

Pseudospectral 해석법을 이용한 직사각 Reissner-Mindlin 평판의 동적 해석

승 용 호* · 이 진 희**
(1999년 3월 2일 접수)

Application of Pseudospectral Method to the Dynamic Analysis of Rectangular Reissner-Mindlin Plate

Yongho Seung and Jinhee Lee

Key Words: Eigenvalue Problem(특이치 문제), Pseudospectral Method(의사 스펙트럴법), Reissner-Mindlin Plate(라이스너-민들린 평판), Chebyshev Polynomial(체비셰프 다항식)

Abstract

A dynamic analysis of rectangular Reissner-Mindlin plate was carried out using pseudospectral method. The pseudospectral method is superior to the finite element method because of more rapid convergence speed of approximate solutions. Especially, the improvement in accuracy of the pseudospectral method is remarkable. Numerical examples demonstrate the excellent performance and robustness of the pseudospectral method with respect to thickness ratio of rectangular Reissner-Mindlin plate. The natural frequencies of rectangular Reissner-Mindlin plate calculated with the pseudospectral method are more reliable than those calculated with other numerical methods.

기호설명	
E :	Young 륨
G :	전단탄성계수
ν :	Poisson 비
ρ :	밀도
a :	평판의 길이
b :	평판의 폭
h :	평판의 두께
θ_x :	평판의 x 방향 회전각
θ_y :	평판의 y 방향 회전각
w :	평판의 처짐
Θ_x :	θ_x 대한 공간 변수
Θ_y :	θ_y 대한 공간 변수
W :	w 대한 공간변수
β	단면 보정 계수
	T_n : Chevshev 다항식
	M, N : Gauss-Chebyshev grid 수
	ω_K : Kirchhoff 평판의 고유진동수
	ω_R : Reissner-Mindlin 평판의 고유진동수

1. 서 론

평판의 해석이론은 Euler-Bernoulli 보를 2차원으로 확장함으로써 개발되었다. Kirchhoff 평판으로 알려진 이 평판이론에서는 횡 방향의 전단(transverse shear)과 회전 관성력(rotary inertia)이 고려되지 않음으로써 그 적용대상이 얇은 평판(thin plate)의 경우에만 국한되어 왔다. Reissner는 이를 개선하여 횡 방향의 전단과 회전 관성력을 고려한 평판에 대한 정적 해석을 수행하였으며, Reissner의 평판이론을 확장하여 Mindlin⁽¹⁾은 두꺼운 평판에 대한 동적 해석을 수행하였다. Reissner-Mindlin 평판문제에 대한 엄밀해를 구하

* 회원, 홍익대학교 대학원 기계설계학과
 ** 회원, 홍익대학교 기계설계학과
 E-mail : jinhlee@wow.hongik.ac.kr
 TEL : (0415)860-2589 FAX : (0415)860-2372

는 것은 매우 어려운 것으로 알려져 있어 현실적으로는 수치해석적인 방법이 주로 사용되고 있는 실정이다. 널리 쓰이는 수치해석법의 하나로 알려져 있는 유한요소법을 사용할 경우 Reissner-Mindlin 평판문제에 대한 해는 평판의 두께가 작아질 경우 shear locking의 영향으로 강성계수 행렬이 지나치게 크게 평가되어 많은 문제점을 발생시킨다.^(2,3) 또한 유한요소법을 사용하여 고주파수 영역에서의 평판에 대한 근사해를 얻어내려 할 경우 많은 수의 요소분할이 요구되어지므로 계산시간과 비용이라는 관점에서 많은 부담을 안게 된다. 이에 비해 비교적 최근에 개발된 pseudospectral 해석법은 높은 차수의 Chebyshev polynomial을 기저함수로 이용하여 allocation함으로써 엄밀해에 가까운 해를 산출할 수 있는 것으로 알려져 있다.⁽⁴⁾ 이전의 연구에서는 Reissner-Mindlin 평판에 대한 정적해석에 pseudospectral 요소법을 사용하여 수행하였고,⁽⁵⁾ 본 연구에서는 이를 확장하여 두꺼운 직사각 평판에 대해 자유진동 해석을 수행하려 한다. 또한 본 연구에서 계산된 두꺼운 직사각 평판에 대한 자유진동 해석의 근사해가 다른 수치해석법에서 얻어진 근사해에 대한 표준이 될 수 있는지 논의 하고자 한다.

2. Reissner-Mindlin 평판의 자유진동과 Pseudospectral Method

Reissner-Mindlin 평판이론에서 모멘트와 전단력에 관련된 항들을 다음과 같이 정의할 때

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left(\nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = \beta Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = \beta Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \end{cases} \quad (1)$$

동적 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = -\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = -\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2)$$

식 (1)에서 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 이고, 전단탄성계수 G 는 $E/2(1+\nu)$ 의 크기를 가지며 β 는 단면보정계수이다. Reissner는 단면보정계수 β 의 값으로써 5/6을 제안하였다.⁽⁶⁾ 식 (2)의 동적 평형방정식에 식 (1)의 Reissner-Mindlin 평판이론에서의 모멘트 관련 항과 전단력 관련 항들을 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} D \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) + \beta Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = 0 \\ D \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) + \beta Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = 0 \\ -\beta Gh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Reissner-Mindlin 평판의 동적해석에서 적용되는 대표적인 경계조건들은 단순지지(hard support) 경계조건, 고정단(built-in)경계조건, 그리고 자유단(free)경계조건 등이다. 직사각 평판에 대하여 \bar{x} 와 \bar{y} 를 좌표축 x, y 에 대한 각각의 경계라고 할 때 식 (3)에 대한 경계조건은 다음과 같다.

① 고정단(built-in) 경계조건

$$\begin{cases} \theta_x(\bar{x}, y, t) = \theta_x(x, \bar{y}, t) = 0 \\ \theta_y(\bar{x}, y, t) = \theta_y(x, \bar{y}, t) = 0 \\ w(\bar{x}, y, t) = w(x, \bar{y}, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

② 단순지지(hard support) 경계조건

$$\begin{cases} M_x(\bar{x}, y, t) = M_y(x, \bar{y}, t) = 0 \\ \theta_y(\bar{x}, y, t) = \theta_x(x, \bar{y}, t) = 0 \\ w(\bar{x}, y, t) = w(x, \bar{y}, t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

③ 자유단(free) 경계조건

$$\begin{cases} M_x(\bar{x}, y, t) = M_y(x, \bar{y}, t) = 0 \\ M_{xy}(\bar{x}, y, t) = M_{xy}(x, \bar{y}, t) = 0 \\ Q_x(\bar{x}, y, t) = Q_y(x, \bar{y}, t) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

식 (4)~(6)의 경계조건을 각각 만족시키는 식 (3)의 해를 구하기 위해 θ_x , θ_y , w 을 다음과 같이 변수분리법을 이용하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} \theta_x(x, y, t) = \Theta_x(x, y)F(t) \\ \theta_y(x, y, t) = \Theta_y(x, y)F(t) \\ w(x, y, t) = W(x, y)F(t) \end{cases} \quad (7)$$

식 (7)을 식 (3)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} \frac{12}{-\rho h^3 \Theta_x} \left\{ D \left(\frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x \partial y} \right) + \beta Gh \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \Theta_x \right) \right\} = -\frac{1}{F(t)} \frac{d^2 F(t)}{dt^2} \\ \frac{12}{-\rho h^3 \Theta_y} \left\{ D \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial x \partial y} \right) + \beta Gh \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \Theta_y \right) \right\} = -\frac{1}{F(t)} \frac{d^2 F(t)}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho h W} \left\{ -\beta Gh \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial \Theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \Theta_y}{\partial y} \right) \right\} = -\frac{1}{F(t)} \frac{d^2 F(t)}{dt^2} \end{cases} \quad (8)$$

식 (8)에서 공간함수와 시간함수를 서로 독립적인 함수로 보고 λ 를 매개상수로 하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} D \left(\frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x \partial y} \right) + \beta Gh \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \Theta_x \right) + \lambda \frac{\rho h^3}{12} \Theta_x = 0 \\ D \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial x \partial y} \right) + \beta Gh \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \Theta_y \right) + \lambda \frac{\rho h^3}{12} \Theta_y = 0 \\ -\beta Gh \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial \Theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \Theta_y}{\partial y} \right) - \lambda \rho h W = 0 \\ \frac{d^2 F(t)}{dt^2} + \lambda F(t) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Pseudospectral 해석법은 미분방정식 $L(u) = f$ 의 해를 $N+2$ 개의 Chebyshev 다항식 T_n 을 기저 함수로 하는 급수로서 나타낼 수 있다는 가정으로부터 시작한다.

$$\begin{aligned} u(z) &\simeq u_{N+2}(z) = \sum_{n=0}^{N+1} A_n T_n(z), \\ &= \sum_{n=0}^{N+1} A_n \cos n\phi \\ z &\in [-1, 1] \end{aligned} \quad (10)$$

기저함수 T_n 이 평가되는 collocation point로서는 N 개의 Gauss-Chebyshev grid 점인

$$z_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2N}, \quad i=1, \dots, N \quad (11)$$

와 함께 구간의 양 끝단인 $z_0 = -1$, $z_{N+1} = 1$ 가 사용된다. 일반적으로 유한요소법에서는 해의 정확도를 높이기 위한 수단으로 요소의 숫자를 늘리는데 비하여 pseudospectral 해석법은 기저 함수의 차수를 높여서 해의 정밀도를 높일 수 있다. Reissner-Mindlin 평판의 자유진동해석을 위하여 pseudospectral 해석법을 적용할 경우 공간변수들의 함수인 미지수 Θ_x , Θ_y , W 를 A_{mn} , B_{mn} ,

C_{mn} 과 같은 미정 계수를 사용하여 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} \theta_x(x, y) = \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} A_{mn} T_m(x) T_n(y) \\ \theta_y(x, y) = \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} B_{mn} T_m(x) T_n(y) \\ W(x, y) = \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} C_{mn} T_m(x) T_n(y) \end{cases} \quad (12)$$

식 (12)의 근사식을 식 (9)에서 공간함수에 관한 함수들만으로 이루어진 처음 3개의 식에 대입하면 각각의 Gauss-Chebyshev grid 점에 대하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[A_{mn} \left\{ D \frac{d^2 T_m}{dx^2} T_n + D \frac{1-\nu}{2} T_m \frac{d^2 T_n}{dy^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \beta Gh T_m T_n \right\} + B_{mn} \left\{ D \frac{1+\nu}{2} \frac{dT_m}{dx} \frac{dT_n}{dy} \right\} \right. \\ & \quad \left. + C_{mn} \left\{ \beta Gh \frac{dT_m}{dx} T_n \right\} \right] \\ & = \lambda^2 \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[A_{mn} \left\{ -\frac{\rho h^3}{12} T_m T_n \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[A_{mn} \left\{ D \frac{1+\nu}{2} \frac{dT_m}{dx} \frac{dT_n}{dy} \right\} \right. \\ & \quad \left. + B_{mn} \left\{ D \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 T_m}{dx^2} T_n + D T_m \frac{d^2 T_n}{dy^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \beta Gh T_m T_n \right\} + C_{mn} \left\{ \beta Gh T_m \frac{dT_n}{dy} \right\} \right] \\ & = \lambda^2 \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[B_{mn} \left\{ -\frac{\rho h^3}{12} T_m T_n \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[A_{mn} \left\{ \beta Gh \frac{dT_m}{dx} T_n \right\} \right. \\ & \quad \left. + B_{mn} \left\{ \beta Gh T_m \frac{dT_n}{dy} \right\} \right. \\ & \quad \left. + C_{mn} \left\{ -\beta Gh \frac{d^2 T_m}{dx^2} T_n - \beta Gh T_m \frac{d^2 T_n}{dy^2} \right\} \right] \\ & = \lambda^2 \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[C_{mn} \left\{ \rho h T_m T_n \right\} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

식 (4)~(6)의 경계조건도 공간함수에 관한 항들에 대하여 Chebyshev 다항식을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

① 고정단(built-in) 경계조건

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} A_{mn} T_m T_n = 0 \\ \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} B_{mn} T_m T_n = 0 \\ \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} C_{mn} T_m T_n = 0 \end{cases} \quad (14)$$

② 단순지지(hard support) 경계조건

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[\left(A_{mn} \frac{dT_m}{dx} T_n + \nu B_{mn} T_m \frac{dT_n}{dy} \right) n_x \right. \\ \quad \left. + \left(\nu A_{mn} \frac{dT_m}{dx} T_n + B_{mn} T_m \frac{dT_n}{dy} \right) n_y \right] = 0 \\ \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[(B_{mn} T_m T_n) n_x \right. \\ \quad \left. + (A_{mn} T_m T_n) n_y \right] = 0 \\ \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} C_{mn} T_m T_n = 0 \end{cases} \quad (15)$$

③ 자유단(free) 경계조건

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[\left(A_{mn} \frac{dT_m}{dx} T_n + \nu B_{mn} T_m \frac{dT_n}{dy} \right) n_x \right. \\ \quad \left. + \left(\nu A_{mn} \frac{dT_m}{dx} T_n + B_{mn} T_m \frac{dT_n}{dy} \right) n_y \right] = 0 \\ \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[\left(A_{mn} T_m \frac{dT_n}{dy} + B_{mn} \frac{dT_m}{dx} T_n \right) n_x \right. \\ \quad \left. + \left(A_{mn} T_m \frac{dT_n}{dy} + B_{mn} \frac{dT_m}{dx} T_n \right) n_y \right] = 0 \\ \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} \left[\left(-A_{mn} T_m T_n + C_{mn} \frac{dT_m}{dx} T_n \right) n_x \right. \\ \quad \left. + \left(-B_{mn} T_m T_n + C_{mn} \frac{dT_m}{dy} T_n \right) n_y \right] = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Reissner-Mindlin 평판문제에 pseudospectral을 적용할 경우 미정계수의 개수는 모두 $3(M+2)(N+2)$ 개가 된다. MN개의 Gauss-Chebyshev grid 점에서 식 (13)으로부터 각각 3개씩의 방정식이 성립되고 경계를 따라 존재하는 $2M+2N+4$ 개의 절점에 식 (14)~(16)으로부터 각각 3개씩의 경계조건이 부과

되어 미지수와 같은 서로 독립적인 방정식이 존재한다. 이로부터 아래와 같은 행렬식으로 표현될 수 있다.

$$[K]\{A_{mn}|B_{mn}|C_{mn}\}^T = \lambda[M]\{A_{mn}|B_{mn}|C_{mn}\}^T \quad (17)$$

식 (17)의 행렬식에서 $[K]$ 행렬은 Reissner-Mindlin 평판에 대한 강성행렬을 표현하고 있으며 $[M]$ 행렬은 질량행렬을 나타내고 있다. λ 는 식 (17)의 행렬식에 대한 특이치(eigenvalue)이며 식 (9)의 4번째 식을 볼 때 $F(t)$ 는 고유진동수 ω 을 갖는 단순조화운동을 하는 함수라고 가정할 때 $\lambda = \omega^2$ 이 된다. 식 (17)에 표현되어진 특이치 문제를 간단한 프로그램을 작성하여 식 (14)~(16)의 경계조건들을 각각 대입하여 평판의 가로와 세로비율, 두께비 등을 변화시켜가며 각각의 경우에 대한 특이치와 특이벡터를 산출하였다.

3. 얇은 평판의 엄밀해와의 비교

Pseudospectral 해석법으로 구한 Reissner-Mindlin

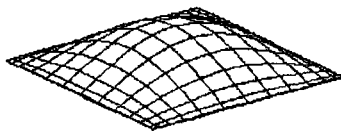
Table 1 Comparisons of Reissner-Mindlin plate to Kirchhoff plate for Natural Frequencies

Kirchhoff plate (a/h=100)		Reissner-Mindlin plate (a/h=100)	
mode	ω_K^*	mode	ω_R^*
1	19.72	1	19.73
2	49.30	2	49.30
3	78.88	3	78.84
4	98.60	4	98.51
5	128.17	5	128.00
6	167.75	6	167.27

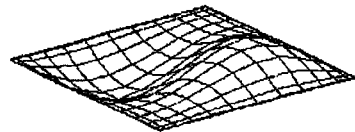
$$(\omega_K^* = \omega_K(a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D}}), \omega_R^* = \omega_R(a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D}}))$$

평판의 해를 검증하기 위해 계산결과와 Kirchhoff 평판에 대한 엄밀해와 비교해 보았다. 단순지지(hard support) 경계조건을 가지며 한 변의 길이가 a인 정사각형의 Kirchhoff 평판에 대한 고유진동수는 다음과 같다.⁽⁷⁾

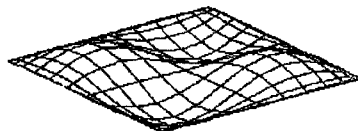
$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2 + n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$



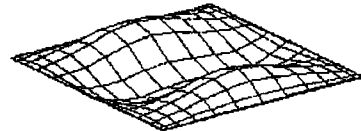
(a) Mode 1



(b) Mode 2



(c) Mode 3



(d) Mode 4

Fig. 1 Natural mode shapes of square Reissner-Mindlin plate for the simply supported boundary condition

Table 1에는 식 (18)의 Kirchhoff 평판의 고유진동수 ω_K 과 함께 이와 동일한 경계조건을 갖는 Reissner-Mindlin 평판에 pseudospectral 해석법을 적용하여 얻어진 고유진동수 ω_R 이 비교되어 있으며, Fig. 1에는 Table 1에 제시된 Reissner-Mindlin 평판의 1~4차 고유진동수에 대한 mode-shape들을 각각 보여주고 있다. Table 1에서 나타낸 결과는 두께비(a/h)가 100인 경우에 대하여 계산된 값들이며, pseudospectral 해석법을 수행하는 과정에서 한 개만의 요소가 사용되었으며 $M, N \geq 8$ 에서 빠르게 수렴됨을 보였다. 계산결과는 각각의 진동모우드에서 Kirchhoff 평판의 고유진동수와 pseudospectral 해석법을 적용하여 계산한 Reissner-Mindlin 평판의 고유진동수가 거의 일치함을 보여주고 있다. 이는 유한요소법을 이용한 직사각 Reissner-Mindlin 평판의 해석에서 일어날 수 있는 shear locking 현상은 관찰되지 않았음을 보여준다. 이러한 결과는 pseudospectral 해석법을 사용하여 평판의 정적해석을 시도한 연구⁽⁵⁾에서도 보여 주었듯이 해가 수렴하기 위하여 많은 수의 요소가 필요하고 또 수렴속도가 빠르지 않은 유한요소법의 경우와 비교하여 pseudospectral 해석법이 매우 효율적인 해석방법임을 말해 준다.

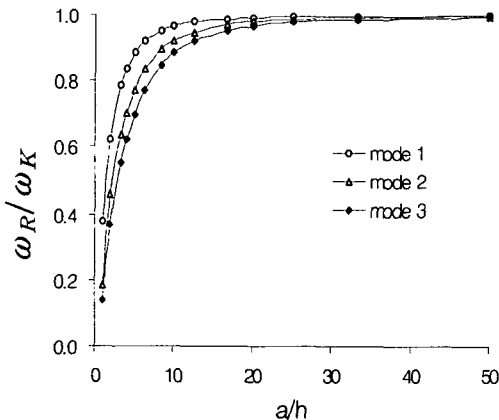


Fig. 2 Ratio of Reissner-Mindlin plate and Kirchhoff plate for the natural frequencies according to thickness ratio a/h

(ω_R : the natural frequencies for Reissner-Mindlin plate, ω_K : the natural frequencies for Kirchhoff plate, for the simply supported boundary condition)

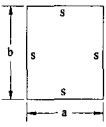
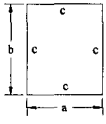
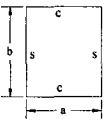
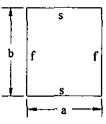
Fig. 2는 단순지지(hard support)경계조건을 갖는 한 변의 길이가 a 인 정사각형 평판에 대하여 두께비를 변화시켜가며 pseudospectral 해석법을 적용하여 계산된 Reissner-Mindlin 평판의 고유진동수와 식 (18)으로 계산한 Kirchhoff 평판의 고유진동수를 비교하였다. 앞서서와 마찬가지로 pseudospectral 해석법의 해석 과정에서 1개의 요소만이 사용되었으며 충분히 큰 Gauss-Chebyshev grid 수를 사용하였다. Fig. 2에서 보여주는 것과 같이 ω_R/ω_K 의 비가 항상 1보다 작은 값을 갖으며, 평판의 길이에 비해 두께가 커질수록 그리고 고유진동수의 차수가 증가할수록 더욱 작아짐을 보여준다. 이는 Kirchhoff 평판이론에서 무시되었던 횡 방향의 전단과 회전 관성력이 Reissner-Mindlin 평판에서는 고려됨으로써 나타난 영향으로 해석할 수 있다. 횡 방향의 전단 항으로 인하여 평판의 강성은 Kirchhoff 평판의 강성보다 더욱 작게 평가되며 회전 관성력 항에 의해 평판의 질량은 Kirchhoff 평판의 질량보다 크게 평가되어 결과적으로 고유진동수는 Kirchhoff 평판에서 계산된 것보다 낮게 계산되는 것으로 생각된다.

Fig. 2에서 ω_R/ω_K 의 값이 급격히 변화하는 부분은 대략적으로 a/h 의 값이 20보다 작은 구간임을 알 수 있다. 비교적 낮은 주파수영역이 현실적으로 중요하므로 1~2차 고유진동수에 대하여 a/h 가 20일 때 Kirchhoff 평판의 고유진동수, ω_K 와 Reissner-Mindlin 평판의 고유진동수, ω_R 를 비교하여 보면 약 2%의 오차를 가지게 되는 것으로 계산된다.

Table 2에는 여러 가지 경계조건하에서 평판의 양변의 비와 두께비를 바꾸어 가며 pseudospectral 해석법을 Reissner-Mindlin 평판에 적용하여 계산되어진 고유진동수를 나타내고 있다.

이제까지의 논의에서 1개의 요소만으로도 적절한 Gauss-Chebyshev grid 수 M, N 에서 빠르게 수렴하는 특성을 갖는 pseudospectral 해석법은 해의 수렴을 위해 많은 수의 요소가 필요하고 또 수렴속도가 빠르지 않은 유한요소법에 비해 보다 효율적임을 알 수 있었다. 또한 Reissner-Mindlin 평판을 유한요소법으로 해석시 일어날 수 있는 shear locking 현상이 관찰되지 않음을 보았다. 이는 shear locking이 유한요소법의 수치 적분과정에서 강성계수 행렬이 과대평가 되어 일어나는 현

Table 2 Natural Frequencies of Reissner-Mindlin plate according to thickness ratio(a/h)

평판의 경계조건	평판의 양변의 비	평판의 두께비	ω_R^{**}			
			mode 1	mode 2	mode 3	mode 4
	b/a=0.5	a/h=20.0	3.541	5.647	9.151	11.883
		a/h=10.0	3.484	5.504	8.784	11.286
		a/h=6.67	3.394	5.291	8.275	10.490
	b/a=1.0	a/h=20.0	5.647	13.934	22.014	27.385
		a/h=10.0	5.504	13.130	20.148	24.599
		a/h=6.67	5.291	12.089	17.969	21.552
	b/a=1.5	a/h=20.0	4.089	7.816	12.416	13.979
		a/h=10.0	4.012	7.547	11.768	13.160
		a/h=6.67	3.895	7.165	10.911	12.109
	b/a=0.5	a/h=20.0	6.952	8.964	12.669	17.690
		a/h=10.0	6.579	8.408	11.674	15.871
		a/h=6.67	6.082	7.704	10.519	13.825
	b/a=1.0	a/h=20.0	10.096	20.165	29.184	35.677
		a/h=10.0	9.388	17.908	25.098	29.774
		a/h=6.67	8.519	15.486	21.153	24.520
	b/a=1.5	a/h=20.0	7.626	11.680	18.257	18.674
		a/h=10.0	7.192	10.818	16.343	16.745
		a/h=6.67	6.628	9.775	14.217	14.666
	b/a=0.5	a/h=20.0	25.532	30.793	41.226	56.848
		a/h=10.0	21.558	25.819	34.205	46.066
		a/h=6.67	17.805	21.373	28.216	36.581
	b/a=1.0	a/h=20.0	8.172	15.321	19.125	25.847
		a/h=10.0	7.698	14.177	17.093	22.750
		a/h=6.67	7.086	12.815	14.858	19.583
	b/a=2.0	a/h=20.0	3.919	6.727	11.074	12.051
		a/h=10.0	3.830	6.462	10.357	11.418
		a/h=6.67	3.700	6.095	9.488	10.588
	b/a=0.5	a/h=20.0	2.836	3.393	5.013	7.830
		a/h=10.0	2.799	3.337	4.899	7.551
		a/h=6.67	2.740	3.252	4.726	7.160
	b/a=1.0	a/h=20.0	2.836	4.609	10.264	11.196
		a/h=10.0	2.799	4.490	9.792	10.663
		a/h=6.67	2.740	4.326	9.161	9.944
	b/a=2.0	a/h=20.0	0.711	1.941	2.836	4.609
		a/h=10.0	0.709	1.907	2.799	4.490
		a/h=6.67	0.705	1.863	2.741	4.326

$$(\omega_R^{**} = \omega_R \sqrt{\frac{Eh^2}{\rho a^4(1-\nu^2)}}, M=N=10)$$

s : Denotes simply supported edges

c : Denotes clamped edges

f : Denotes free edges

상으로 pseudospectral 해석법의 알고리즘인 allocation 이 유한요소법의 수치적분과 근본적으로 다르기 때문이다.

높은 차수의 Chebyshev polynomial을 기저함수로 이용하여 미분방정식의 해를 미정계수화 하여 수치적인 해를 얻는 방법인 pseudospectral 해석법은 semi-analytic하다라고 말할 수 있다. 따라서 Table 2에 제시된 Reissner-Mindlin 평판이론에 pseudospectral 해석법을 적용하여 구한 고유진동수의 근사해는 다른 수치적인 방법으로 구한 근사해 보다 엄밀해에 가까운 해라고 말할 수 있다. Reissner-Mindlin 평판에 대한 미분방정식의 복잡성으로 인해 해석적인 엄밀해를 구하는 것이 매우 어려움을 겪고 있는 현실적인 상황에서 두꺼운 직사각 평판에 대해 pseudospectral 해석법을 적용하여 구한 고유진동수들은 다른 수치적인 방법으로 구한 근사해에 대한 기준이 될 수 있으리라 생각되어진다.

4. 결 론

Pseudospectral 해석법을 이용하여 두꺼운 평판의 특이치 문제에 대한 해석을 수행하였다. 단순 지지된 평판의 동적문제를 해석한 결과 평판의 두께가 얇을 경우 Reissner-Mindlin 평판의 고유진동수가 Kirchhoff 평판의 고유진동수의 엄밀해에 일치함을 보였으며 또한 평판의 길이에 비해 두께가 증가함에 따라 항상 Reissner-Mindlin 평판의 고유진동수가 Kirchhoff 평판의 고유진동수보다 낮음을 확인하였다. 두꺼운 직사각 평판의 동적 해석 과정에서 적절한 Gauss-Chebyshev grid 수와 1개의 요소만으로도 빠르게 수렴하는 pseudospectral 해석법은 해가 수렴하기 위해 많은 수의 요소가 필요하고 shear locking 현상이 관찰되는 유한요소법에 비해 보다 효율적임을 알 수 있었다.

Pseudospectral 해석법은 높은 차수의 Chebyshev polynomial을 기저함수로 이용하여 미분방정식의 해를 미정계수화 하여 해를 얻는 방법으로 다른

수치해석법과는 달리 semi-analytic한 측면이 있어 다른 수치적인 방법으로 구한 근사해 보다 엄밀해에 가까운 해라고 말할 수 있기 때문에 다른 수치적인 방법으로 구한 근사해에 대한 기준이 될 수 있으리라 생각되어진다.

후 기

본 연구는 한국학술진흥재단의 대학부설연구소 연구비지원(과제번호 972030301)에 의하여 연구되었으 며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Mindlin, R. D., 1951., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plate," J. Appl. Mech., Vol. 18, No. 1, pp. 31~38.
- (2) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., "The Finite Element Method," vol. 2, McGraw-Hill, New York, pp. 70~73.
- (3) Hughes, T. J. R., 1987, "The Finite Element Method," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., pp. 323~324.
- (4) Boyd, J. P., 1989., "Chebyshev & Fourier Spectral Methods," Lecture Notes in Engineering 49, Springer-Verlag, Berlin.
- (5) 이진희, 1998., "Pseudospectral 요소법을 이용한 Reissner-Mindlin 평판의 해석," 대한기계학회 논문집 A권, 제22권, 제12호, pp. 2136~2145.
- (6) Kikuchi, N., 1986., "Finite Element Methods in Mechanics," Cambridge, New York, pp. 304~310.
- (7) Meirovitch, L., 1967., "Analytical Methods in Vibrations," The Macmillan company, New York, pp. 179~186.