

# 외란 관측기를 가지는 슬라이딩모드 제어기 설계

김낙인\* · 이종원\*\*  
(1999년 4월 26일 접수)

## Design of Siding Mode Controller with Perturbation Estimation

Nag-In Kim and Chong-Won Lee

**Key Words :** Sliding Mode Control(슬라이딩모드제어), Perturbation Estimation(섭동관측), Time Delay Control(시간지연제어), Nonlinear Dynamics(비선형 운동방정식).

### Abstract

Sliding mode control (SMC) incorporated with perturbation compensation is developed here to reduce the low-frequency tracking error in the presence of wide-band frequency perturbations for a nonlinear dynamic system. The control scheme is designed for estimation of low frequency perturbations with employment of the Time Delay Control and low-pass filter. It is shown that the SMC with perturbation compensation is far superior to the conventional SMC in tracking control of the dynamic systems under model uncertainties and external disturbance conditions.

### 1. 서론

슬라이딩 모드 제어는 시스템에 인가되는 외란 및 운동방정식의 모형화 과정 중 발생하는 오차로 대변되는 섭동에 대해 강건한 특성을 가지는 제어 방법이다. 한편, 슬라이딩 모드 제어에서는 제어과정 중 슬라이딩 표면에서 리아노프 및 뱅뱅형태의 제어력을 액추에이터에서 발생하도록 하는데, 이러한 뱅뱅 형태의 제어력은 채터링 현상을 발생시킨다. 그 결과 시스템의 파손 및 제어기능의 저하를 가져올 수 있으므로 이러한 뱅뱅 제어력을 연속화하는 방법이 일반적으로 도입되어 사용되고 있다. 그러나 이러한 연속화 기능은 슬라이딩 모드 제어시 추적제어 성능을 악화시키며 섭동이 존재할 때 슬라이딩 함수를 그 표면으로 보내지 못하는 주 원인이 되기도 한다.<sup>(1,2)</sup>

그 동안, 슬라이딩 모드 제어 시 섭동 관측기를 도입하여 추종오차를 감소시키기 위한 많은 노력이 있었다. 섭동 관측기는 운동방정식에 큰 물성

치 오차가 있을 때 능동제어 관점으로 예측할 수 있지만,<sup>(2,3)</sup> 제어시스템의 운동방정식이 복잡하고 외란이 큰 경우에는 그 효과가 많이 상쇄된다. 시간지연제어 방법(time delay control)을 이용하여 섭동을 예측하기도 하나, 제어시스템 운동방정식의 최고차 항까지의 상태변수를 필요로 하고 있어서 센서 신호에 노이즈가 포함되는 경우, 실제 적용하기에는 많은 문제점을 가지고 있다.<sup>(4-6)</sup> 섭동 관측기를 이용한 방법은 아니지만, 슬라이딩 모드 제어에서 섭동에 대한 정보를 이용한 시 변환 경계층 변환 방법을 이용해서 제어 오차를 줄일 수도 있다.<sup>(2)</sup> 그러나 이 방법은 섭동 방정식을 필요로 하고, 저주파수 섭동에 대해서는 그 효과를 발휘하지 못한다. 시 변환 경계층 방법을 구현하는 과정 중에 Kachroo<sup>(7)</sup> 등은 제어시스템의 안정화 특성(attraction condition)에 대한 증명 없이 추종 오차를 줄일 수 있는 필터를 제안하였다. 하지만 이 방법은 특정주파수의 섭동에 의해서 발생하는 추종 오차는 감소시킬 수 있으나, 일정 영역의 주파수대를 가지고 있는 섭동에 대해서는 적절한 해결 방법이 되지 못한다.

본 연구에서는 종래의 연속화된 슬라이딩모드 제어에 저주파수대의 섭동을 관측하는 섭동 관측기를 첨가하여 제어과정 중 발생하는 추종 오차를

\* 회원, 대우중공업(주) 중앙 연구소 CAD/NVH 팀  
\*\* 회원, 한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어센터  
E-mail : cwlee@novic.kaist.ac.kr  
TEL : (042)869-3016 FAX: 042-869-8220

최소화시킬 수 있는 연구를 하였다. 일반적으로 운동방정식을 기반으로 하는 제어방법에서 운동방정식에서 모형화되지 않은 섭동은 제어시스템에서 추적오차를 발생하는 주 원인이 된다. 그러므로 이론적인 섭동 방정식을 모형화된 운동방정식에 대한 항으로 모형화하고 섭동 관측기에 의해 모형화된 이론적인 섭동을 예측하여 슬라이딩모드 제어기에 사용하여 섭동으로 야기된 저주파수 추종 오차를 추가적으로 감소시키는데 목적이 있다. 결과적으로 섭동 관측기의 형태는 슬라이딩 함수에 대한 비례 및 적분 형태를 갖고 있어 실시간 제어 시스템에 간단히 적용시킬 수 있다. 제안된 슬라이딩 모드 제어기를 1자유도 및 2자유도 비선형 시스템에 각각 적용하여 모의 제어실험을 한 결과 저주파수대의 외란이 인가된 상황에서 고전적 제어기에 비해 우수한 제어성능을 보여주었으며, 인가되는 외란 역시 충실히 관측할 수 있었다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 고전적 슬라이딩모드 제어

본 장에서는 섭동이 있는 2차 비선형 방정식에 대한 고전적 슬라이딩 모드 제어기를 유도하기로 한다. 즉

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t)) + \Delta f(x(t), \dot{x}(t)) + [b(x(t)) + \Delta b(x(t))]u(t) + d(t) \quad (1)$$

여기에서  $u(t) \in R^{N \times 1}$ 는 제어력 벡터,  $x(t) \in R^{N \times 1}$ 는 운동방정식의 변위 벡터,  $\dot{x}(t)$  및  $\ddot{x}(t)$ 는 각각의  $N \times 1$  속도 및 가속도 벡터들이다.  $\Delta f \in R^{N \times 1}$  및  $\Delta b \in R^{N \times N}$ 는 각각 비선형 운동방정식 부분  $f \in R^{N \times 1}$  및 제어 이득  $b \in R^{N \times N}$ 에 대한 섭동항이며,  $d \in R^{N \times 1}$ 는 외란 벡터이다. 이러한 모형화할 수 없는  $\Delta f, \Delta b$  및  $d$ 는 다음과 같은 최대 절대값을 갖는다고 가정을 한다.

$$|\Delta f_j| \leq F_j, \quad |\Delta b_{jk}| \leq B_{jk}, \quad |d_j| \leq D_j, \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

여기에서  $|\cdot|$ 은 절대값을 의미한다. 슬라이딩 함수  $s$ 는 일반적으로 추적오차로 구성된 Hurwitz 다항식으로 선택되며 다음과 같이 정의된다.

$$s_j = \dot{e}_j + \lambda_j e_j \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

여기에서  $e_j = x_j - x_{d,j}$ 이고, 양 정수  $\lambda$ 는 상태 공간에서 슬라이딩 함수의 기울기이며,  $x_j$  및

$x_{d,j}$ 는 제어 시 발생된 실제 값과 실제 값에 대한 요구 값이다.

운동방정식 (1)에 대한 슬라이딩모드 제어법칙은 다음과 같이 모형화 할 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$u = b^{-1}[\ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - \dot{f} - K \operatorname{sgn}(s)] \quad (4)$$

여기에서 안정화 조건은

$$K = \operatorname{diag}([k_1 \ k_2 \ \dots \ k_N]), \quad (5)$$

$$k_j > \max \left| F_j + D_j + \sum_{k=1}^N B_{jk} u_k \right|, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\operatorname{sgn}(s) = [\operatorname{sgn}(s_1) \ \operatorname{sgn}(s_2) \ \dots \ \operatorname{sgn}(s_N)]^T, \\ \lambda = \operatorname{diag}([\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_N])$$

여기에서  $\operatorname{diag}(\bullet)$ 는 대각행렬을 의미한다. 참고로 여기에서 운동방정식 (1)에 제어법칙 (4)를 적용하면  $s$  방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{s}_j = -k_j \operatorname{sgn}(s_j) + \Delta f_j + d_j + \sum_{k=1}^N \Delta b_{jk} u_k, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

여기서  $\sum_{k=1}^N \Delta b_{jk} u_k$ 는 연성된 섭동항이다.

일반적으로 슬라이딩 모드 제어기 설계에서는 제어기의 전환이 무한히 빠르며 액추에이터의 제어특성이 매우 빠르다는 가정을 전제로 한다. 실제로는 연산기에서의 제어 법칙 계산을 위한 시간과 실제 액추에이터의 한정된 제어 성능때문에 이러한 가정의 실현은 거의 불가능하다. 그 결과 고전적인 슬라이딩 모드 제어를 실제 시스템에 적용할 때 슬라이딩 및 정상상태모드에서 채터링을 피할 수는 없다. 일반적으로 사용되는 채터링 저감 방법으로는 고전적인 슬라이딩 모드에서 사용하는 릴레이함수를 다음과 같이 포화함수로 전환하여 사용하기도 한다. 즉,

$$\operatorname{sat}(s, s_0) = \operatorname{sgn}(s) \quad |s| \geq s_0 \\ = s/s_0 \quad |s| < s_0. \quad (7)$$

여기에서 양상수  $s_0$ 는 슬라이딩면 주위의 경계층 두께이다.<sup>(2)</sup>

섭동이 존재하는 슬라이딩 모드 제어기의  $s$  운동방정식은 식 (6)과 다르게 다음과 같이 유도될 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$\dot{s}_j = -k_j \operatorname{sat}(s_j, s_{0,j}) - p_j s_j + \Delta f_j + d_j + \sum_{k=1}^N \Delta b_{jk} u_k, \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

그 결과 섭동이 존재할 때 슬라이딩면까지도

달하는 시간은 훨씬 감소시킬 수 있으며  $s$  방정식 (8)로부터 다음과 같은 슬라이딩 모드 제어법칙을 유도할 수 있다.

$$u = b^{-1}[\ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - f - Ps - Ksat(s, s_o)] \quad (9)$$

식 (9)와 같은 제어법칙을 사용한 슬라이딩 모드 제어는 양정수행렬  $P = diag(p_1, p_2, \dots, p_N)$ 에 대해 안정된 특성을 갖으며 슬라이딩 함수가 그 면으로 부터 멀리 떨어져 있을 경우, 식 (4)의 제어법칙을 적용 했을 때보다 슬라이딩 면에 도달하는 시간이 매우 짧다. 하지만 이러한 방법은 슬라이딩 함수를 그면 근처로 빨리 이동시키기 위한 방법으로는 효과를 가지나 슬라이딩면 가까이 머무르게 하는 적절한 방법은 아니다. 그러므로 식 (8)의  $s$ 를 좀더 슬라이딩 표면에 밀착 시키기 위해서는 시스템에 인가되는 모형화되지 않은 섭동을 예측, 보상할 필요가 있다.

2.2 섭동 보상기를 가지고 있는 슬라이딩모드 제어기 설계

운동방정식 (1)은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t)) + b(x(t))u(t) + P_E(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (10)$$

여기에서 모형화 되지 않은 이론적인 섭동벡터  $P_E$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$P_E(x(t), \dot{x}(t), t) = \Delta f(x(t), \dot{x}(t)) + \Delta b(x(t))u(t) + d(t)$$

실제 시스템에 인가되는 섭동  $P_E$ 는 예측되어 알 수 있는 항,  $\Phi$ , 와 나머지 잔류 항,  $\Delta P_E$ , 로 다음과 같이 구분할 수 있다.

$$P_E = \Phi + \Delta P_E \quad (11)$$

그 결과 운동방정식 (10)은 다음과 같이 표현할 수 있으며

$$\ddot{x} = f + bu + \Phi + \Delta P_E \quad (12)$$

다음과 같은 제어법칙이 유도된다.

$$u = b^{-1}[\ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - f - Ps - \Phi - K_r sat(s, s_o)] \quad (13)$$

여기에서 경계층 안정화 조건은 다음과 같이 정의 된다.

$$K_r = diag(k_{r,1}, k_{r,2}, \dots, k_{r,N}), \quad k_{r,j} > \max|\Delta P_{E,j}|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

식 (13)의 제어시스템 구성은 Fig. 1과 같다.

2.3 섭동 관측기

운동방정식 (10)은 다음과 같이 모형화 부분과 섭동 부분으로 나눌 수 있다.

$$\ddot{x}_n(t) = b(x(t))u_n(t) + f(x(t), \dot{x}(t)) \quad (15.a)$$

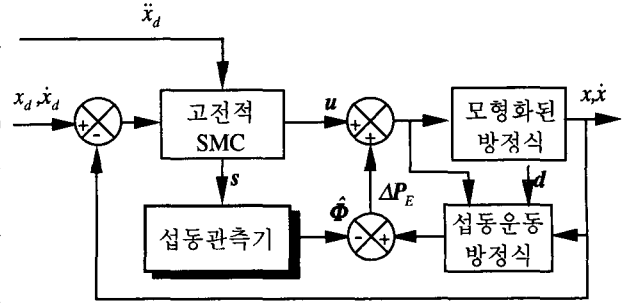


Fig. 1 Structure of proposed SMC

$$\ddot{x}_p(t) = b(x(t))u_p(t) + P_E(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (15.b)$$

여기에서  $x = x_n + x_p$ 이며  $x_n$ 과  $x_p$ 는 각각 모형화 부분과 섭동부분의 운동방정식의 변위벡터들이며  $u_n$ 과  $u_p$ 은 각각의 제어힘벡터들이다. 경계층내에서 Filippov's 등가힘은 모형화된 운동방정식을 완전히 보상 할 수는 있으나( $\dot{s} = 0$ ), 섭동 운동방정식 (15.b)에 기인한 영향으로 시스템의 슬라이딩 함수가 그 면에 머무는 것을 허용하지 않는다( $s \neq 0$ ).<sup>(1)</sup> 따라서, 제어과정 중 발생하는  $s$ 는 경계층 내에서 섭동 운동방정식의 상태변수로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$s_j = \dot{x}_{p,j} + \lambda_j x_{p,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

본 연구에서는 넓은 주파수대역 특성을 가지는 섭동  $P_E$ 가 실제로 존재한다는 가정하에 간접적으로 섭동을 예측할 수 있는 방법을 도입하였다. 만일 섭동 운동방정식 (15.b)를 위해 잘 설계된 제어기가 존재하고 이 제어기에서 제어힘  $u_p$ 를 발생하여 시스템의 상태변수 오차를 0으로 보낼 수 있다면  $bu_p$ 는 시스템에 인가되는 이론적인 실제 섭동  $P_E$ 를 충실히 추종할 것이다. 그러므로  $bu_p$ 를 이용하여 이론적인 섭동  $P_E$ 를 간접적으로 예측할 수 있게 되는데, 이점이 본 연구가 기존의 연구와 다른점이다.<sup>(4,6)</sup> 한편, 일반적으로 적절한 제어기 설계에 의해 시스템에 인가되는 대부분의 저주파수대의 섭동에 의한 추종오차는 거의 완전히 극복할 수 있지만, 고주파수대의 추종오차까지 완전히 제거할 수 있는 완전한 추종제어를 구현할 수 있는 이상적인 제어기를 설계하는 것은 거의 불가능하다. 이 경우, 제어력은 결국 시스템에 인가되는 저 주파수대의 실제적인 섭동을 반영하게 된다.

식 (15.b)는 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$\ddot{x}_{p,j}(t) = P_{E,j}(t) - \Phi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

여기서  $\Phi_j = -\sum_{k=1}^N b_{jk} u_{p,k}$ 으로 실재는 원치 않는

고주파수항들을 가질 수 있으므로 이를 제거하기 위한 다음과 같은 일차 저주파 통과 필터인 관측기를 제안한다.

$$\hat{\Phi}_j(t) + \omega_{n,j} \hat{\Phi}_j(t) = \omega_{n,j} \Phi_j(t), \quad j=1, 2, \dots, N \quad (18)$$

여기서  $\hat{\Phi}_j$ 는  $\Phi_j$ 가 저주파 통과 필터 된 값이며,  $\omega_{n,j}$ 는 필터 주파수로서 예측하고자 하는 섭동의 한계주파수가 된다. 한편, 다음과 같이 섭동에 대한 모형 운동방정식을 고려하면

$$\ddot{x}_{p,j} + a_{j1} \dot{x}_{p,j} + a_{j2} x_{p,j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (19)$$

여기에서, 상수  $a_{j1}$  및  $a_{j2}$ 는 슬라이딩면 근처에서 섭동 운동방정식의 응답이 점근적으로 이동하도록 적절한 값을 선택한다. 식 (17)에 식 (19)를 대입하면

$$\Phi_j(t) = P_{Ej}(t) + a_{j1} \dot{x}_{p,j}(t) + a_{j2} x_{p,j}(t), \quad j=1, 2, \dots, N \quad (20)$$

여기에서  $\Phi_j(t)$ 를 구하기 위해  $P_{Ej}(t)$ 에 대한 정보가 필요하게 되는데, 이를 위해 최소한의 운동방정식을 이용해 저주파수 대역특성의 운동방정식과 섭동을 가진 시스템에 적절한 제어방법인 시간 지연 제어방법(Time Delay Control: TDC)을 도입하기로 한다.<sup>(9,10)</sup> 이 경우, 적용되는 TDC는 충분히 작은 시간지연  $\Delta t$ 에 대하여 다음과 같은 관계를 가진다.

$$P_{Ej}(t) \equiv P_{Ej}(t - \Delta t) = \ddot{x}_{p,j}(t - \Delta t) + \Phi_j(t - \Delta t), \quad j=1, 2, \dots, N \quad (21)$$

한편, 일반적으로 운동방정식 (10)은 넓은 주파수대의 주파수 특성을 가지게 되어, 식 (21)을 유도하기 위한 가정에 위배된다. 이 경우, 간단하면서도 효과적인 대처방법으로는 저주파수 대역통과 필터를 이용해서  $P_{Ej}$ 에 존재하는 고주파수 성분을 제거하는 것이다. 결과적으로 식 (21)은 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\hat{P}_{Ej}(t) \equiv \hat{P}_{Ej}(t - \Delta t) = \hat{\ddot{x}}_{p,j}(t - \Delta t) + \hat{\Phi}_j(t - \Delta t) \quad (22)$$

여기에서  $\hat{P}_{E,j}$ ,  $\hat{\ddot{x}}_{p,j}$  및  $\hat{\Phi}_j$ 는  $P_{E,j}$ ,  $\ddot{x}_{p,j}$  및  $\Phi_j$ 에 대한 각각의 저주파수필터 통과 값이다. 식 (22)와 식 (20)을 식 (18)에 대입하면 충분히 작은  $\Delta t$ 와  $\hat{\Phi}_j$ 에 대해 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\hat{\Phi}_j(t) \equiv k_{p,j} \left[ s_j(t) + h_j \int s_j(t) dt \right] \quad (23)$$

식 (18), (20), (22) 및 (23)의 유도과정은 부록 A에 상세하게 설명되어 있다.

2.4 섭동이 보상된 슬라이딩모드 제어기의 해석  
식 (23)을 식 (13)에 대입하면 경계층 내에서의

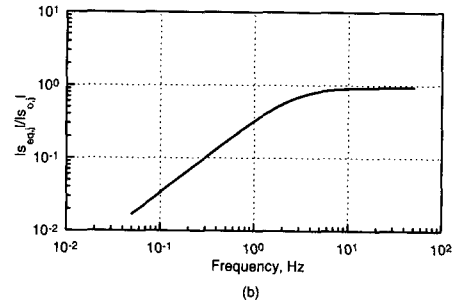
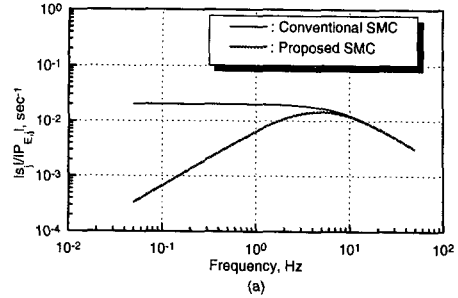


Fig. 2 Typical (a)  $s$  dynamics and (b) effective boundary layer thickness of the proposed SMC

제어법칙은  $\frac{2\pi}{\Delta t} \gg \lambda > \omega_n$ 에 대해서 다음과 같이 구해진다.

$$u = b^{-1} \left[ \ddot{x}_d - f - \lambda \dot{e} - K_p \text{sat}(s, s_o) - K_p s - K_p H \int s dt \right] \quad (24)$$

여기에서

$$K_p = \text{diag} \left( k_{p,1} \quad k_{p,2} \quad \dots \quad k_{p,N} \right),$$

$$H = \text{diag} \left( h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_N \right).$$

이 제어법칙을 운동방정식 (12)에 적용하면 다음과 같은  $s$  방정식을 유도할 수 있다.

$$\dot{s}_j + \frac{k_{r,j}}{s_{o,j}} s_j = \Delta P_{E,j}, \quad |s_j| \leq s_{o,j}, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (25.a)$$

또한 운동방정식 (10)에 대해서는 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{s}_j + \left( \frac{k_{r,j}}{s_{o,j}} + k_{p,j} \right) s_j + k_{p,j} h_j \int s_j dt = P_{E,j}, \quad |s_j| \leq s_{o,j},$$

$$j=1, 2, \dots, N \quad (25.b)$$

라플라스 영역에서 이론적인 섭동과 예측된 섭동의 관계는 다음과 같다.

$$\hat{\Phi}_j(p) = \frac{k_{p,j}(p + h_j)}{p^2 + \left( \frac{k_{r,j}}{s_{o,j}} + k_{p,j} \right) p + h_j k_{p,j}} P_{E,j}(p),$$

$$j=1, 2, \dots, N \quad (26)$$

여기에서 주목할 점은 제안된 슬라이딩 모드 제어기에서의  $s$  는 Fig. 2(a)와 같이 대역통과 필터 특성을 가지고 있음을 알 수 있다. 즉 제안된 제어방법은 고주파수 영역에서는 기존의 슬라이딩모드 제어와 동일하고 저 주파수대에서는 섭동보상기에 의해 상대적으로 낮은  $s$  응답성을 가진다. 그 결과 섭동 보상 기능은 저주파수대의 추종오차 감소에 큰 영향이 미침을 알 수 있다.

라프라스 영역에서의 등가 경계층 두께는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$|H_{c,j}(p, s_{eq,j}(p))| = |H_{p,j}(p, s_{o,j})| \quad (27)$$

여기에서 좌변과 우변의 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$H_{c,j}(p, s_{eq,j}(p)) = \frac{1}{p + k_j/s_{eq,j}(p)}$$

$$H_{p,j}(p, s_{o,j}) = \frac{p}{p^2 + (k_{r,j}/s_{o,j} + k_{p,j})p + h_j k_{p,j}}$$

$H_{c,j}(p, s_{eq,j}(p))$  및  $H_{p,j}(p, s_{o,j}(p))$  는 각각 고전적인 슬라이딩모드 제어관점과 제안된 슬라이딩 모드 제어관점에서 입력되는 섭동에 대한 슬라이딩 함수이다. Fig. 2(b)에 보인 바와 같이,  $s_{eq,j}$  는 기존의 고정 경계층 방법에 비교해서 저주파수대에서 효과적으로 경계층 두께를 감소시키는 결과를 가져온다. 결과적으로 제안된 슬라이딩 모드 제어는 섭동에 대한 운동방정식의 정보를 사용하지 않고도 섭동의 주파수 특성에 따라 연속적으로 등가 경계층 두께를 변화시키는 것과 같은 효과를 가지고 있다.

제안된 슬라이딩 모드 제어는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다. 첫째, 슬라이딩 함수는 초기값에서 한정된 시간내에 경계층내에 도달해야 하며 그 결과 슬라이딩 함수가 경계층 밖에 존재할 때 이는 다음과 같은 조건을 필요로 한다.

$$k_j > \max \left\{ F_j + D_j + \sum_{k=1}^N B_{jk} u_k \right\}, \quad |s_j| > |s_{o,j}|, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (5')$$

그리고 슬라이딩 함수가 경계층 내에 일단 도달하면 다음과 같은 조건을 필요로 한다.

$$k_{r,j} > \max |\Delta P_{E,j}|, \quad |s_j| \leq |s_{o,j}|, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (14)$$

조건 (5')의 기본적인 가정은 기존의 슬라이딩 모드 제어기에서 사용되는 가장 악조건상태의 경계층 안정화 조건이다. 제안된 슬라이딩모드 제어기에서 식 (26)에서 나타난 바와 같이 섭동의 크기에 제한을 받는것이 아니라 섭동이 가지고 있는 주파수 특성에 제한을 갖고 있음을 알 수 있으며,

예측된 섭동은 모형화된 운동방정식에 인가되는 저주파성분의 섭동에 대해 적절히 보상한다. 그 결과 저주파수대의 섭동은  $k_{r,j}$  를 결정하는데 있어서 영향을 미치지 않으므로,  $k_{r,j}$  는 일반적으로  $k_j$  에 비해 작은 값을 가지고 있을 것이며 극한조건인 (5')은 완화될 것으로 예상된다.

### 3. 모의 제어 실험

제안된 슬라이딩 모드 제어기를 추종제어 특성과 섭동 예측능력을 평가하기 위해 2가지의 시스템에 대해 모의 제어실험을 하였다. 첫번째는 간단한 1자유도 2차 비선형 시스템의 추적제어이고 두번째는 외란이 입력되는 2자유도 운동장치의 추적제어에 관한 것이다.

#### 3.1.1 자유도 2차 시스템<sup>(11)</sup>

다음과 같은 간단한 2차 시스템을 고려해보자.<sup>(11)</sup>

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x}^2 \cos 3x = u \quad (28)$$

여기서  $x$  는 변위,  $u$  는 제어 입력이고, 참고문서 (11)에서 가정한 바와 같이  $a(t)$  는  $1 \leq a(t) \leq 2$  와 같은 영역을 가지고 있다고 하면 식 (28)을 다음과 같이 간략화할 수 있다.<sup>(11)</sup>

$$\ddot{x} + 1.5\dot{x}^2 \cos 3x = u \quad (29)$$

그 결과 식 (2)에서

$$F = 0.5\dot{x}^2 |\cos 3x|, \quad B = 1, \quad D = 1 \quad (30)$$

로 정의할 수 있다. 운동방정식 (29)에 대한 슬라이딩 함수 및  $sgn$  함수를 사용한 슬라이딩 모드 제어법칙은 다음과 같다.

$$u = (\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) + 1.5\dot{x}^2 \cos 3x - (0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| + \eta) sgn(s) \quad (31)$$

여기서 슬라이딩 함수와 안정화 조건은 다음과 같다.

$$s = \dot{e} + \lambda e, \quad k \geq \max |F + D + Bu| + \eta, \quad (32)$$

여기에서  $\eta$  는 양의 실수 값이며 제어법칙 (31)에 대한 연속화된 제어법칙은 다음과 같다.

$$u = (\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) + 1.5\dot{x}^2 \cos 3x - (0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| + \eta) \text{sat} \left( \frac{s}{s_o} \right) \quad (33)$$

여기서 시 변환 경계층 방법을 도입하면 제어법칙과 경계층 방정식은 다음과 같이 정의할 수 있다.<sup>(11)</sup>

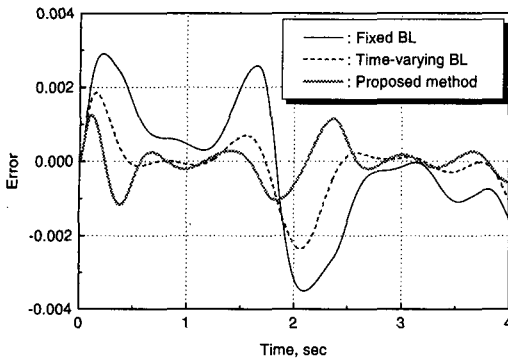


Fig. 3 Tracking errors: 2<sup>nd</sup> order nonlinear system

$$u = (\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) + 1.5\dot{x}^2 \cos 3x - (0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| + \eta - \dot{s}_o) \text{sat}(s/s_o) \quad (34)$$

$$\dot{s}_o = -\lambda s_o + (0.5\dot{x}_d^2 |\cos 3x_d| + \eta) \quad (35)$$

여기서 초기속도  $\dot{x}_d(0)=0$ 으로 하고 초기 경계층 두께  $s_o(0)=\eta/\lambda$ 로 하였다. 운동방정식 (28)에 대한 요구 신호를  $x_d = \sin(\pi/2)$ 로 하였을 때 제어법칙 (24), (33) 및 (34)를 각각 적용했을 경우, 추적 오차는 Fig. 3과 같다. 각각의 제어기에 대해 모의 실험에 사용된 제어변수는  $h = \lambda = 20, k = 1.38, k_p = 9.3, \eta = 0.1, p = 0$  및 고정된 경계층 두께  $s_o = \eta/\lambda$ 로 하였다. 모의 실험에서 나타난 결과에서 보듯이 시변한 경계층 방법은 경계층이 변화되지 않는 방법에 비해서 전체적인 추종오차는 감소 하였으나 저주파수대의 추적오차가 상당히 감소된 제안된 제어법칙에 비해서는 큰 추종 오차를 허용하였다. 그리고 경계층 변환 방법은 모형화되지 않은 운동방정식 부분에 대한 정보 (30)을 필요로 하였으나 제안된 방법은 예측할 섭동의 최대 주파수값만을 필요로 하므로 적용면에서 좀더 편의성을 가지고 있다.

### 3.2 2 자유도 운동장치

제안된 슬라이딩모드 제어를 개루프 2 자유도 운동장치에 적용하여 그 제어성능을 평가하여 보았다. 2 자유도 운동장치에 대한 운동 방정식은 2 개의 관절부의 토크에 의해 제어되며 참고문헌 (4)에서 예시된 운동방정식 및 모의 시험조건을 기반으로 하였으며 각 액추에이터에 추가적으로 다음과 같은 저속의 외란이 입력된다고 가정하였다.

$$d(t) = \begin{bmatrix} -3\sin(2t)\sin(3.2t) + 2(1 - \cos(2(t-2)\pi)) + 2\text{sgn}(\dot{\theta}_1) \\ \sin(1.5t)\sin(2.8t) - (1 - \cos(2(t-2)\pi)) + 2\text{sgn}(\dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (36)$$

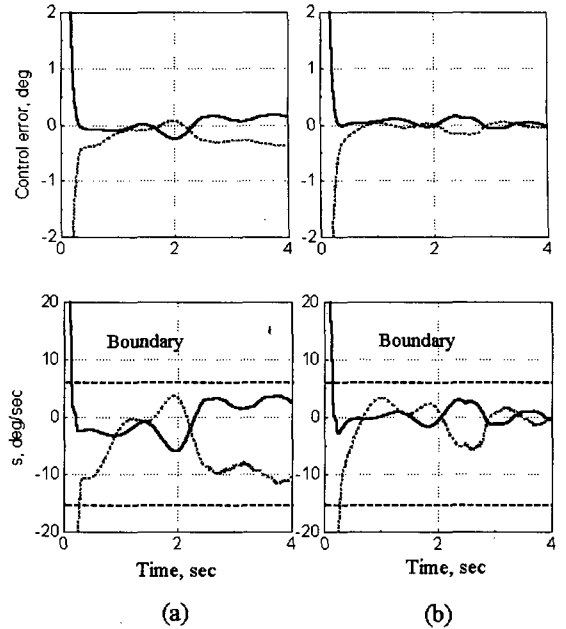


Fig. 4 Comparison of control performance between (a) Conventional and (b) proposed SMCs: 2 DOF motion serial manipulator.

( — : Joint 1, ..... : Joint 2)

식 (36)에 설정된 외란 외에 모의 제어실험 중 참고문헌(4)에서 정의한 바와 같이 모형화된 운동 방정식에서 물성치의 변화를 허용하고 제어기 설계에서는 원심력항을 고려하지 않았다. 모의실험은 고전적 슬라이딩모드 제어에 연속화를 한 제어법칙 (14)과 제안된 제어법칙 (24)를 사용하였다. 본 모의 실험에 사용된 제어 인자는 다음과 같다.  $\lambda_1 = 20 \text{ rad/sec}, \lambda_2 = 30 \text{ rad/sec}, s_o = 0.2 \text{ rad/sec}, p_1 = p_2 = 20 \text{ sec}^{-1}, k_1 = 10 \text{ rad/sec}^2, k_2 = 30 \text{ rad/sec}^2, k_{p1} = 2467 \text{ sec}^{-1}, k_{p2} = 2467 \text{ sec}^{-1}, h_1 = 20 \text{ sec}^{-1}, h_2 = 30 \text{ sec}^{-1}$  이다.

모의 제어실험에 사용된 2 자유도 운동장치의 요구 신호는 다음과 같다.

$$\theta_{d1}(t) = \begin{cases} -70^\circ & t = 0 \\ -90^\circ + 52.5^\circ(1 - \cos(1.26t)) & t \leq 2.5 \\ 15^\circ & t > 2.5 \end{cases}$$

$$\theta_{d2}(t) = \begin{cases} 160^\circ & t = 0 \\ 170^\circ - 60^\circ(1 - \cos(1.26t)) & t \leq 2.5 \\ 50^\circ & t > 2.5 \end{cases}$$

운동장치의 초기조건은 다음과 같다.

$$\theta_1(0) = -70^\circ, \theta_2(0) = 160^\circ, \dot{\theta}_{d1}(0) = \dot{\theta}_{d2}(0) = 0, \ddot{\theta}_{d1}(0) = \ddot{\theta}_{d2}(0) = 0.$$

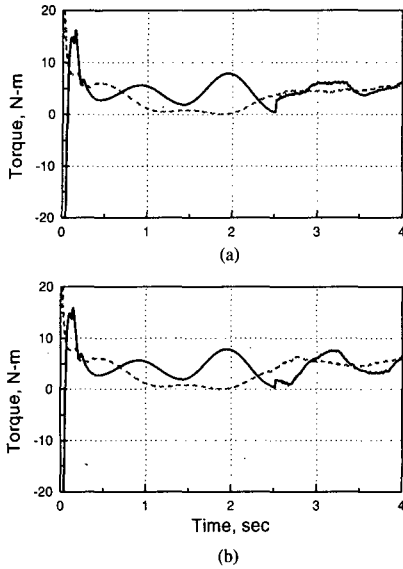


Fig. 5 Control input for (a) conventional and (b) proposed SMCs: 2 DOF serial manipulator. ( — :  $\tau_1$ , - - - :  $\tau_2$  )

Fig. 4는 각각의 조인트에 대한 추종오차 및 슬라이딩 함수이며 Fig. 5는 각각의 조인트에 입력된 제어력이다. 포화함수를 사용한 고전적 방법과 제안된 슬라이딩모드 제어 모두 제어 채터링 현상은 발생되지 않았다. 하지만 제안된 제어법칙은 고전적 방법에 대해 인가된 섭동에 강건한 특성을 가지고 추종 오차에서 현저한 감소를 보여주었다. Fig. 6에서와 같이 시스템에 인가된 대부분의 저주파 섭동은 충실히 예측되어 보상되었음을 알 수 있고 그 결과 저주파수 섭동으로 기인된 추종 오차는 현저히 감소되었음을 확인할 수 있었다. 그 결과 예측되지 못한 잔류 섭동은 원래의 큰 섭동 대신 시스템에 인가되어 추적 오차의 주 원인이 되었음을 알 수 있다.

4. 결론

저주파수 특성을 가지고 있는 섭동이 비선형 시스템에 인가되는 환경에서 고성능 추종제어를 구현하기 위해 기존의 슬라이딩 모드 제어를 개선한 제어기를 제안하였다. 제안된 제어기법에는 시간 지연제어 기법의 개념을 도입하여 저주파수 형태의 추종 오차를 개선시키기 위해 고전적 슬라이딩 모드 제어기에 섭동을 예측하여 보상하는 기능이 추가되었다. 유도된 섭동 관측기는 슬라이딩 함수에 대한 비례 및 적분항으로 구성되었으며, 그 결

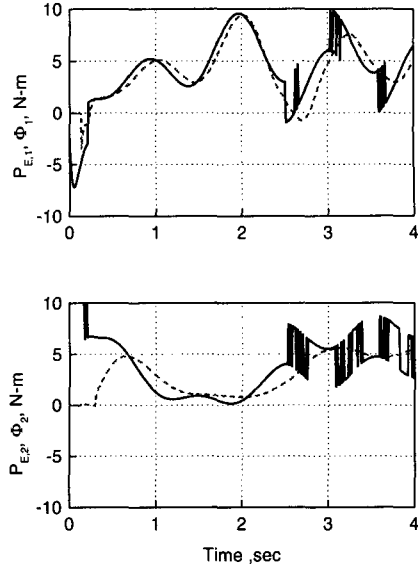


Fig. 6 Actual and estimated perturbations: 2 DOF serial manipulator. ( — :  $P_E$ , - - - :  $\hat{\Phi}$  )

과 실시간 제어 시스템에 쉽게 적용할 수 있었다. 제안된 제어기의 제어 특성을 확인하기 위해 간단한 1자유도 2차 시스템과 2자유도 운동장치에 각각 적용하여 모의 제어실험을 하였다. 1자유도 비선형 시스템에 적용결과 섭동에 대한 운동방정식을 필요로 하는 기존의 시변환 슬라이딩 모드 제어기에 비해 섭동에 대한 최소한의 정보를 필요로 하면서도 추종오차가 작았으며, 특히 저주파수 대의 섭동으로 인한 추종 오차를 충분히 제거하였다. 2자유도 운동장치에서 운동방정식에서 발생하는 모형화 오차 및 외란에 의해서 발생하는 추종 오차 역시 기존의 연속화된 슬라이딩 모드 제어기에 비해 상당히 감소하였다. 이러한 이유는 제어 시스템에 인가되는 저주파수 형태의 섭동은 제안된 섭동 관측기로 슬라이딩 함수가 경계층 내에 존재할 때 충실히 관측될 수 있어 제안된 제어기에서 적절히 보상되었기 때문이다.

참고문헌

(1) Slotine, J.-J. E., 1984, "Sliding Controller Design for Non-Linear Systems," *International Journal of Control*, Vol. 40, No. 2, pp. 421~434.  
 (2) Slotine, J.-J. E. and Coetsee, J. A., 1986, "Adaptive Sliding Mode Controller Synthesis for Non-Linear Systems," *International Journal of Control*, Vol. 43, No. 6, pp. 1631~1651.

- (3) Stepanenko, Y., and Su, C.-Y., 1993, "Variable Structure Control of Robot Manipulators with Nonlinear Sliding Manifolds," *International Journal of Control*, Vol. 58, No. 2, pp. 285~300.
- (4) Elmali, H., and Olgac, N., 1992, "Sliding Mode Control with Perturbation Estimation: A New Approach," *International Journal of Control*, Vol. 56, No. 4, pp. 923~941.
- (5) Tesfaye, A. and Tomizuka, M., 1996, "Robust Digital Tracking with Perturbation Estimation via the Euler Operator," *International Journal of Control*, Vol. 63, No. 2, pp. 239~256.
- (6) Elmali, H., and Olgac, N., 1996, "Implementation of Sliding Mode Control with Perturbation Estimation (SMCPE)," *IEEE Transaction on Control System Technology*, Vol. 4, No. 1, pp. 79~85.
- (7) Kachroo, P., and Tomizuka, M., 1996, "Chattering Reduction and Error Convergence in the Sliding-Mode Control of a Class of Nonlinear Systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 41, No. 7, pp. 1063~1068.
- (8) Gao, W., and Hung, J. C., 1993, "Variable Structure Control of Nonlinear Systems: A New Approach," *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 1, pp. 45~55.
- (9) Youcef-Toumi, K., and Ito, O., 1990, "A time Delay Controller for Systems with Unknown Dynamics," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 112, pp. 133~142.
- (10) Youcef-Toumi, K., and Wu, S.-T., 1992, "Input/Output Linearization Using Time Delay Control," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 114, pp. 10~19.
- (11) Slotine, J.-J. E., 1991, "Applied Nonlinear Control," *Prentice Hall*, p. 285.
- (12) Ogata, K., 1987, "Discrete-Time Control Systems," *Prentice Hall International Editions*, pp. 311~314.

### APPENDIX : 섭동 관측기 유도

식 (22)를 식 (20)에 대입하면 연속시간 영역에서 다음과 같다.

$$\Phi_j(t) = \hat{\Phi}_j(t - \Delta t) + \hat{\tilde{x}}_{p,j}(t - \Delta t) + a_{j1}\hat{x}_{p,j}(t) + a_{j2}x_{p,j}(t) \quad (A1.a)$$

그리고 이산 시간 영역에서는 다음과 같다.

$$\Phi_j(nT) = \hat{\Phi}_j((n-1)T) + \hat{\tilde{x}}_{p,j}((n-1)T) + a_{j1}\hat{x}_{p,j}(nT) + a_{j2}x_{p,j}(nT) \quad (A1.b)$$

여기에서  $n$  은 정수이고  $T(=\Delta t)$ 는 샘플링 시간이다.

이산시간 영역에서 관측기 (18)은 다음과 같이 표현될 수 있다.<sup>(12)</sup>

$$\hat{\Phi}_j(nT) = \frac{\hat{\Phi}_j((n-1)T)}{1 + T\omega_{n,j}} + \frac{T\omega_{n,j}\Phi_j(nT)}{1 + T\omega_{n,j}} \quad (A2)$$

그리고 식 (A1.b)를 식 (A2)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{T} \left\{ \hat{\Phi}_j(nT) - \hat{\Phi}_j((n-1)T) \right\} = \frac{\omega_{n,j}}{1 + T\omega_{n,j}} \left\{ \hat{\tilde{x}}_{p,j}((n-1)T) + a_{j1}\hat{x}_{p,j}(nT) + a_{j2}x_{p,j}(nT) \right\} \quad (A3)$$

여기에서 좌측 항은 일차 이산 미분형태이며, 낮은 주파수 특성의  $\hat{\Phi}_j$ 와 충분히 작은  $T$ 에 대하여 다음과 같은 연속 미분으로 전환할 수 있다.

$$\frac{d\hat{\Phi}_j(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hat{\Phi}_j(nT) - \hat{\Phi}_j((n-1)T)}{T} \right\} \quad (A4)$$

위 식을 시간에 대해 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \hat{\Phi}_j(t) \\ &= \int \lim_{T \rightarrow 0} \left[ \frac{\omega_{n,j}}{1 + T\omega_{n,j}} \left\{ \hat{\tilde{x}}_{p,j}((n-1)T) + a_{j1}\hat{x}_{p,j}(nT) + a_{j2}x_{p,j}(nT) \right\} \right] dt \\ &= k_{p,j} \left[ s_j(t) + h_j \int s_j(t) dt \right] - k_{p,j} \tilde{x}_{p,j}(t) + C_j \end{aligned} \quad (A5)$$

여기에서  $a_{j1} = -(\lambda_j + h_j)$ ,  $a_{j2} = -\lambda_j h_j$ ,  $k_{p,j} = \omega_{n,j}$ ,  $\tilde{x}_{p,j}(t) = \hat{x}_{p,j}(t) - \hat{\tilde{x}}_{p,j}(t)$  이며  $C_j$ 는 적분 상수이고 다음 관계가 성립한다.

$$\tilde{x}_{p,j}(p) = \frac{p^2}{(p + \omega_j)(p + \lambda_j)} s_j(p) \quad (A6)$$

여기에서  $p$ 는 라플라스 변수이다. 여기에서 운동방정식 (15.b)는 슬라이딩 평면 근처 경계층 내에서 정의되며 섭동 관측기 역시 경계층 내에서 적절하게 관측되어진다. 추가적으로  $s$ 는 광대역 섭동에서 저주파 필터를 통과한 값이므로 식 (A.5)에서  $\tilde{x}_{p,j}$ 는 무시될 수 있는 작은 값을 가지므로 다음관계를 얻을 수 있다.

$$s_j - \tilde{x}_{p,j} \cong s_j \quad \text{혹은} \quad \tilde{x}_{p,j} \cong 0. \quad (A7)$$

식 (A5)에서 적분 상수  $C_j$ 는 슬라이딩함수  $s$ 가 경계층에 도달하는 순간의 초기 섭동 값으로서 관측된 섭동  $\hat{\Phi}_j(t)$ 은 이 상수 값을 어느 정도 시간 후에 충분히 보상하므로 식 (A5)에서 이 항을 생략할 수 있다. 그 결과 식 (A5)는 다음식으로 정리된다.

$$\hat{\Phi}_j(t) \cong k_{p,j} \left[ s_j(t) + h_j \int s_j(t) dt \right]. \quad (A8)$$