응력비  $\sigma_{\theta z}(\theta)/\sigma_{\theta z}(0) [\equiv \sigma_{\theta z}^0]$ 는 균열성장 방향을 예측하기 위한 기본적인 자료로 응용될 수 있음을 알 수 있다. 또한 식 (45)의 우변 둘째항과 같은 재료물성치에 해당하는 전단응력비(이하 물성치 전단응력비로 함)가 요구된다. 만일 물성치 전단응력비가 원주각에 무관하게 1이 되면 식 (45)는 결국 우변첫째항의 전단응력비만으로 균열성장방향을 예측할 수 있음을 알 수 있고, 이는 등방성재료에 해당한다. 또한 이방성재료라고 하더라도 원주각에 따라 물성치 전단응력비가 그다지 변하지 않는 경우에도 전단응력비만으로 균열성장방향을 어느정도 예측할 수 있음을 알 수 있다.

본문제의 경우 원주방향 전단응력  $\sigma_{\theta z}(\theta)$ 는 직교좌표계로 주어진 전단응력  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ 과

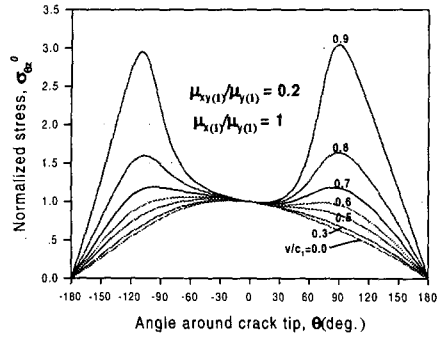
$$\sigma_{\theta z}(\theta) = \sigma_{yz} \cos \theta - \sigma_{xz} \sin \theta \quad (46)$$

인 관계에 있다. 식 (46)에 응력식 (37a,b)를 각각 대입하면  $\sigma_{\theta z}(\theta)$ 이 얻어진다. 이로부터  $\sigma_{\theta z}(\theta)/\sigma_{\theta z}(0) [\equiv \sigma_{\theta z}^0]$  즉, 원주방향응력비  $\sigma_{\theta z}^0$ 를 원주각  $\theta$ 의 함수로 그려보면 다음과 같다.

Fig. 5는 "재료 1"에서 모균열인 평행균열이 등속 $v$ 로 전파할 때, 몇몇 재료물성치에서 균열전파속도비  $v/c_1$ 에 따른 원주방향응력비  $\sigma_{\theta z}^0$ 를  $\theta$ 의 함수로 나타낸 것이다.  $\sigma_{\theta z}^0$ 값은 "재료 1"의 물성치에 영향을 받아 그 크기가 변하고 있지만, 이방성재료임에도 불구하고  $\theta = 0$ 인 축에 대하여 비교적 대칭을 유지함을 보인다. 또한,  $v/c_1$ 의 임계값 아래에서는  $\sigma_{\theta z}^0$ 가 최대인 원주각은  $\theta = 0$ 이 되고 따라서 평행균열이 지속적으로 생성될 가능성이 높음을 보인다. 한편  $v/c_1$ 의 어느 임계값 이상에서는 모균열에서 비교적 상·하 대칭인 방향에서  $\sigma_{\theta z}^0$ 가 최대값을 보이고, 이로부터 물성치 전단응력비가 원주각에 따라 그다지 변화하지 않을 경우 분기균열이 형성될 가능성이 있음을 알 수 있다. 또한  $v/c_1$ 의 임계값은  $x$ 면 전단비  $\mu_{x(1)}/\mu_{y(1)}$ 가 증가할수록 감소함을 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 5 Normalized stress,  $\sigma_{\theta z}^0$  as a function of  $\theta$  for various crack velocity ratios and given material property ratios at  $h_3 \neq 0$

### 5. 결론

본 연구는 두 개의 이방성 재료로 접합된 띠판에 계면과 일정거리를 유지하며 등속도로 전파하는 반무한 평행균열문제를 해석하여, 균열선단의 응력장과 변위장을 각각 구하였다. 이 문제해는 대칭면이 한 개인 이방성 재료에 대한 문제라는 점에서 이 결과는 등방성 및 직교이방성 재료를 포함하여 정적 및 등속문제까지 공히 적용되는 일반화된 해가 된다.

또한 띠판 상하면은 일정크기의 면외변위가 주어지고, 균열면은 자유면인 경우의 동적응력 확대계수(SIF)에 관한 폐형해를 얻었다. 두 재료의 물성치, 띠판의 기하학적 조건, 균열전파속도가 SIF에 미치는 영향을 조사하여, SIF를 줄이는 정보에 대하여 알아보았다. 특히 SIF가 영이 되는 임계균열전파속도는 등가전단비가 영이 되는

속도임을 알 수 있었고, 이로부터 임계균열전파 속도에 대한 식을 얻었다. 상호전단계수가 영인 경우의 임계균열전파속도는 전단파속도와 동일하지만, 상호전단계수가 영이 아닌 경우에 임계균열전파속도는 전단파속도보다 작음을 알 수 있었다.

변위와 응력장으로부터 에너지방출률과 SIF의 관계식을 얻었다.

균열성장 방향예측의 자료가 되는 원주방향 전단응력비를 원주각에 따라 알아보았다. 이방성재료임에도 불구하고, 응력은 모균열방향인 수평축을 중심으로 비교적 대칭성이 유지되었다. 또한 균열전파속도가, 어떤 임계값 아래에서 전단응력은 수평방향에서 최대가 되고, 반면에 임계값이상에서는 수평축을 중심으로 비교적 상하 대칭을 이루는 각에서 동시에 최대를 보였다. 이는 재료의 파괴특성이 원주각에 따라 그다지 큰변화가 없는 재료이라면, 어떤 임계값이하의 균열전파속도에서는 모균열에서 직선균열이 형성되지만, 이보다 큰 균열전파속도에서는 직선에서 벗어난 분기균열이 생성될 가능성이 높음을 의미한다.

### 참고문헌

- (1) Sih, G.C., 1977, *Elastodynamic Crack Problems, Mechanics of Fracture*, Noordhoff International Publishing, Leyden, Vol. 4.
- (2) Freund, L. B., 1990, *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press.
- (3) Chiang, C. R., 1989, "Mode III Interface Crack Propagation," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 32, pp. 545~550.
- (4) Huang, B., 1995, "Fundamental Formulas of Dynamic Stress Intensity Factors of Mode III for a Propagating Crack in a Strip," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 50, pp. 61~64.
- (5) 이광호, 황재석, 최상인, 유재용, 1996, "등방성체와 직교이방성체의 접합면에 내재된 동적모드 III 균열의 등속전파," *대한기계논문집(A)*, 제20권 제12호, pp. 3828~3837.
- (6) 박재완, 권용수, 정재택, 최성렬, 1997, "상이한 직교이방성 띠판에 대한 면외변형하의 반무한 등속 평행균열에서의 응력확대계수," *대한기계학회논문집(A)*, 제21권 제3호, pp. 447 ~ 456.
- (7) Sih, G.C., and Chen, E.P., 1981, *Cracks in Composite Materials, Mechanics of Fracture*, Vol.6, Martinus Nijhoff, Hauge.
- (8) Carrier, G.F., Krook, M. and Pearson, P.E., 1966, *Functions of a Complex Variables*, McGraw-Hill, New-York.
- (9) Nilsson, F., 1972, "Dynamic Stress-Intensity Factors for Finite Strip Problems," *Int. Journ. of Fracture*, Vol. 8, pp. 403~411.
- (10) Noble, B., 1958, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergamon Press, London.
- (11) Nishioka, T. and Atluri, N., 1983, "Path-Independent Integrals, Energy Release Rates, and General Solutions of Near-Tip Fields in Mixed-Mode Dynamic Fracture Mechanics," *Engng. Frac. Mech.*, Vol. 18, pp. 1~22.
- (12) He, M.Y. and Hutchinson, J.W., 1989, "Crack Deflection at an Interface Between Dissimilar Elastic Materials," *Int. J. Solids Structure*, Vol. 25, pp. 1053~1067.