

# 변위에 기초한 동하중에서 변환된 동가정하중하에서의 구조최적설계

강병수\* · 최우석\* · 박경진\*\*  
(1999년 11월 15일 접수)

## Structural Optimization under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement

Byung-Soo Kang, Woo-Seok Choi and Gyung-Jin Park

**Key Words :** Equivalent Static Load(동가정하중), Critical Time(위험시간), Simulation(모사), Multiple Loading Condition(다중하중조건)

### Abstract

All the loads in the real world act dynamically on structures. Since dynamic loads are extremely difficult to handle in analysis and design, static loads are utilized with dynamic factors. The dynamic factors are generally determined based on experiences. Therefore, the static loads can cause problems in precise analysis and design. An analytical method based on modal analysis has been proposed for the transformation of dynamic loads into equivalent static load sets. Equivalent static load sets are calculated to generate an identical displacement field in a structure with that from dynamic loads at a certain time. The process is derived and evaluated mathematically. The method is verified through numerical tests. Various characteristics are identified to match the dynamic and the static behaviors. For example, the opposite direction of a dynamic load should be considered due to the vibration response. A dynamic load is transformed to multiple equivalent static loads according to the number of the critical times. The places of the equivalent static load can be different from those of the dynamic load. An optimization method is defined to use the equivalent static loads. The developed optimization process has the same effect as the dynamic optimization which uses the dynamic loads directly. Standard examples are solved and the results are discussed

### 1. 서론

슈미트(Schmit)<sup>(1)</sup>에 의해 도입된 컴퓨터를 이용한 구조최적화기법은 지금까지 많은 경우 구조물의 정적인 반응에 치중되어 연구가 이루어져 왔다. 그러나 실제의 모든 하중은 시간에 따라 변하는 동하중(dynamic load)이며 이 경우 구조물의 최적화를 시도할 때 정적반응 최적화를 위해 개발된 방법들은 적당하지 않은 경우가 많다. 이러한 이

유로 구조물의 동적반응 최적화를 위한 많은 연구들이 이루어지고 있으나 시간중속구속조건을 직접적으로 처리하는 알고리즘 개발에 어려움이 뒤따른다.<sup>(2-5)</sup>

한편, 정적반응 최적화 기법은 비교적 많은 연구에 의해 잘 정리되어 있는 상태이다. 따라서 동적인 하중이 구조물에 가해졌을 때의 구조최적설계를 위해 경험적으로 얻은 동계수(dynamic factor)를 동하중의 최대값에 곱하여 적당한 정하중을 얻은 후 그 힘을 이용하여 응력해석이나 정적최적설계를 수행하는 방법이 사용되고 있다.<sup>(6)</sup> 그러나 동계수는 경험적으로 얻어내는 것이 대부분이므로 이에 대한 신뢰성이 문제가 될 뿐만 아니라, 과연 동계수를 곱하여 얻은 정하중을 동하중이 가해지

\* 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학과

E-mail : gjpark@email.hanyang.ac.kr

TEL : (031)400-4065 FAX : (031)407-0755

는 절점에 작용시킴으로써 실제 동하중을 받을 때의 상태를 제대로 표현할 수 있는지도 의문의 여지가 많다. 따라서 이로 인한 설계상의 신뢰도 문제가 야기된다.

이미 잘 개발되어 있는 정적반응 최적화 알고리즘을 이용하기 위해서는 동하중을 등가의 정하중으로 적절히 변환하는 기법이 필요하다. 이를 위해서는 동하중이 가해졌을 때 특정 시간에서의 구조물의 상태와 비슷한 상태를 만드는 정하중을 산출하는 것이 중요하다. 이러한 문제가 해결될 경우 현재 잘 정리되어 있는 정적반응 최적화 알고리즘을 이용함으로써 동적반응 최적화 문제를 직접 다루는 것과 비슷한 효과를 거둘 수 있을 것으로 생각된다. 이러한 생각에서 출발하여 중요한 지점에서 동하중에 의한 최대 변위와 같은 변위를 발생시키는 등가의 정하중을 이용하여 최적설계과정에 반영시키는 연구가 발표되었다.<sup>(7,8)</sup> 그러나 이는 결과는 비교적 바람직했으나 컴퓨터에 의한 수치실험만 이루어져 이론적인 근거를 보여주기에 다소 미흡했다. 따라서 이에 대한 이론적인 근거를 마련하기 위한 연구가 계속 진행되어 왔으며 최근에 동하중이 가해지는 구조물의 변위와 비슷한 변위를 만들어내는 등가정하중(equivalent static load)을 산출하는 기법이 제안되었고<sup>(9)</sup> 이를 구조 최적설계에 이용하는 연구가 진행되었다.<sup>(10)</sup> 이 기법에서는 동하중이 가해졌을 때의 구조물의 상태 중 특히 변위에 주목하여, 특정 시간에 발생하는 변위장과 같거나 비슷한 변위장을 만들어 내는 등가정하중을 유한요소법과 모드해석을 통해 해석적으로 산출하였다.

본 연구에서는 이제까지의 연구 결과를 바탕으로, 변환된 등가정하중을 실제로 최적설계에 적용할 경우에 고려해야 하는 문제들에 대해 논의하고 그 해결책을 제안하려고 한다. 예제의 최적화 문제를 위해서 GENESIS<sup>(12)</sup>와 IDESIGN<sup>(13)</sup>이, 해석을 위해서는 NASTRAN<sup>(14)</sup>이 사용되었다.

## 2. 일반적인 동하중의 등가정

### 하중으로의 변환

유한요소법을 이용한 진동이론에 따르면 구조물의 동적 거동은 다음과 같은 미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$M\ddot{\mathbf{d}} + K\mathbf{d} = \mathbf{f} = \{0 \cdots 0 f_i \cdots f_{i+l-1} 0 \cdots 0\}^T \quad (1)$$

여기서  $M$ 은 질량행렬,  $\mathbf{d}$ 는 동하중에 의한 변위백

터,  $K$ 는 강성행렬,  $\mathbf{f}$ 는 동하중벡터,  $l$ 은 동하중벡터의 영이 아닌 요소의 숫자이다. 한편 정적해석의 유한요소 방정식은 다음과 같다.

$$K\mathbf{x} = \mathbf{s} \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{x}$ 는 정적변위이고  $\mathbf{s}$ 는 정적하중을 의미한다. 위의 식들을 사용하면 동하중하의 과도응답 계산시 임의의 시간  $t_a$ 에 발생하는 변위장과 동일한 변위장을 발생시키는 등가정하중을 다음과 같은 식으로 계산할 수 있다.

$$\mathbf{s} = K\mathbf{d}(t_a) \quad (3)$$

식 (3)은 과도응답해석시 계산시간의 효율 측면에서 비실용적이지만 임의의 시간에 동하중에 대한 등가정하중이 해석적으로 존재한다는 근거를 제시하고 있다. 식 (3)을 모드해석 결과를 이용하여 표현하면 다음과 같다.<sup>(9)</sup>

$$\mathbf{d}_p(t_a) = \mathbf{x}_p = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \left( \sum_{j=1}^N u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p = 1, \dots, N) \quad (4)$$

여기서  $\omega_k$ 는  $k$  번째 고유진동수이고  $u_{ij}$ 는  $j$  번째 고유벡터의  $i$  번째 요소이다. 식 (4)는  $N$  개의 성분을 갖는 벡터  $\mathbf{s}$ 를 구하는 연립방정식이다. 식 (3)과 식 (4)는 서로 동일한 의미를 가진다. 식 (3)과 식 (4)에 의한 등가정하중은 모든 자유도에 작용하는 하중으로 계산된다.

그러나 자유도가 큰 실제 구조물의 경우 설계자가 변위를 만족시키고자 하는 주요한 절점과 하중이 작용하는 절점을 선택할 수 있다. 따라서 정적하중벡터  $\mathbf{s}$ 는 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\mathbf{s} = [0 \cdots 0 s_i \cdots s_{i+l-1} 0 \cdots 0]^T \quad (5)$$

벡터  $\mathbf{s}$ 에서 영이 아닌 성분 및 개수는 임의로 정할 수 있다. 이 경우 식 (4)의 연립방정식은 다음의 두 식으로 나뉘어 질 수 있다.

$$\mathbf{d}_p(t_a) = \mathbf{x}_p = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \left( \sum_{j=i'}^{i'+l'-1} u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p = 1, \dots, l') \quad (6)$$

$$\mathbf{d}_p(t_a) \approx \mathbf{x}_p = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \left( \sum_{j=i'}^{i'+l'-1} u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p = l' + 1, \dots, N) \quad (7)$$

식 (6)은 영이 아닌  $l'$ 개의 벡터  $s$ 의 성분들에 대한 선형연립방정식이다. 그러므로 주요한 절점의 개수  $p$ 는  $l'$ 이어야 하고 벡터  $s$ 는 식 (6)을 풀어 결정된다. 식 (7)은 식 (6)의 결과에 의해 오차를 포함하는  $d_p(t_a)$  ( $p > l'$ )로 근사화 된다. 근사화된 변위의 오차는  $l'$ 가 커질수록 줄어든다.

그러나 주요한 절점의 변위를 만족시켜 주는 등가정하중을 구하기 위해 식 (6)을 직접 풀면 주어진 절점에서의 모든 조건을 만족시켜 주기 위해 그 값이 지나치게 커지는 경향을 갖는다.<sup>(9)</sup> 그래서 연립방정식을 식 (8a-8b)의 연립부등식으로 변환하는 근사화 기법이 제안되었다.

$$d_p(t_a) \leq x_p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \left( \sum_{j=i'}^{i'+l'-1} u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p=1, \dots, h) \text{ when } d_p \text{ is positive} \quad (8a)$$

$$d_p(t_a) \geq x_p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \left( \sum_{j=i'}^{i'+l'-1} u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p=1, \dots, h) \text{ when } d_p \text{ is negative} \quad (8b)$$

$$d_p(t_a) \approx x_p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \left( \sum_{j=i'}^{i'+l'-1} u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p=h+1, \dots, N) \quad (8c)$$

식 (8a-8b)은 등가정하중에 의한 변위의 절대값이 동하중에 의한 그것보다 크거나 같아야 함을 의미한다. 식 (8a-8c)의 합은 전체자유도  $N$  보다 작은  $n$  까지 수행되며  $p$ 는 식 (6)의  $l'$ 와 같은 필요가 없다. 이 경우  $p$ 의 개수는 동하중하에서의 변위와 동일한 변위를 요구하는 모든 중요한 자유도를 나타내는 충분한 개수  $h$ 로 선택할 수 있다. 근사화된 등가정하중은 식 (8a-8b)의 제한조건을 만족하는 최소하중으로 결정할 수 있다. 이는 식 (9)와 같은 정식화로 표현된다.

Find  $s_i$  ( $i=1, \dots, l'$ )  
 To minimize the square sum of  $s_i$  (9)  
 subject to  $d_p \leq x_p$  ( $p=1, \dots, h$ )

이러한 최적화 과정을 통한 등가정하중  $s_i$ 는 임의의 시간에 동하중에 의한 주요한 절점에서의 최대 변위를 포함하는 변위장을 유발한다. 동하중이 구조물에 작용할 때 위험시간의 계산과 위험시간에서의 변위장의 계산은 수치미적분을 이용하며 이는 과도응답해석을 통해서도 구할 수 있다. 여기에서의 유도과정은 참고문헌<sup>(9)</sup>에 자세히 나와 있

다.

### 3. 등가정하중을 이용한 구조최적설계

구조물에 동하중이 작용할 때, 이를 등가정하중으로 적절히 대체시킨 후 기존의 정적반응 최적화 기법을 따른다면 상대적으로 적은 비용으로도 동하중을 직접 다루는 최적설계와 비슷한 효과를 거둘 수 있을 것으로 기대된다. 이와 같은 목적을 위해 고려해야 할 사항들은 다음과 같은 것들이 있다.

(1) 각각의 위험시간에 대응하는 각각의 등가정하중을 다중하중조건으로 처리한다.

Fig. 1의 (a)와 같은 구조물에 동하중이 작용할 때 구조물은 진동하며, 대체로 (b) 또는 (c)와 같은 상태일 때가 있다. (b)와 (c)는 절점 A의 수직 방향 변위가 각각 아래와 위 방향으로 최대가 되는 시점이고, 구조물이 받는 응력은 대략 이 두 상태일 때에 가장 크다고 예측할 수 있다. 응력 상태에 주목하면, 동일한 부재라도 b)의 경우에 인장 응력을 받던 것이 c)의 경우에는 압축응력을 받을 수 있다. 이는 동하중이 작용하는 방향에 대해 반대방향으로 구조물이 변형했을 때 파손될 수도 있음을 말해준다. 그러므로 등가정하중을 이용하여 이 구조물을 해석하고 설계한다면, 적어도 이 두 가지 상태는 반드시 고려하는 것이 바람직하다. 그러기 위해서 두 경우에 대한 각각의 등가정하중을 적절히 산출하여 이들을 모두 최적설계 과정에 반영해야 한다. 동계수를 곱해서 동하중이 가해지는 방향으로 작용되는 정하중만을 이용하여 최적화를 수행하는 경우는, (b)의 경우만을 고려해 준 것으로서 (c)와 같은 상황에 대해서는 충분히 대처하지 못하는 결과를 낳을 수 있다.

일반적으로 동하중이 가해지는 구조물의 응력 상태는 시간에 따라 변한다. 이러한 응력의 변화는 중요하다고 생각되는 응력 상태들을 만들어내는 각각의 등가정하중을 사용하여 근사적으로 표현할 수 있다. 이 경우에 생기는 복수 개의 등가정하중들은 구조최적설계에서 현재 사용되고 있는 다중하중조건으로 처리될 수 있다.

(2) 등가정하중의 작용절점에 관한 사항

등가정하중의 작용 절점이 반드시 동하중이 가해지는 절점일 필요는 없다. 등가정하중을 설계에 적용할 경우, 정하중의 크기 뿐만 아니라 그 작용 절점 또한 설계자가 풀어야 할 문제라고 보는 것이 합리적이다. 식 (4)는 관성력을 포함하는 정적

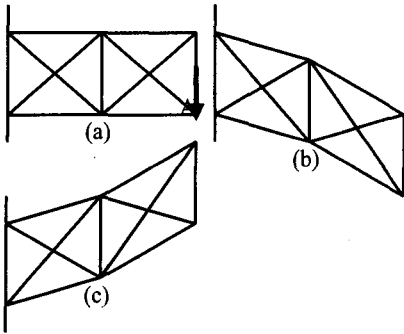


Fig. 1 Vibration of node A in ten bar truss under a dynamic load in the vertical direction

평형상태를 기술하는 D'Alembert 의 원리와 동등한 표현으로서, 이 식에서는 관성력을 반영하는 등가정하중  $s$  가 모든 자유도에 분산되어 작용한다는 것을 알 수 있다.

유한요소법에 의한 응력은 변위의 미분치로 표현되므로 작은 변위의 차이라도 응력장에서 큰 차이로 나타날 수 있다. 그러나 변위장을 가깝게 모사하면 응력장의 오차를 줄어줄게 하는 이점이 있다. 특정 시간의 동적 변위장에 가깝게 모사하기 위해서 여러 절점에 상대적으로 적은 값의 등가정하중을 작용하는 것이 한 절점에서 상대적으로 큰 값의 등가정하중을 작용하는 것보다 더 효과적이다.

동계수를 곱하여 얻은 정하중을 동하중이 작용하는 절점에만 가하는, 현재의 일반적인 방법은 동하중에 의한 변위장을 제대로 모사하지 못하는 경향이 있다. 이같은 단점을 극복하기 위해서는 여러 절점에 등가정하중을 분산시키는 것이 바람직하다.

(3) 등가정하중이 설계 변수의 함수임에 따른 정식화 1

등가정하중은 “현재” 설계점에서의 구조물의 반응으로부터 얻는 값이다. 그러므로 최적화가 수행되면서 설계가 변경되면 등가정하중도 다시 계산되어야 한다. 즉, 한 반복수행(iteration)에서 선택색시에 탐색하는 설계점마다 등가정하중을 다시 계산하고 이를 고려한 선택색이 수행되어야 한다. 그러나 이런 종류의 선택색은 고가이다.

이러한 계산의 비효율성을 극복하기 위해 한 반복 수행에서는 설계변수가 크게 변하지 않는다는 가정을 두어 외력을 일정하게 두고 선택색을 수행할 수 있다. 선택색이 종료된 후, 개선된 설계 변수에 대하여 등가정하중을 다시 구해 하중조건으로 적용한다. 그 대략적인 흐름을 Fig. 2 에 나타

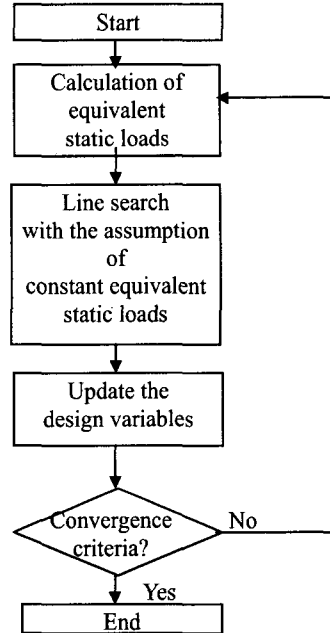


Fig. 2 Equivalent static loads are considered as the function of design variables

내었다. 등가정하중을 이용한 최적화 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } F(\mathbf{b}) \\ &\text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{s}_i(\mathbf{b}) \\ &\quad \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{x})_j \leq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서  $F(\mathbf{b})$  는 목적 함수,  $\mathbf{b}$  는 설계 변수 벡터,  $\mathbf{K}$  는 강성 행렬이다.  $\mathbf{s}_i(\mathbf{b})$  는 설계변수의 함수인 등가정하중 벡터이며  $i$  의 개수만큼의 다중하중조건을 고려함을 의미한다.  $\Phi(\mathbf{b}, \mathbf{x})_j$  는  $j$  의 개수만큼의 부등식 구속조건함수이다.

(4) 등가정하중이 설계 변수의 함수임에 따른 정식화 2

한 반복수행에서만 등가정하중을 상수로 가정하는 위의 방법과 달리, 등가정하중을 잠정적으로 설계변수에 무관하다고 간주하여 최초에 한 번 구한 등가정하중을 사용하여 최적화를 진행한다. 이 동안은 식 (10)의 등식구속조건이 변하지 않는 일반적인 정적최적화 과정과 동일하다. 최적해를 일단 계산하면, 이 최적해를 사용하여 다시 등가정하중을 계산하여 최적화하는 과정의 반복을 통해 설계 변수를 수렴시키는 방안을 제안한다. Fig. 3 에 그 대략적인 흐름을 보였다. 이 방법은 최적화

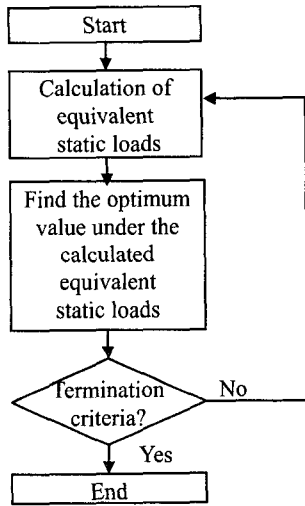


Fig. 3 Equivalent static loads are considered independent from design variables during a optimization process

과정 동안 식 (10)의 등식구속조건의 변화를 최대한 억제하는 효과가 있다.

(5) 등가정하중은 부등식 제한조건을 포함하는 최적화 문제 식 (9)를 푸는 과정에서 계산된다. 사용된 부등식 구속조건은 동하중이 어떤 특정 위험 시간에 만드는 변위장보다 항상 크거나 같도록 설정되어 있어 최악조건(worst case)을 고려해 주는 효과가 있다. 이는 안전설계의 관점에서 바람직한 것이라 할 수 있다.

#### 4. 예제 및 고찰

##### 4.1 원형단면 중공 외팔보

Fig. 4 와 같은 5 개의 요소로 구성된 원형단면 중공 외팔보의 끝단에 반주기 여현파(half sine wave)의 동하중이 작용한다. 이 예제는 참고문헌 [2]에서 다루어졌으며 재료는 탄성계수가 200GPa, 밀도가 7830kg/m<sup>3</sup> 인 탄소강이다. 설계 변수는 내측 지름(d)과 두께(t)이며 최적화를 위한 정식화는 식 (11)과 같다. 등가정하중의 산출방법에 따라 3 가지의 다른 방법으로 최적화를 진행하였다. 위험 시간은 끝 단의 수직 아래 방향 변위가 최대가 되는 시점을 선택하였다. Fig. 4의 굵은 화살표는 위험시간 선택의 기준을 나타낸다. Fig. 3의 흐름을 따라 최적화를 수행하였다.

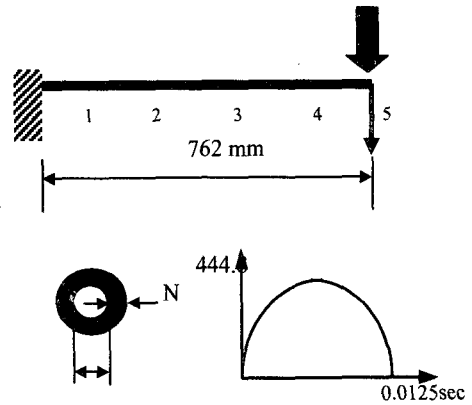


Fig. 4 A cantilever beam with a circular hollow section and the applied dynamic load

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} \quad \text{weight} \\
 &\text{subject to} \quad \left| \sigma_{\max} \right| \leq 310.2\text{MPa} \\
 &\quad \quad \quad \left| v_{\max} \right| \leq 25.4\text{mm} \\
 &\quad \quad \quad f_1 \geq 30\text{Hz}
 \end{aligned} \tag{11}$$

- Case 1; 위험시간에 절점 4, 5의 변위보다 큰 변위를 유발하는 절점 4, 5에 작용하는 등가정하중
- Case 2; 위험시간에 절점 4, 5의 변위보다 큰 변위를 유발하는 모든 절점에 작용하는 등가정하중
- Case 3; 위험시간에 모든 절점의 변위보다 큰 변위를 유발하는 모든 절점에 작용하는 등가정하중

3 가지 경우에 대한 최적화 결과와 참고문헌 (2)의 최적해가 함께 Table 1에 나타나 있다. 표에서 응력 및 변위값은 초기치 또는 최적해를 가지고 원래의 동하중에 대한 과도응답해석을 수행하였을 때의 최대값을 의미한다. 일관성을 기하기 위해 Case 1, 2, 3에서 쓰여진 동일한 solver로 참고문헌 (2)의 최적해에 대하여 과도응답해석을 수행하였다. 그 결과는 참고문헌 [2]와 조금 다르다. Table 1에서 보면 Case 1의 경우 응력제한조건을 위배하고, Case 2의 경우 응력제한조건을 약간 위배하며, Case 3의 경우 위배하지 않는다. 등가정하중을 산출하는 기준과 그 작용 절점을 어떻게 선택하느냐에 따라 각각의 결과가 차이를 가진다. 이같은 결과로 등가정하중을 나누어 분포시키는 것이 집중하중보다 바람직하고, 등가정하중의 산출시에는 보다 많은 절점의 변위를 고려하는 것이 바람직하다는 것을 알 수 있다.

**Table 1** The initial values and the optimum results for the cantilever beam (mm, MPa, Hz, kg)

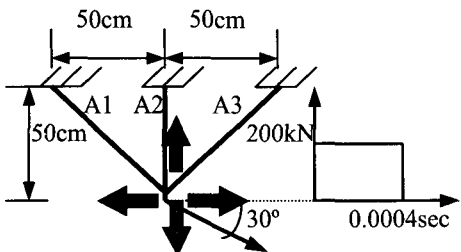
	Thickness t	Diameter d	Stress	Displacement in Vertical direction	Frequency f <sub>1</sub>	Mass
Initial value	2.794	35.3	217.48	-8.95	67.2	1.975
Optimum Case 1	2.54	29.97	333.17	-15.73	57.29	1.537
Optimum Case 2	2.54	30.83	314.57	-14.64	58.79	1.573
Optimum Case 3	2.54	31.12	309.44	-14.28	59.29	1.586
Optimum Reference [3]	2.54	32.59	283.48	-12.58	61.97	1.655

4.2 3부재 트러스

Fig. 5와 같은 동하중이 작용하는 3부재 트러스에 Fig. 3의 흐름을 따르는 최적화 기법을 적용하였다. 설계변수는 각 부재의 단면적이며 사용된 재질은 앞서 보인 탄소강이다. 위험시간은 끝단의 변위가 상하좌우로 각각 최대가 될 때를 선택하였고 이는 Fig. 5에서 굵은 화살표로 나타나 있다. 최적설계시에는 각각의 위험시간에 대하여 계산된 등가정하중이 4개의 다중하중조건으로 작용하도록 하였다. 설정한 최적화 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize weight} \\ & \text{subject to } \begin{cases} |\sigma_{\max}| \leq 160\text{MPa} \\ |v_{\max}| \leq 1\text{mm} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Table 2에 최적화 결과를 나타내었다. 여기서 응력제한조건이 위배되었음을 알 수 있다. 제안된 등가정하중은 전후좌우로의 최대변위 발생시간을 기준으로 산출되었으므로, 1번 또는 3번 부재의 길이 방향으로의 최대변위 발생시간은 고려되지 못하였다. 이로 인한 등가정하중의 부적절함이 응력 제한조건을 위배하는 결과를 낳았다고 생각된다. 여기서 보듯이, 위험시간의 선택은 매우 중요하다.



**Fig. 5** A three bar truss and the applied dynamic load

4.3 2부재 사각단면 중공 프레임

Fig. 2와 Fig. 3의 두 가지 최적화 방법을 2부재 사각중공 프레임에 적용하여 그 결과를 비교하였다. 프레임 중간 절점에 수직 아래방향으로 반주기 여현과 모양의 동하중이 작용할 때(Fig. 6의 가는 화살표), 이 절점의 변위가 상하로 각각 최대가 되는 시점을 위험시간으로 선택하였다.(Fig. 6의 굵은 화살표)

각각의 위험시간에 대한 등가정하중 2개를 산출하여 이를 다중하중조건으로 처리하였다. 설정한 최적화 문제는 식 (13)과 같으며 설계변수는 폭(b)과 높이(h)와 두께(t)이다. 사용된 재료의 탄성계수와 밀도는 각각 200GPa, 7830kg/m<sup>3</sup>이다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize weight} \\ & \text{subject to } \begin{cases} |\sigma_{\max}| \leq 150\text{MPa} \\ |v_{\max}| \leq 15\text{mm} \\ f_1 \geq 10\text{Hz} \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

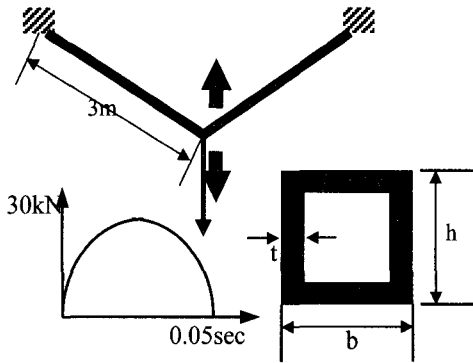
Table 3에서 최적값 1은 Fig. 2의 흐름을 따라, 최적값 2는 Fig. 3의 흐름을 따라 최적화를 수행한 결과이다. 두 가지 경우에 있어, 결과의 차이가 미소함을 알 수 있다. 이것으로 적어도 보 요소나 트러스 요소 구조물의 최적화에서 Fig. 3의 최적화 기법도 유용함을 알 수 있다.

**Table 2** The initial values and the optimum results for the three bar truss (mm<sup>2</sup>, MPa, kg)

	A1	A2	A3	σ <sub>1</sub>	σ <sub>2</sub>	σ <sub>3</sub>	Mass
Init.	2830	2830	2830	98	41	100	42.4
Opt.	1925	1000	1844	163	84	167	24.8

**Table 3** The initial values and the optimum results for the two member frame (mm, MPa, Hz, kg)

	t	b	h	$\sigma$	$\delta$	$f_1$	Mass
Initial	5	150	200	305	-40.0	27.0	160
Opt. 1	2	277	354	152	-11.4	49.3	118
Opt. 2	2	270	361	151	-11.2	49.7	118

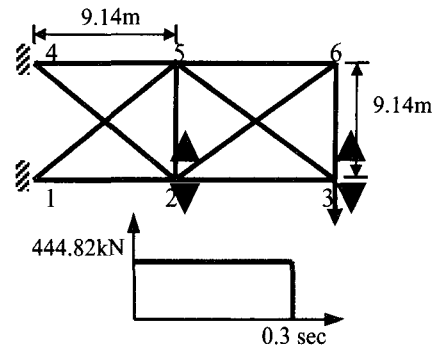


**Fig. 6** A two member frame with a rectangular hollow section and the applied dynamic load

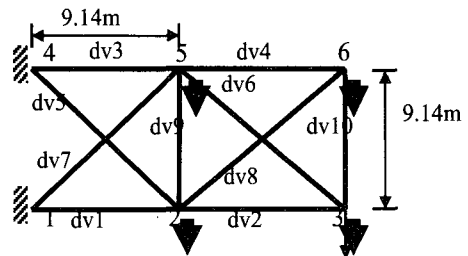
4.4 10 부재 트러스

Fig. 7 과 같이 3 번 절점에 수직 아래 방향으로 계단함수꼴의 동하중(Fig. 7 의 가는 화살표)이 작용하는 10 부재 트러스가 있다. 등가정하중을 각기 다른 두 방법으로 계산하여 최적화를 수행하였다.

CASE 1 은 3 번 절점의 수직 아래 방향의 변위가 최대가 되는 시점을 위험시간으로 선택하여 그 위험시간에서 동하중과 같이 3 번 절점에만 작용하는 등가정하중을 산출한다.(Fig. 8 의 가는 화살표) 그리고 이를 이용하여 최적화를 수행한다. 이는 구조물에 작용하는 동하중에 동계수를 곱하여 얻은 등가정하중을 동하중이 작용하는 절점에, 동하중이 작용하는 방향과 같은 방향으로 작용시키는 흔히 사용되는 방법과 유사하다. 이 경우는 뒤의 다중하중조건에 대해서 단일하중조건(single loading case)이라 할 수 있다. CASE 2 는 Fig. 7 의 굵은 화살표와 같이 2 번 절점의 양과 음의 수직 방향 변위가 최대가 되는 위험시간과 3 번 절점의 양과 음의 수직 방향 변위가 최대가 되는 위험시간을 선택한다. 이 4 개의 위험시간에 대하여 Fig. 8 의 굵은 화살표처럼 2, 3, 5, 6 번 절점의 수직방향으로 분산되어 작용하는 4 개의 등가정하중을 산출한다. 그리고 이를 최적설계시 4 개의 다중하중조건으로 처리한다. 모든 경우에서 등가정하중을 산출할 때의 제한조건은 절점 2, 3, 5, 6 의 수직방향변위이다. 최적화를 위해 설정한 문제는 식 (14) 와 같으며 설계변수는 각 부재의 단면적이고 사용



**Fig. 7** A ten bar truss and the applied dynamic load



**Fig. 8** The nodes where static load sets are applied in the ten bar truss

된 재료의 탄성계수는 69GPa, 밀도는 2770kg/m<sup>3</sup> 이다. Fig. 2 의 흐름을 따르는 최적화 방법을 사용하였고 최적화 결과는 Table 4 에 나타내었다.

Minimize weight

$$\begin{aligned} \text{subject to } & |\sigma_{\max}| \leq 344.8\text{MPa} \\ & |v_{\max}| \leq 76.2\text{mm} \\ & f_1 \geq 1\text{Hz} \end{aligned} \quad (14)$$

Table 5 에서 동계수를 곱하는 일반적인 방법으로 최적화를 시도한 경우 그 최적의 설계값으로 과도 응답해석을 수행해 보면 9 번 부재의 응력이 제한조건을 위배한다. 그러나 여러 절점에 등가정하중을 분산시켜 다중하중조건을 사용한 경우에는 제한조건을 만족하고 있다. Table 4 에서 2 가지 경우에 대한 9 번 부재의 최적해는 큰 차이가 없지만 다중하중조건인 경우 다른 부재의 단면적이 상대적으로 증가하여 9 번 부재의 응력을 감소시킨다는 사실을 알 수 있다. 이러한 사실로 미루어 어떤 구조물에서는 그 크기만을 변화시켜 동하중이 가해지는 절점에 그대로 가하는 현재의 일반적인 방법이 매우 위험한 결과를 가져올 수 있다는 것을 짐작할 수 있다. 해결책 중의 하나로서 다중하중조건을 사용하면서 여러 절점에 등가정하중을 분산시키는 최적화 기법을 생각할 수 있다.

**Table 4** The optimum values for the ten bar truss (cm<sup>2</sup>, kg)

	dv1	dv2	dv3	dv4	dv5	
Case1	86.4	74.1	150.4	3.23	12.8	
Case2	124.2	73.4	190.0	21.9	43.0	
	dv6	dv7	dv8	dv9	dv10	Mass
Case1	104.7	106.2	3.23	3.23	3.23	1625
Case2	102.8	134.2	31.2	3.27	4.34	2171

\* Initial value : dv1~dv10=161.3, mass=4759

**Table 5** Comparison of responses at optimum for the ten bar truss (MPa, cm)

	Stress of dv9	Displacement in vertical direction at node 3
CASE 1	552.3	7.64
CASE 2	261.3	7.36

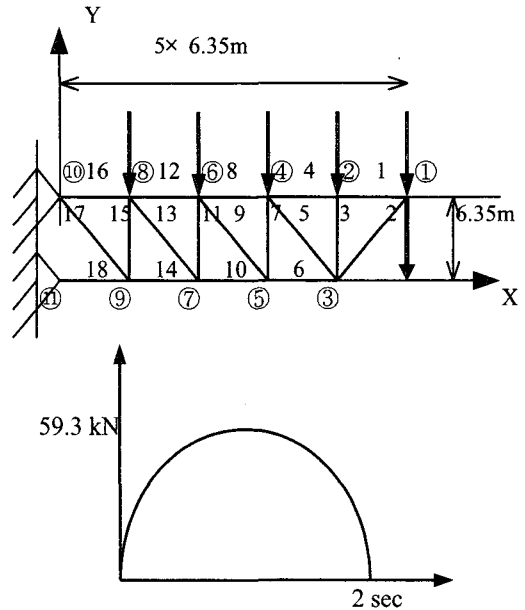
4.5 18 부재 트러스

Fig. 9 와 같이 18 부재 트러스에 반주기 여현파 형태의 동하중이 각각 절점 1, 2, 4, 6, 8 에 작용하고 있다. 재료의 탄성계수, 밀도, 포아송비는 각각 68.9GPa, 2765kg/m<sup>3</sup>, 0.3 이다. 4 개의 크기설계변수와 8 개의 형상설계변수를 선택하였다. 위 부재(1, 4, 8, 12, 16), 아래 부재(2, 6, 10, 14, 18), 세로 부재(3, 7, 11, 15), 그리고 대각선 부재(5, 9, 13, 17)의 단면적을 각각 크기설계변수로, 절점 3, 5, 7, 9 의 x, y 좌표를 형상설계변수로 선택하였다. 절점 1 이 음의 y-방향으로 최대 변형하는 시간을 위험시간으로 선택하였고 이는 Fig. 9 에 붉은 화살표로 표현되어 있다. 그 위험시간에서 동하중이 작용하는 절점과 같은 절점에 작용하는 등가정하중을 산출한다. 등가정하중을 계산할 때의 제한조건은 모든 자유도에서의 변위이다. Fig. 3 의 최적화 방법에 의하여 응력 및 좌굴 제한조건하에서 18 부재 트러스의 형상최적설계를 수행하였다. 허용 응력값은 138MPa 이며, 좌굴 제한조건은 각 부재에 작용하는 하중이 그 부재의 좌굴하중보다 적어야 함을 의미한다. 최적화 결과는 Table 6 에 나타나 있다. Table 6 에서 X's 와 Y's 는 그 값에 1.27m 를 곱한 값이 초기좌표에서의 이동값이다.

18 부재 트러스는 앞의 예제들과 비교하면 단일 하중조건하에서 최적화가 진행되었다. 하지만 단일 하중조건을 적용한 10 부재 트러스의 경우처럼 응력 제한조건이 크게 위배하는 현상은 없었다. 이는 하중작용절점이 분포되어 있기 때문에 한 절점에 큰 하중이 작용함으로 발생하는 변위의 왜곡 현상이 나타나지 않은 것으로 생각된다. 등가정하중은 동하중을 받는 구조물이 처해질

**Table 6** The change of the design variables (cm<sup>2</sup>)

	Initial value	Optimum value
Area(top)	64.52	88.85
Area(bottom)	139.68	122.67
Area(vertical)	80.65	29.04
Area(diagonal)	45.61	20.45
X3	0.00	-1.64
Y3	0.00	3.89
X5	0.00	-1.79
Y5	0.00	2.80
X7	0.00	-1.40
Y7	0.00	1.66
X9	0.00	-0.79
Y9	0.00	0.53
Mass(kg)	2913.57	2144.47



**Fig. 9** An 18-rod truss and the applied dynamic load

수 있는 여러 가지 위험상태에 대하여 구한다. 즉, 어떤 주요한 절점의 자유도가 극값을 갖는 시간에 대하여 등가정하중을 산출한다. 몇 개의 등가정하중을 구해야 하는지의 여부는 공학자의 직관에 달려있다. 많은 등가정하중을 구하여 적용하면 안전설계의 관점에서 좋을 수 있다. 그러나 어떤 등가정하중은 다른 등가정하중보다 덜 위험한 상태를 만들어 낸다. 다시 말하면, 어떤 등가정하중에 대하여 안전하면 다른 등가정하중에 대하여는 항상 안전할 수 있다. 따라서 너무 많은 등가정하중을 구하는 것은 시간 및 효율의 관점에서 반드시 유



### 5. 결론

동하중에 의해 발생한 변위장과 비슷한 변위장을 유발하는 근사 등가정하중 개념을 이용하여 동하중을 받는 구조물을 최적화하였다. 등가정하중을 구조최적설계에 적용할 경우에 다음의 몇가지 지침을 따른다면 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

(1) 최적화 과정에 구조물의 동적인 상태를 반영하기 위해 다수의 위험시간에 대응하는 다수의 등가정하중을 구조물에 가해야 한다. 10 부재 트러스 예제에서 다중하중조건을 적용하여 좋은 결과를 가져온 것이 이를 잘 뒷받침한다.

(2) 비록 동하중이 한 절점에만 가해지더라도 등가정하중은 여러 절점에 분산시켜 가하는 것이 바람직하다. 원형단면 중공외팔보 예제가 이것을 분명히 뒷받침하고 있으며, 18 부재 트러스 예제에서는 단일하중조건이 적용되었지만 등가정하중을 분산시켜 좋은 결과를 얻었다.

(3) 등가정하중의 설계변수에 대한 종속성 때문에 일어나는 계산상의 부담을 줄이기 위해, 그 종속성을 부분적으로 무시하는 근사화 전략을 사용한다. 제안된 근사화 전략들은 예제들에 성공적으로 적용되었다.

현재 등가정하중을 여러 절점에 나누어 분포시킬 때 분포시킬 절점의 결정은 다분히 공학적인 감각에 의존하도록 되어 있어 설계자의 직관에 따라 설계의 질이 좌우될 우려가 많다. 따라서 등가정하중을 분포시킬 절점의 일반적인 결정 방법에 대한 연구가 필요하다.

### 후 기

본 연구는 교육부 학술연구조성비(기계공학분야)에 의한 연구(과제번호[ME96-C-25])입니다. 관계자분들께 사의를 표합니다.

### 참고문헌

(1) Schmit, L.A., 1960, "Structural Design by Systematic Synthesis," *Proceedings of the 2nd*

*Conference on Electric Computation*, ASCE, New York.

(2) Feng, T.T., Arora, J.S., and Haug, E.J., 1977, "Optimal Structural Design under Dynamic Loads," *Int. J. for Num. Mech. in Eng.*, Vol. 11, pp. 39-62.

(3) Haug, E.J., Arora, J.S., and Feng, T.T., 1978, "Sensitivity Analysis and Optimization of Structures for Dynamic Response," *J. of Mech. design*, Vol. 100, pp. 311-318.

(4) Hsieh, C.C. and Arora, J.S., 1984, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Dynamic Response," *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 43, No. 2, pp. 195-219.

(5) Lim, O.K. and Arora, J.S., 1987, "Dynamic Response Optimization Using An Active Set RQP Algorithm," *Int. J. for Num. Mech. in Eng*, Vol. 24, pp. 1827-1840.

(6) Haftka R.T. and Gürdal Z., 1991, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

(7) 최우석, 강신천, 신민재, 박경진, 1996, "자주포 로드암 동하중의 상당 정하중으로의 변환 및 형상최적설계," *대한기계학회논문집(A)*, 제 20 권, 제 12 호, pp. 3767-3781.

(8) Shin, M.J., Choi, W.S., and Park, G.J., 1997, "Transformation of a Dynamic Load into an Equivalent Static load and Shape Optimization of the Road Arm," *PACAM V Conference*, Puerto Rico.

(9) Choi, W.S. and Park, G.J., 1999, "Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads Based on Modal Analysis," *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 46, pp. 29-43.

(10) Kang, B.S., Choi, W.S., and Park, G.J., 1999, "Structural Optimization Under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement," *AIAA Conference*, St. Louis, MO.

(11) Grandhi, R.V., Haftka, R.T., and Watson, L.T., 1986, "Design-Oriented Identification of Critical Times in Transient Response," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 649656.

(12) *GENESIS User Manual: version 3.0*, 1996, VMA Engineering

(13) Arora, J.S. and Tseng, C.H., 1987, *User's Manual for IDESIGN :version 3.5* Optimal Design Laboratory, College of Engineering, The University of Iowa, Iowa City, U.S.A.

(14) *CSA/NASTRAN User's Manual*, 1994, CSAR.