

비연성된 지배방정식을 이용한 각가속도를 갖는 회전원판의 동적 안정성 해석

최태영* · 정진태**
(1997년 5월 26일 접수)

Dynamic Stability Analysis of a Spinning Disk with Angular Acceleration by Using the Uncoupled Governing Equations

Taeyoung Choi and Jintai Chung

Key Words: Spinning Disk(회전원판), Angular Acceleration(각가속도), Transverse Vibration(횡진동), Dynamic Stability(동적안정성)

Abstract

Dynamic stability of a flexible spinning disk with angular acceleration is considered. To avoid the coupling between the in-plane and out-of-plane displacements, the linearized strain-displacement relations are used in the Kirchhoff plate theory. The uncoupled governing equations are derived by using Hamilton's principle with considering the angular acceleration. Numerical tests show that existence of the angular acceleration makes a spinning disk dynamically unstable.

1. 서론

각가속도를 갖는 회전원판은 CD-ROM 드라이브와 디지털 비디오 디스크(DVD) 드라이브에 이용되고 있다. 컴퓨터 플로피 디스크나 하드 디스크는 원판 상에 자성물질을 자화시키는 방법을 채택하고 있기 때문에 일정한 회전속도를 갖지만, CD-ROM 드라이브나 DVD 드라이브는 알루미늄 원판에 피트(pit)라는 일정한 크기의 홈을 파서 정보를 저장하기 때문에 회전속도 대신에 선속도가 일정하다. CD-ROM 드라이브나 DVD 드라이브의 픽업(pick-up)이 어느 한 트랙에서 다른 트랙으로 이동할 때, 원판이 각가속도를 갖기 때문에 이런 이유로 각가속도를 갖는 회전원판의 동적거동의 연구가 필요하다.

회전원판의 진동과 동적 안정성에 대한 연구가 많은 연구자에 의해 꾸준히 수행되어왔다. 초기의 연구는 회전원판의 자유진동과 동적 안정성에 초점이 맞추어졌으며,^(1~3) 컴퓨터 하드 디스크 드라이브에서 헤드와 원판 사이의 상호작용을 규명하기 위해 횡하중을 받는 회전원판에 대한 많은 연구들이 수행되었다.^(4~8) 그리고 상하방향의 운동이나 기울어짐(tilting)에 의한 강제운동이 있는 회전원판의 진동과 동적 안정성에 대한 많은 발표가 이루어졌다.^(9~10) 한편, D'Alembert 원리 대신 Hamilton 원리에 바탕을 둔 변분방법에 의한 회전원판의 지배방정식을 체계적으로 유도하고, 이 과정에서 사용한 가정에 대한 고찰이 이루어졌으며,⁽¹¹⁾ 그 밖에도 마찰력과 평면 내의 하중이 있는 회전원판의 진동과 동적 안정성이 분석되었다.^(12~14)

지금까지의 회전원판에 대한 대부분의 연구들이 각가속도가 없는 즉, 각속도가 일정한 경우에 국한되었다. 그 이유는 이들의 연구대상이 컴퓨터 플로피 디스크, 하드 디스크와 원형톱과 같이 각속도가 일정한 회전원판이었기 때문이다.

* 삼성전기(주)

** 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : jchung@email.hanyang.ac.kr

TEL : (0345)400-5287 FAX : (0345)501-4590

CD-ROM이나 DVD 드라이브와 같이 각속도가 존재하는 회전원판에 위의 연구결과를 적용하는 것은 많은 무리가 있다. 각속도가 존재하게 되면 위에서 언급한 연구의 바탕이 된 지배방정식의 수정이 불가피하기 때문에 각속도가 회전원판의 진동과 동적 안정성에 끼치는 영향을 고찰하기 위해 각속도를 포함한 회전원판을 해석할 필요가 있다.

본 연구에서 각속도가 있는 회전원판의 진동과 동적 안정성을 분석하였다. Kirchhoff 판이론과 선형화된 변형률이론에 바탕을 두고 Hamilton 원리로부터 각속도를 고려한 회전원판의 지배방정식을 유도하였는데, 평면내(in-plane) 변위에 대한 지배방정식과 평면외(out-of-plane) 변위에 대한 지배방정식을 비연성화시켜 각속도 영향의 고찰을 용이하게 하였다. 유도된 지배방정식을 바탕으로 각속도가 회전원판의 동적 안정성에 끼치는 영향에 대한 연구를 수행하였다.

2. 지배방정식의 유도

본 논문에서 Kirchhoff 평판이론을 이용하여 Hamilton의 원리로부터 각속도가 있는 회전원판의 지배방정식을 유도하였다. Fig. 1에서 도시된 원판은 내경이 a , 외경이 b , 두께가 h 이며 균일한 탄성재질을 가지고 있다. X - Y 좌표계가

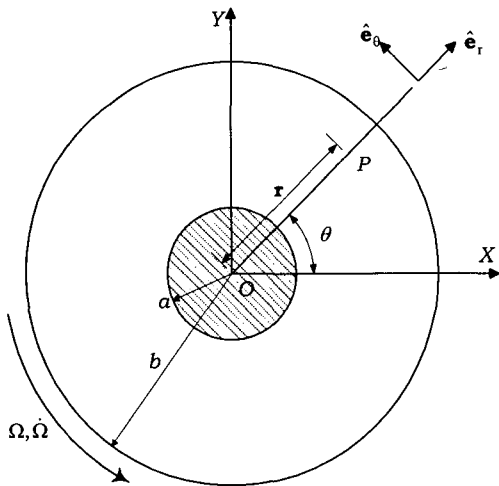


Fig. 1 Geometry of the spinning disk

공간상에 고정되어 있고, e_r, e_θ 가 원판에 고정되어 있다고 가정할 때, 원판 내부의 변위는 Kirchhoff 이론에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_r(r, \theta, z, t) \\ u_\theta(r, \theta, z, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_r(r, t) - z \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \\ \bar{u}_\theta(r, t) - z \frac{\partial w(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \\ w(r, \theta, t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

위 식에서, u_r, u_θ, u_z 는 원판 내부 임의의 점의 r, θ, z 방향의 변위를 나타내고, $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, w$ 는 중앙면 상의 점에 대한 변위를 나타낸다. 두께에 걸친 면내 응력합(stress resultant)이 축대칭이라고 가정하면,⁽¹⁵⁾ 중앙면에서의 면내 변위 $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta$ 는 θ 에 대해 무관하다고 할 수 있다. 그러나 각속도의 영향으로 이들 중앙면에서의 면내 변위들은 시간에 대한 함수가 된다. 이러한 가정 하에 $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta$ 는 반경 r 과 시간 t 의 함수로 표현할 수 있다. 앞에서 언급했듯이 비연성된 지배방정식을 유도하기 위해서 다음과 같은 선형화된 변위-변형률 관계를 사용하였다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

원판의 두께가 매우 작기 때문에 평면응력 상태로 볼 수 있으므로 $\sigma_z = \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = 0$ 이라 가정할 수 있다. 그리고, Hooke의 법칙을 만족하는 응력-변형률 관계는 다음으로 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서, E 는 영률이고 ν 는 포아송비이다. 운동에너지의 계산을 위해 원판내의 각 질점의 속도가 필요하다. Fig. 1에 도시되어 있는 원판이 변형되었을 때 임의의 점 P 의 위치벡터는 다음으로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{r} = (r + u_r) \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + w \mathbf{e}_z \quad (4)$$

속도를 구하기 위해서 식 (4)를 시간에 대해 전미

분을 하면 속도는

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \bar{\mathbf{v}} - z \Psi \quad (5)$$

로 표현할 수 있다. 여기서,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} = & \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} - 2\Omega \bar{u}_\theta \right) \mathbf{e}_r + \left(\Omega(r + \bar{u}_r) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial t} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \Omega \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (6) \end{aligned}$$

$$\Psi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} - \Omega \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial t} + \Omega \frac{\partial w}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (7)$$

원판의 두께 h 가 매우 얇다는 가정 하에 회전 원판의 운동에너지는 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV = \frac{1}{2} \rho h \int_A \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} dA \quad (8)$$

평면응력 상태에 있는 원판의 변형에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_r \epsilon_r + \sigma_\theta \epsilon_\theta + 2\sigma_{r\theta} \epsilon_{r\theta}) dV \quad (9)$$

여기서, V 는 원판의 체적을 나타낸다. 계산의 효율성을 위하여 식 (1)을 식 (2)에 대입하면 변형률을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\epsilon_i = \bar{\epsilon}_i - z \chi_i, \quad i = r, \theta, r\theta \quad (10)$$

여기서, $\bar{\epsilon}_r, \bar{\epsilon}_\theta, \bar{\epsilon}_{r\theta}$ 는 중앙면에서의 변형률이며, $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ 는 변형된 중앙면의 곡률변화이다. 식 (2)과 (3)을 식 (9)에 대입하고 z 방향에 대해 $-h/2$ 부터 $h/2$ 까지 적분하면 변형에너지를 중앙면에서의 변형률과 중앙면의 곡률변화로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$U = \int_A (e_\epsilon + e_x) dA \quad (11)$$

여기서, A 는 원판의 면적을 나타내고, e_ϵ 과 e_x 는 각각 변형률과 곡률변화에 의한 단위면적 당 에너지를 나타낸다. 그리고 e_ϵ 과 e_x 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} e_\epsilon = & \frac{6D}{h^2} \left(\bar{\epsilon}_r^2 + \bar{\epsilon}_\theta^2 + 2\nu \bar{\epsilon}_r \bar{\epsilon}_\theta \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \bar{\epsilon}_{r\theta}^2 \right) \quad (12) \end{aligned}$$

$$e_x = \frac{D}{2} \left(\chi_r^2 + \chi_\theta^2 + 2\nu \chi_r \chi_\theta \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu) \chi_{r\theta}^2 \right) \quad (13)$$

단,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (14)$$

Hamilton의 원리로부터 회전원판의 지배방정식을 구할 수 있다. 즉,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (15)$$

여기서, t_1, t_2 는 임의의 시간을 나타내며 δ 은 변분기호를 나타낸다. 앞에서 구한 변형에너지와 운동에너지에 각각 변분을 취한 다음, $\delta \bar{u}_r,$

$\delta \bar{u}_\theta, \delta w$ 에 대해 정리하면 각속도가 있는 회전원판에 대한 지배방정식과 경계조건을 구할 수 있다. 평면내 변위 $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta$ 에 관한 지배방정식은 서로 연성되지만 평면의 변위 w 에 관한 지배방정식은 $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta$ 에 비연성되어 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \\ \left. + \Omega \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + D \nabla^4 w = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho h \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial t} - \Omega \bar{u}_\theta - \Omega^2 (r + \bar{u}_r) \right) \\ - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{u}_r}{r \partial r} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} \right) = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho h \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial t^2} - \Omega^2 \bar{u}_\theta + 2\Omega \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \Omega (r + \bar{u}_r) \right) \\ - \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{r \partial r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r^2} \right) = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

여기서,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

그리고 경계조건은 다음과 같다.

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = a \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{1-\nu}{r} \left(\frac{\partial^3 w}{r \partial r \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) = 0 \quad \text{at } r = b \quad (20) \end{aligned}$$

$$\bar{u}_r = \bar{u}_\theta = 0 \quad \text{at } r = a \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \nu \frac{\bar{u}_r}{r} = \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r} = 0$$

at $r = b$ (22)

식 (16)~(18)에서 회전각가속도 $\dot{\Omega}$ 을 고려치 않은 경우, \bar{u}_r 는 r 만의 함수가 되고 \bar{u}_θ 는 0 이 된다⁽¹¹⁾. 즉,

$$\bar{u}_r(r, \theta, t) = u(r) \quad (23)$$

$$\bar{u}_\theta(r, \theta, t) = 0 \quad (24)$$

따라서 $\dot{\Omega} = 0$ 인 경우 식 (18)은 자동 만족되며 식 (16)과 (17)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + D \nabla^4 w = 0 \quad (25)$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{u}_r}{r \partial r} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} \right\} = -\rho h \Omega^2 r \quad (26)$$

위의 식 (25)와 (26)은 기존의 유연 회전원판에서 면내 응력이 면외 변위에 끼치는 영향을 배제한 경우 즉, 기하학적 비선형성을 무시했을 경우의 운동방정식을 나타낸다. 이들 지배방정식은 각속도가 일정한 경우의 기존의 연구^(4,11)에서 기하학적 비선형성을 무시한 경우의 지배방정식과 일치하게 된다.

변형률-변위관계에서 기하학적 비선형성을 고려한다면 식 (16)에 평면내 변위 \bar{u}_r , \bar{u}_θ 에 관한 항들이 첨가되나, 본 논문에서는 각가속도가 회전원판의 동적 안정성에 끼치는 영향에 대한 기초 연구를 수행하기 위해서 기하학적 비선형성을 무시하였다.

3. 진동 및 동적 안정성 해석

회전원판의 진동 및 동적 안정성을 분석하기 위해 식 (16)으로 표현되는 운동방정식과 식 (19)와 (20)의 경계조건에 Galerkin 근사해법을 적용하였다. 먼저 절점원(nodal circle)과 절점직경(nodal diameter)을 모두 고려한 비교함수(comparison function)의 급수로 이루어진 근사해를 구한 후, 절점원을 갖지 않고 절점직경만을 갖는 비교함수의 급수로 이루어진 근사해의 타당성을 검증하였

다. 후자의 경우의 근사해를 바탕으로 각가속도를 갖는 회전원판의 진동 및 동적 안정성을 해석하였다.

3.1 절점원과 절점직경을 갖는 근사해

절점원과 절점직경을 모두 고려한 경우의 진동 해석을 위해서 본 연구에서는 횡방향 변위를 다음식으로 가정하였다.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M R_{nm}(r) [C_{nm}(t) \cos n\theta + S_{nm}(t) \sin n\theta] \quad (27)$$

여기서, n 과 m 은 절점직경과 절점원의 수이며 N 과 M 은 Galerkin 근사해법에 사용되는 총 절점직경과 절점원의 수이다. 그리고 $C_{nm}(t)$ 와 $S_{nm}(t)$ 는 시간의 함수이고 $R_{nm}(r)$ 은 r 만의 함수이다. 경계조건을 항상 만족시키는 비교함수를 선택하기 위해 $R_{nm}(r)$ 을 다음과 같이 가정하였다.

$$R_{nm}(r) = (r-a)^2 (r-a)^m (A_{nm} + B_{nm}(r-a) + C_{nm}(r-a)^2) \quad (28)$$

여기서, A_{nm} , B_{nm} 그리고 C_{nm} 은 $R_{nm}(r)$ 에 대한 경계조건과 정규화 조건에 의해서 결정되어지는 상수들이다. $R_{nm}(r)$ 에 대한 경계조건은 다음 식으로 정의된다.

$$R_{nm} = \frac{dR_{nm}}{dr} = 0 \quad \text{at } r = a \quad (29)$$

$$\frac{d}{dr} (\tilde{\nabla}_n^2 R_{nm}) - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left(\frac{dR_{nm}}{dr} - \frac{R_{nm}}{r} \right) = 0 \quad \text{at } r = b \quad (30)$$

$$\frac{d^2 R_{nm}}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{dR_{nm}}{dr} - n^2 \frac{R_{nm}}{r} \right) = 0 \quad \text{at } r = b \quad (31)$$

여기서

$$\tilde{\nabla}_n^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \quad (32)$$

그리고 $R_{nm}(r)$ 에 대한 정규화 조건은 다음식으로 표현할 수 있다.

$$\pi \rho h \int_a^b R_{nm}^2 r dr = 1 \quad (33)$$

Galerkin 근사해법의 개념을 이용하여 식 (27)을

식 (16)에 대입한 후 $R_{nm} \cos n\theta$ 혹은 $R_{nm} \sin n\theta$ 를 식 (16)의 양변에 곱하고 원판 면적 A 에 대하여 적분하면 다음 식이 얻어진다.

$$\sum_{m=0}^M [\eta_{nl, nm} (\ddot{C}_{nm} + 2n\Omega \dot{S}_{nm} - n^2 \Omega^2 C_{nm} + n \dot{\Omega} S_{nm}) + \xi_{nl, nm} C_{nm}] = 0 \quad (34)$$

$$\sum_{m=0}^M [\eta_{nl, nm} (\ddot{S}_{nm} - 2n\Omega \dot{C}_{nm} - n^2 \Omega^2 S_{nm} - n \dot{\Omega} C_{nm}) + \xi_{nl, nm} S_{nm}] = 0 \quad (35)$$

$$(n=0, 1, 2, \dots, N, \quad l=0, 1, 2, \dots, M)$$

여기서

$$\eta_{nl, nm} = \pi \rho h \int_a^b R_{nl} R_{nm} r dr \quad (36)$$

$$\xi_{nl, nm} = \pi D \int_a^b R_{nl} \nabla^4 R_{nm} r dr \quad (37)$$

식 (34)와 (35)을 행렬-벡터방정식으로 표현하면,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (38)$$

여기서

$$\mathbf{x} = \{C_{00}, C_{01}, \dots, C_{0M}, C_{10}, S_{10}, C_{11}, S_{11}, \dots, C_{1M}, S_{1M}, \dots, C_{N0}, S_{N0}, C_{N1}, S_{N1}, \dots, C_{NM}, S_{NM}\}^T \quad (39)$$

이고 \mathbf{M} , \mathbf{C} 그리고 \mathbf{K} 행렬의 크기는 $(2N+1)(M+1) \times (2N+1)(M+1)$ 이다.

3.2 절점직경만을 갖는 근사해

하나 이상의 절점원을 갖는 모드에 해당하는 정지원판의 고유진동수가 3개 혹은 4개 이상의 절점직경을 갖는 모드의 고유진동수보다 크기 때문에, 저차모드에 관심이 있는 경우에는 횡방향 변위를 절점원이 없는 모드들의 선형조합으로 나타낼 수 있다. 즉, 식 (27)에서 $M=0$ 이면 절점원을 고려하지 않는 특별한 경우의 진동해석을 할 수 있다. 행렬-벡터 방정식에 대한 고유치문제로부터 다음의 인수분해가 된 특성방정식이 얻어진다.

$$\det(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K}) = \det(\boldsymbol{\omega}_0) \det(\boldsymbol{\omega}_1) \cdots \det(\boldsymbol{\omega}_N) = 0 \quad (40)$$

여기서, s 는 복수고유치이고

$$\boldsymbol{\omega}_0 = s^2 + \boldsymbol{\omega}_{s0}^2 \quad (41)$$

$$\boldsymbol{\omega}_n = \begin{bmatrix} s^2 + \boldsymbol{\omega}_{sn}^2 - n^2 \Omega^2 & 2n\Omega s + n\dot{\Omega} \\ -2n\Omega s - n\dot{\Omega} & s^2 + \boldsymbol{\omega}_{sn}^2 - n^2 \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

단, 식 (40)에서 n 은 양의 정수이고 $\boldsymbol{\omega}_{sn}$ 은 정지원판의 n 번째 고유진동수를 나타낸다.

$\det(\boldsymbol{\omega}_n) = 0$ 으로부터 복소고유치 s 를 구하면 실수부는

$$\text{Re } s = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} [(n^2 \dot{\Omega}^2 + \boldsymbol{\omega}_{sn}^4)^{1/2} - \boldsymbol{\omega}_{sn}^2]^{1/2} \quad (43)$$

이고 s 의 허수부는 순방향(forward)과 역방향(backward)의 고유진동수를 나타낸다. 순방향 고유진동수 $\boldsymbol{\omega}_{fn}$ 과 역방향 고유진동수 $\boldsymbol{\omega}_{bn}$ 은 다음으로 표시된다.

$$\boldsymbol{\omega}_{fn} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [(n^2 \dot{\Omega}^2 + \boldsymbol{\omega}_{sn}^4)^{1/2} + \boldsymbol{\omega}_{sn}^2]^{1/2} + n\Omega \right| \quad (44)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{bn} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [(n^2 \dot{\Omega}^2 + \boldsymbol{\omega}_{sn}^4)^{1/2} + \boldsymbol{\omega}_{sn}^2]^{1/2} - n\Omega \right| \quad (45)$$

복소고유치 s 의 실수부 $\text{Re } s$ 는 회전원판의 시간에 따른 진폭의 증감과 관계가 있는데, 음수일 경우 진폭이 감소하고 양수일 경우 진폭이 증가한다. 따라서 $\text{Re } s$ 가 양수이면 회전원판의 진폭은 시간이 지남에 따라 증가하여 불안정하게 된다. 식 (43)은 각가속도를 갖게될 때 회전원판이 불안정하게 됨을 보여준다. 그러나, 각가속도가 없는 경우 즉, $\dot{\Omega} = 0$ 인 경우 $\text{Re } s$ 의 값이 0이 되어 회전원판은 안정상태에 있게된다.

3.3 안정성해석 결과

본 논문에서 사용한 근사해법을 검증하기 위해, Table 1에 주어진 물성치를 사용하여 각속도와 각가속도는 모두 0인 경우의 저차 모드 몇 개의 고유진동수를 절점원의 총 개수 M 을 증가시켜 가면서 구하였다. Table 2에서 볼 수 있듯이 M 이 증가할수록 $M_{\text{ote}}^{(16)}$ 가 구한 엄밀해에 수렴함을 알 수 있으며, 저차 모드의 고유진동수는 M 의 값의 크기에 큰 차이를 보이지 않음을 알 수 있다.

Table 1 Material properties and dimensions of a disk

E	65.5 MPa
ν	0.3
ρ	1200 kg/m ³
a	0.01742 m
b	0.06500 m
h	0.00120 m

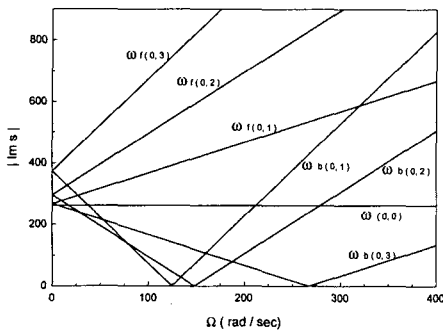


Fig. 2 Diagram of $|Im s|$ versus Ω ($\dot{\Omega} = 500 \text{ rad/s}^2, a/b = 0.5$)

각가속도가 존재할 때, 즉 $\dot{\Omega} = 500 \text{ rad/s}^2$ 일 때 각속도에 따른 복소고유치의 허수부와 실수부의 변화를 Figs. 2와 3에 각각 도시하였다. 각 그림에서 첨자 f는 순방향 모드를 나타내며, 첨자 b는 역방향 모드를 나타낸다. 그리고 이 때 사용된 물성치는 Table 1의 물성치와 동일하다. Fig.2에 도시한 복소고유치의 허수부, 즉 회전원판의 고유진동수는 잘 알려진 바와 같이 순방향과 역방향의 모드에 대한 값으로 분할하게 된다. 본 연구에서 면내 응력이 면의 변위에 끼치는 영향을 무시하였으므로 각 고유진동수를 나타내는 선은 직선으로 표시된다. 그리고 각가속도가 존재하더라도 고유진동수에 큰 영향을 주지 않음을 알 수 있다. Fig. 3에서 보듯이 진폭의 증감에 관련된 복소고유치의 실수부는 각속도의 변화에 둔감하며 순방향 모드에 대하여 양의 값을 갖고 역방향 모드에 대해서는 음의 값을 갖는 것을 알 수 있다. 따라서 각가속도가 일정할 때 시간이 지남에 따라 역방향 모드에 대한 진폭이 감소되

Table 2 Comparison of the natural frequencies calculated by using the proposed method and the exact solution when $\Omega = \dot{\Omega} = 0 \text{ (rad/s)}$

M	Mode (m, n)				
	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)
0	261.605	267.046	295.824	373.596	514.936
1	261.550	266.906	295.422	373.192	514.926
2	261.533	266.866	295.269	372.765	514.042
3	261.532	266.864	295.259	372.735	513.981
4	261.532	266.864	295.259	372.733	513.975
Mote [15]	261.532	266.864	295.259	372.732	513.972

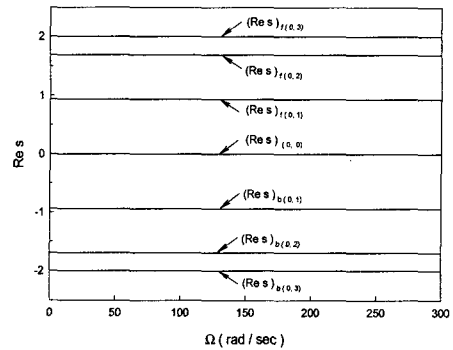


Fig. 3 Diagram of $|Re s|$ versus Ω ($\dot{\Omega} = 500 \text{ rad/s}^2, a/b = 0.5$)

나 순방향 모드의 진폭이 증가하여 회전원판이 불안정하게 된다.

일정한 각속도($\Omega = 300 \text{ rad/s}$)에 대해 각가속도의 영향을 알아보기 위해 위에서 사용한 동일한 물성치를 이용하여 복소고유치의 실수부와 허수부를 Fig. 4와 Fig. 5에 각각 도시하였다. Fig. 4에서 $(Re s)_{(i,j)}$ 는 각각 i 개의 절점원과 j 개의 드에 대한 $Re s$ 의 값이 양의 방향으로 증가함을 절점직경을 갖는 모드의 복소고유치의 실수부를 나타낸다. Fig. 4는 $\dot{\Omega}$ 이 증가할수록 순방향 모보여주며, 역방향 모드에 대한 $Re s$ 의 값이 음의 방향으로 증가함을 나타낸다. 순방향 모드에

대한 복소고유치의 실수부가 각가속도에 따라 증가하므로, 각가속도를 크게하면 회전원판의 진폭을 빠르게 증가시켜 동적 불안정성을 야기한다. Fig. 5는 각속도가 일정하다고 가정하고 각가속도에 대한 회전원판의 고유진동수의 변화를 나타낸다. Fig. 5에서 볼 수 있듯이 각가속도의 증가는 회전원판의 고유진동수에 큰 영향을 주지 못하고 있음을 알 수 있다.

내반경과 외반경의 비가 고유진동수와 복소고유치의 실수부에 끼치는 영향을 알아보기 위하여 각속도를 $\Omega = 300 \text{ rad/s}$ 로 각가속도를

$\dot{\Omega} = 500 \text{ rad/s}^2$ 로 가정하여 Fig. 6과 Fig. 7에 원판의 반경비 a/b 에 따른 $|\text{Im } s|$ 와 $\text{Re } s$ 의 변화를 도시하였다. Fig. 7은 반경비 a/b 가 증가할수록 각 모드에 해당하는 고유진동수는 증가함을 보여주지만, Fig. 7은 반경비가 증가할수록 복소고유치의 실수부의 절댓값이 감소하여 불안정성의 크기가 감소함을 알 수 있다.

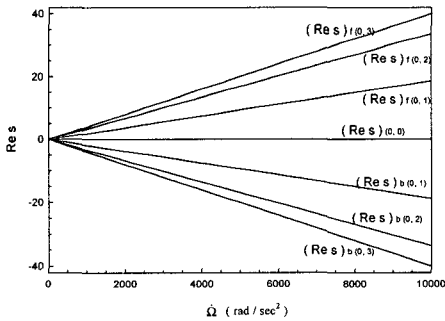


Fig. 4 Diagram of $\text{Re } s$ versus $\dot{\Omega}$ ($\Omega = 300 \text{ rad/s}$, $a/b = 0.5$)

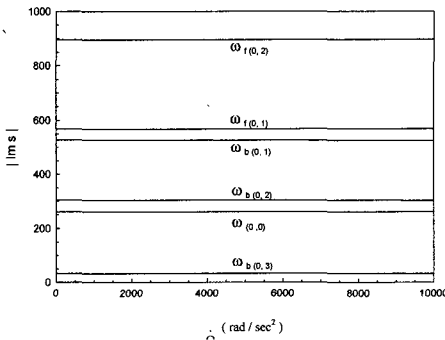


Fig. 5 Diagram of $|\text{Im } s|$ versus $\dot{\Omega}$ ($\Omega = 300 \text{ rad/s}$, $a/b = 0.5$)

4. 결론

각가속도를 갖는 회전원판의 횡진동에 대해 비연성된 지배방정식을 유도하여 진동 및 동적 안정성에 대하여 분석을 하였다. 회전원판이 각가속도를 갖게되면 복소고유치의 실수값이 양수가 되어 회전원판의 진폭이 시간이 지남에 따라 증가하여 불안정하게 된다. 그리고 동적 불안정의 정도는 각가속도의 크기에 거의 비례하여 증가함을 알 수 있다. 그러나 각가속도가 회전원판의 순방향과 역방향 모드의 고유진동수에 끼치는 영향은 상대적으로 매우 작다는 사실을 알 수 있본 논문에서 평면내 응력이 평면외 변위에 끼치는 영향을 무시한 지배방정식을 이용하였는데, 향후 평면내 응력이 평면외 변위에 영향을 미치는 영향을 고려한 연구의 필요성이 있다. 다시 말해

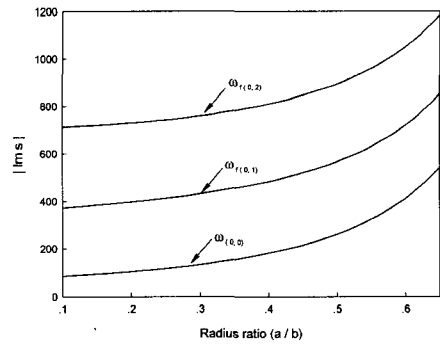


Fig. 6 Diagram of $|\text{Im } s|$ versus radius ratio a/b ($\Omega = 300 \text{ rad/s}$, $\dot{\Omega} = 500 \text{ rad/s}^2$)

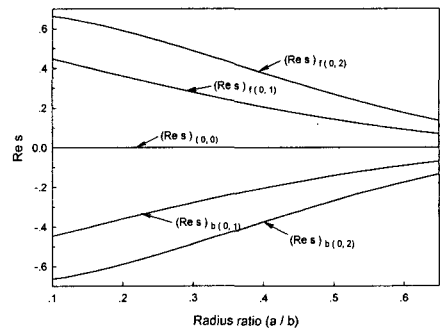


Fig. 7 Diagram of $|\text{Re } s|$ versus radius ratio a/b ($\Omega = 300 \text{ rad/s}$, $\dot{\Omega} = 500 \text{ rad/s}^2$)

평면내 변위와 평면외 변위가 서로 연성되는 비선형 지배방정식에 기초를 둔 각가속도가 있는 회전원판의 진동 및 동적 안정성에 대해 연구를 확장할 필요가 있다.

참고문헌

- (1) Mote, Jr., C. D., 1965, "Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks," *Transaction of ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol 89, pp. 258~265.
- (2) Everseman, W. and Dodson, R. O., 1969, "Free Vibration of a Centrally Clamped Spinning Circular Disk," *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 10, pp. 2010~2012.
- (3) Adams, G. G., 1987, "Critical Speed for a Flexible Spinning Disk," *Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 29, No. 8, pp. 525~531.
- (4) Iwan, W. D. and Moller, T. L., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 458~490.
- (5) Benson, R. C. and Bogy, D. B., 1978, "Deflection of a Very Flexible Spinning Disk due to a Stationary Transverse Load," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, pp. 636~641.
- (6) Hutton, S. G., Chonan, S. and Lehmann, B. F., 1987, "Dynamic Response of a Guided Circular Saw," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 112, No. 3, pp. 527~539.
- (7) Ono, K., Chen, J. S. and Bogy, D. B., 1991, "Stability Analysis for the Head-Disk Interface in a Flexible Disk Drive," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 1005~1014.
- (8) Chen, J. S. and Bogy, D. B., 1992, "Effect of Load Parameters of the Natural Frequencies and Stability of a Flexible Spinning Disk with a Stationary Load System," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 230~235.
- (9) Mote, Jr., C. D., 1977, "Moving-load Stability of a Circular Plate on a Floating Central Collar," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 61, NO. 2, pp. 439~447.
- (10) Chen, J. S. and Bogy, D. B., 1993, "Natural Frequencies and Stability of a Flexible Spinning Disk-Stationary Load System with Rigid-Body Tilting," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 470~477.
- (11) Chung, J. Kang, N.-C., and Lee, J. M., 1996, "A Study on Free Vibration of a Spinning Disk," *KSME Journal*, Vol.10, No. 2, pp. 138~145.
- (12) Chen, J. S. and Bogy, D. B., 1993, "The Effect of a Space-Fixed Friction Force on the In-plane Stress and Stability of Transverse Vibration of a Spinning Disk," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 646~648.
- (13) D'Angelo III, C. and Mote, Jr., C. D., 1993, "Natural Frequencies of a Thin Disk, Clamped by Thick Collars with Friction at the Contacting Surfaces, Spinning at High Rotating Speed," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 168 pp. 1~14.
- (14) Shen, I. Y. and Song, Y., 1996, "Stability and Vibration of a Rotating Circular Plate Subjected to Stationary In-plane Edge Loads," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 121~127.
- (15) Benson, R. C., 1977, "Deflection of a Transversely Loaded Spinning Disk," Ph. D. Dissertation, U. of California at Berkeley, p. 9.
- (16) Mote, Jr., C. D., 1970, "Stability of Circular Plates Subjected to Moving Loads," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 290, NO. 4, pp. 329~344.