

철도차량의 임계속도에 관한 연구

정우진* · 김성원**
(1999년 11월 22일 접수)

A Study on the Critical Speed of Railway Vehicles

Woojin Chung and Sungwon Kim

Key Words: Bifurcation(분기), Critical Speed(임계속도), Rolling Testing Rig(주행 시험대), Creep Theory(크리프 이론), Periodic Solution(주기해), Hunting Phenomena(사행동)

Abstract

This research has been performed to reveal the hysteresis phenomena of the hunting motion in a railway passenger car having a bolster. Since linear analysis can not explain them, bifurcation analysis is used to predict its outbreak velocities in this paper. However bifurcation analysis is attended with huge computing time, thus this research proposes more effective numerical algorithm to reduce it than previous researches. Stability of periodic solution is obtained by adapting of Floquet theory while stability of equilibrium solutions is obtained by eigen-value analysis. As a result, linear and nonlinear critical speed are acquired. Full scale roller rig test is carried out for the validation of the numerical result. Finally, it is certified that there are many similarities between numerical and test results.

기호설명	
A, B	: 접촉면 장, 단축 반경
v	: 차량 주행속도
c	: 차륜 회전속도
$\zeta_x, \zeta_y, \zeta_{sp}$: 접촉면 각방향 크리퍼지
F_x, F_y, M_z	: 접촉면 각방향 크립력, 모멘트
f	: 크리프 계수
C	: 크리퍼지 계수
R	: 접촉 차륜반경
G_w, G_R	: 차륜, 레일의 전단계수
γ	: 차륜 conicity
σ	: Poisson 비
M_c, M_f, M_w	: 차체, 대차, 차축 질량
I_c, I_b	: 차체, 볼스터 회전관성모멘트
K_p, K_s	: 1차, 2차 스프링 상수
	C_p, C_s : 1차, 2차 댐퍼 감쇠계수
	$2a$: 좌, 우측 접촉점간 거리
	$2b$: 대차 프레임간 거리
	$2b_p, 2b_s$: 1차, 2차 현가장치간 거리
	$2L_s$: 대차간 거리
	$2L_w, 2L_T$: 차륜, 레일형상 중심점간 거리
	h_c, h_w, h_r : 차체, 차축, 레일 무게중심고
	μ : 차륜, 레일간 마찰계수
	T_c : 차체 볼스터간 회전마찰 토크
	R_0 : 공칭 차륜반경
	y_w, y_f, y_c : 차축, 대차, 차체 횡방향 변위
	ϕ, ψ : 차축 롤(roll), 요(yaw) 변위
	Ψ_w, Ψ_f, Ψ_c : 차축, 대차, 차체 요 변위
	Φ_{TO} : 레일 시공 경사각
	u, r : 차축 좌표계에서 접촉점까지 횡, 수직방향 변위
	v, ρ : 레일 좌표계에서 접촉점까지 횡, 수직방향 변위
	e, n : 차축, 레일 좌표계 단위 벡터

* 회원, 한국철도기술연구원

E-mail : wjchung@krii.re.kr

TEL : (031)461-8531 FAX : (031)461-8374

** 고려대학교 기계공학과

1. 서론

철도차량의 횡방향 안전성은 일정한 주행속도 대역 이상에서 급격히 악화된다. 이런 현상은 차륜(wheel)과 레일(rail)의 형상에서 기인된 철도차량의 고유한 성질로서 차량이 저속으로 주행할 경우 오히려 탈선을 방지시켜주는 복원력을 제공한다. 불안정해진 차량은 진행방향으로 S자 운동을 시작하게 되고 속도를 계속 증가시킬 경우 진폭이 점차로 증가되어 결국 탈선하게 된다. 차량의 이런 횡방향 변동을 사행동이라고 한다. 사행동이 처음 발생하는 주행속도를 임계속도라고 정의한다. 예측되지 못한 차량의 사행동 발생은 치명적인 결과를 야기할 수 있으므로 오래 전부터 임계속도를 정확히 예측하기 위한 연구들이 많이 진행되어왔다. 그러나 대부분의 이들 선행연구들이 고유치 해석에 기반을 두고 있어 사행동이 발생, 마감되는 속도를 하나로 예측하기 때문에 일정한 속도대역에서 불규칙적으로 발생하는 실제 사행동을 정확하게 설명할 수 없었다.^(1,2) 실험적 방법에 의한 임계속도 해석은 차량을 고속으로 주행시킬 때 전복사고와 같은 안전문제가 발생할 가능성이 있어 해석연구와 함께 수행되기에 그간 어려움이 있었다.

최근들어 Huilgol,⁽³⁾ Moelle 그리고 Gasch^(4,5) 등이 기존해석의 한계를 극복하고자 분기이론을 처음 철도차량 동특성 해석에 적용 하였다. Hans True, Knudsen^(6,7) 등은 제한된 분기해석을 통해 차량에 복수의 임계속도가 존재할 수 있음을 소개하였고 철도차량의 비예측적 사행동이 이것으로 설명될 수 있음을 보였다. 그러나 복잡한 해석모델의 경우, 분기해석에 많은 해석시간이 소요되었고 시스템의 모든 흡입점(attractor)들을 정확하게 구하는 것이 불가능하였기 때문에 이들은 해석대상을 차축(wheelset)이나 대차(bogie)로 제한하였다. 이에 본 연구에서는 비선형 관계식들을 2점 경계치 문제로 해석하는 알고리즘을 적용하여 다자유도로 이루어진 복잡한 전체 차량 시스템에 분기해석이 적용될 수 있게 하였다. 이 방법을 통해 차륜 미끄러짐으로 발생하는 creep력과 차량 횡방향 거동간의 상호작용, 차륜/레일 다중접촉 등과 같은 철도차량의 미세한 메커니즘이 해석에 고려될 수 있었고 선형 및 비선형 임계속

도들이 효과적으로 구해질 수 있었다. 예측된 임계속도관련 정보가 타당한지 검증하기 위하여 주행시험대를 이용한 실차 주행실험을 실시하였으며 이를 실측치와 비교하였다.

2. 철도차량 모델링

2.1 Creep 모델

차륜과 레일은 탄성체이므로 두 물체의 접점이 타원형이 되는 Hertzian 접촉을 하게된다. 차량 진행속도 V 와 차륜 회전속도 c 간의 차이는 두 물체간에 변형을 불일치를 유발시키게 되어 접촉면에는 Fig. 1과 같이 크리프력(creep force)이 작용한다. 접촉면은 차륜과 레일이 같은 속도로 움직이는 점착 영역(adhesion area)과 점착력이 한계에 이르러 미끄러짐이 일어나는 미끄러짐 영역(slip area)으로 나누어진다. 비선형적 형태로 분포하는 접촉면의 전단응력을 적분하면 크립력이 구해진다. 크립력은 식 (2)~(4)의 식들을 사용하여 식 (1)과 같이 근사화 될 수 있다.⁽⁸⁾

식 (2)는 접촉면에서 차륜 회전속도와 차량 진행속도간의 무차원 상대속도 개념으로 정의된 길이방향, 횡방향 그리고 회전방향 크리퍼지(creepage) 이다.

식 (2)에서 α 는 접촉면에서 차륜과 레일간의 접촉각이며 식 (3)에서 C_{ij} 는 접촉면적과 Poisson 비에 따라 결정되는 상수이다.

$$\begin{aligned} F_x &= -f_{33}\zeta_x \\ F_y &= -f_{11}\zeta_y - f_{12}\zeta_{sp} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} M_z &= f_{12}\zeta_y - f_{22}\zeta_{sp} \\ \zeta_x &= \frac{(|V| - |c|)}{v} \\ \zeta_y &\approx \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{sp} &= \frac{R \sin \gamma}{|c| \gamma} \approx \frac{R \sin \gamma}{v \gamma} \\ f_{11} &= (AB)GC_{22}, f_{12} = (AB)^{3/2}GC_{23} \\ f_{22} &= (AB)^2GC_{33}, f_{33} = (AB)GC_{11} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (1/G) &= \frac{1}{2} [(1/G_w) + (1/G_R)] \\ (\sigma/G) &= \frac{1}{2} [(\sigma_w/G_w) + (\sigma_R/G_R)] \end{aligned} \tag{4}$$

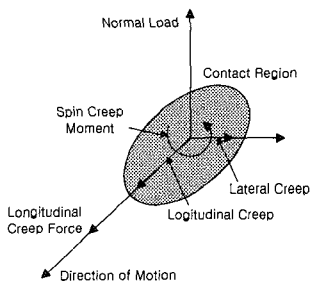


Fig. 1 Forces on contact plan

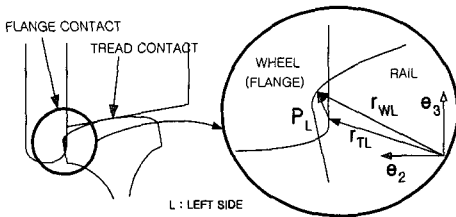


Fig. 2 Flange contact

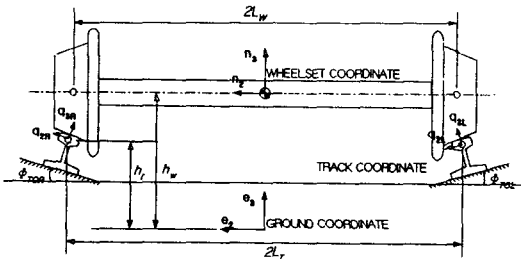


Fig. 3 Coordinate system

2.2 차륜, 레일 접촉모델

해석과 실험에 사용된 차륜의 답면(tread)은 1/40 경사를 가지고 있으며 중심선을 따라 1/20 만큼 기울어지게 설치된 시험 레일(60kg) 위를 주행한다. 차축의 변위가 크지 않을 경우 접촉점은 차륜의 답면에 위치하게 되며 1개의 접촉점을 가진다. 이때의 접촉점은 차륜과 레일을 강체로 가정하고 두 형상의 교점을 계산하여 찾을 수 있다. 반면 차축의 변위가 차륜의 플렌지(flange)와 레일이 접촉할 정도로 커지면 차륜 답면과 함께 플렌지면에 접촉점이 생성되는 2중 접촉이 발생된다.

Fig. 2와 같이 플렌지 접촉은 차륜과 레일의 형상이 서로 교차되는 간섭현상(penetration)을 동반하며 이것은 더 이상 강체모델로 설명될 수 없다. 기존의 연구에서 플렌지 접촉은 강한 강성을 가지는 횡방향 스프링을 해석모델에 추가함으로

서 설명되었지만 접촉면의 반력 이외의 작용력들은 동특성 해석에 고려될 수 없는 단점을 가지고 있었다.⁽⁹⁾ 본 연구에서는 2중 접촉시 간섭현상에 의하여 플렌지 면에 발생하는 복잡한 작용력들을 동특성 해석에 고려하여 좀더 정확한 결과를 얻고자 Fig. 3과 같은 좌표계를 사용하였다. 간섭부위의 상대변위를 알면 Hertz 접촉이론이 적용되어 크리프력을 포함한 플렌지 접촉점에서의 모든 작용력들을 구할 수 있으므로 다음의 과정에 따라 간섭부위의 상대변위를 구하였다. 지면 좌표계와 차축 좌표계는 식 (5)과 같은 관계를 가지고 있으며 지면 좌표계와 레일 좌표계 사이의 변환행렬은 식 (6)과 같다.

$$T_{ne} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \phi \sin \phi & \cos \phi \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi \sin \phi & -\sin \phi \cos \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$T_{qe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{TO} & \sin \phi_{TO} \\ 0 & -\sin \phi_{TO} & \cos \phi_{TO} \end{bmatrix} \quad (6)$$

차축 무게중심에서 접촉점까지의 위치벡터는 식 (7)과 같이 표시될 수 있다.

$$r_{ow} = [0, L_w + u, -r] \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

지면 좌표계로부터 접촉점까지의 위치벡터를 식 (5)을 사용하여 지면 좌표계로 정리하면 식(8)과 같이 표시될 수 있다.

$$r_w = [x, y, z + h_w] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + T_{ne} \cdot r_{ow} \quad (8)$$

역시 지면 좌표계에서 레일 접촉점까지의 위치벡터를 식(6)을 사용하여 지면 좌표계로 정리하면 식(9)과 같다.

$$r_t = [0, L_T, h_r] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + [0, \nu, \rho] T_{qe} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

따라서 플렌지 접촉으로 간섭현상이 발생하였을 때 차륜과 레일의 상대변위벡터 P는 식 (10)과 같이 정리될 수 있다.

$$P = r_w - r_t = [P_1 \ P_2 \ P_3] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

간섭부위에서의 수직력은 상대변위와 식 (11)

Table 1 Parameters(P.M) of the Test Car

P.M	Value	P.M	Value	P.M	Value
M_c	39,200kg	K_{pz}	1.0MN/m	a	0.75m
M_f	2,500kg	K_{sx}	4.60MN/m	b_p	0.978m
M_w	1,800kg	K_{sy}	0.16MN/m	b_s	1.255m
I_{cx}	68,280kgm ²	K_{sz}	1.65MN/m	b	1.2m
I_{cy}	1,394kgm ²	C_{px}	12kNs/m	L_s	8.5m
I_{bz}	20kgm ²	C_{py}	12kNs/m	h_c	1.5m
I_{fz}	3,000kgm ²	C_{pz}	45kNs/m	μ	0.25
I_{uz}	130kgm ²	C_{sx}	10kNs/m	T	12kNm
K_{px}	4.50MN/m	C_{sy}	10kNs/m	R_o	0.4575m
K_{py}	4.50MN/m	C_{sz}	88kNs/m		

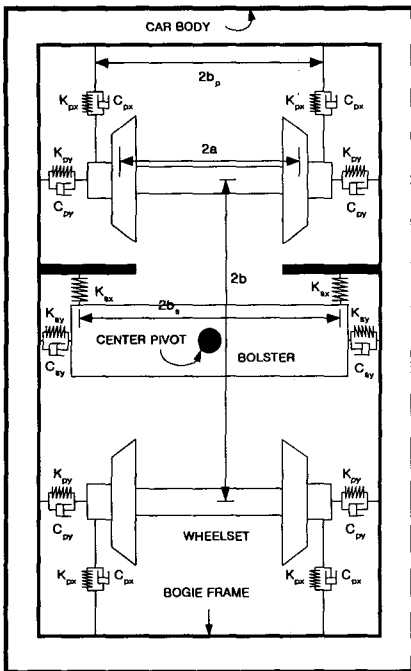


Fig. 4 A plan view of analysis bogie model

과 같은 관계로 갖는다.⁽¹⁰⁾

$$N_i = \left(\frac{P_i}{P_1} \right)^{3/2}, \quad i = \text{Left, Right} \quad (11)$$

여기서 P_1 은 1N이 작용할 때의 간섭변위다.

2.3 운동방정식

객차를 대상으로 한 해석모델의 운동방정식은 다음과 같으며 사용된 물성치들은 Table 1에 정리되었다.

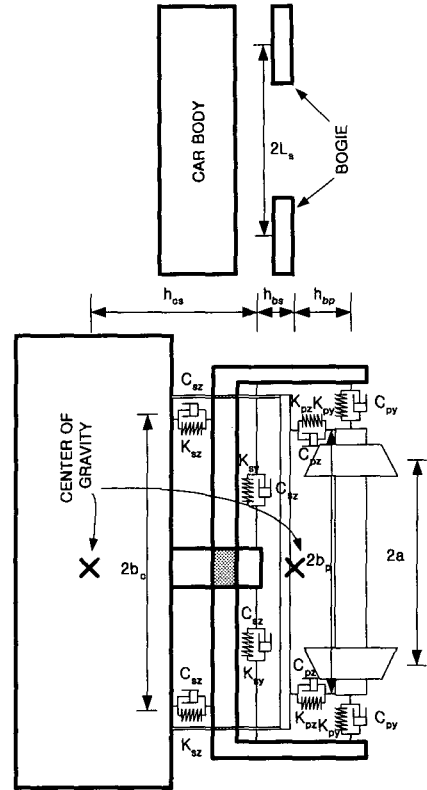


Fig. 5 A front and side view of analysis model

$$M_{\omega} \ddot{y}_{\omega 1} = 2K_{py}(y_{f1} + b\Psi_{f1} - y_{\omega 1}) + 2C_{py}(\dot{y}_{f1} + b\dot{\Psi}_{f1} - \dot{y}_{\omega 1}) + F_{y1} \quad (12)$$

$$M_{\omega} \ddot{y}_{\omega 2} = 2K_{py}(y_{f1} + b\Psi_{f1} - y_{\omega 2}) + 2C_{py}(\dot{y}_{f1} + b\dot{\Psi}_{f1} - \dot{y}_{\omega 2}) + F_{y2} \quad (13)$$

$$M_{\omega} \ddot{y}_{\omega 3} = 2K_{py}(y_{f2} + b\Psi_{f2} - y_{\omega 3}) + 2C_{py}(\dot{y}_{f2} + b\dot{\Psi}_{f2} - \dot{y}_{\omega 3}) + F_{y3} \quad (14)$$

$$M_{\omega} \ddot{y}_{\omega 4} = 2K_{py}(y_{f2} + b\Psi_{f2} - y_{\omega 4}) + 2C_{py}(\dot{y}_{f2} + b\dot{\Psi}_{f2} - \dot{y}_{\omega 4}) + F_{y4} \quad (15)$$

$$I_{\omega z} \ddot{\Psi}_{\omega 1} = 2b_p^2(K_{px}(\Psi_{f1} - \Psi_{\omega 1}) + C_{px}(\dot{\Psi}_{f1} - \dot{\Psi}_{\omega 1})) + M_{yaw1} \quad (16)$$

$$I_{\omega z} \ddot{\Psi}_{\omega 2} = 2b_p^2(K_{px}(\Psi_{f1} - \Psi_{\omega 2}) + C_{px}(\dot{\Psi}_{f1} - \dot{\Psi}_{\omega 2})) + M_{yaw2} \quad (17)$$

$$I_{\omega z} \ddot{\Psi}_{\omega 3} = 2b_p^2(K_{px}(\Psi_{f2} - \Psi_{\omega 3}) + C_{px}(\dot{\Psi}_{f2} - \dot{\Psi}_{\omega 3})) + M_{yaw3} \quad (18)$$

$$I_{\omega z} \ddot{\Psi}_{\omega 4} = 2b_p^2(K_{px}(\Psi_{f2} - \Psi_{\omega 4}) + C_{px}(\dot{\Psi}_{f2} - \dot{\Psi}_{\omega 4})) + M_{yaw4} \quad (19)$$

$$M_f \ddot{y}_{f1} = 2K_{sy}(y_c + L_s\Psi_c + h_c\theta_c - y_{f1}) + 2C_{sy}(\dot{y}_c + L_s\dot{\Psi}_c + h_c\dot{\theta}_c - \dot{y}_{f1}) - 2K_{py}(2y_{f1} - y_{\omega 1} - y_{\omega 2}) - 2C_{py}(2\dot{y}_{f1} - \dot{y}_{\omega 1} - \dot{y}_{\omega 2}) \quad (20)$$

$$M_f \ddot{y}_f = 2K_{sy}(y_c + L_s \dot{\psi}_c + h_c \theta_c - y_f) + 2C_{sy}(\dot{y}_c + L_s \dot{\psi}_c + h_c \dot{\theta}_c - \dot{y}_f) - 2K_{py}(2y_f - y_{\omega 3} - y_{\omega 4}) - 2C_{py}(2\dot{y}_f - \dot{y}_{\omega 3} - \dot{y}_{\omega 4}) \quad (21)$$

$$I_{fz} \ddot{\psi}_f = 2b_p^2 K_{px}(\psi_{\omega 1} + \psi_{\omega 2} - 2\psi_f) + 2b_p^2 C_{px}(\dot{\psi}_{\omega 1} + \dot{\psi}_{\omega 2} - 2\dot{\psi}_f) + 2b_p^2 K_{sx}(\psi_{bl} - \psi_f) + 2b_p^2 C_{sx}(\dot{\psi}_{bl} - \dot{\psi}_f) + 2bK_{py}(-2b\psi_f - y_{\omega 2} + y_{\omega 1}) + 2bC_{py}(-2b\dot{\psi}_f - \dot{y}_{\omega 2} + \dot{y}_{\omega 1}) \quad (22)$$

$$I_{fz} \ddot{\psi}_f = 2b_p^2 K_{px}(\psi_{\omega 3} + \psi_{\omega 4} - 2\psi_f) + 2b_p^2 C_{px}(\dot{\psi}_{\omega 3} + \dot{\psi}_{\omega 4} - 2\dot{\psi}_f) + 2b_p^2 K_{sx}(\psi_{l2} - \psi_f) + 2b_p^2 C_{sx}(\dot{\psi}_{l2} - \dot{\psi}_f) + 2bK_{py}(-2b\psi_f - y_{\omega 3} + y_{\omega 4}) + 2bC_{py}(-2b\dot{\psi}_f - \dot{y}_{\omega 3} + \dot{y}_{\omega 4}) \quad (23)$$

$$I_{bz} \ddot{\psi}_{bl} = T_{cl} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_{bl}) + 2b_s^2 K_{sx}(\psi_f - \psi_{bl}) + 2b_s^2 C_{sx}(\dot{\psi}_f - \dot{\psi}_{bl}) \quad (24)$$

$$I_{bz} \ddot{\psi}_{l2} = T_{cl} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_{l2}) + 2b_s^2 K_{sx}(\psi_f - \psi_{l2}) + 2b_s^2 C_{sx}(\dot{\psi}_f - \dot{\psi}_{l2}) \quad (25)$$

$$M_c \ddot{y}_c = -K_{sy}(4y_c + 4h_c \theta_c - 2y_f - 2y_f) - C_{sy}(4\dot{y}_c + 4h_c \dot{\theta}_c - 2\dot{y}_f - 2\dot{y}_f) \quad (26)$$

$$I_{cx} \ddot{\theta}_c = b_s(-4b_s K_{sz} \theta_c - 4b_s C_{sz} \dot{\theta}_c) - h_c(K_{sy}(4h_c \theta_c - 2y_f - 2y_f) + C_{sy}(4\dot{y}_c + 4h_c \dot{\theta}_c - 2\dot{y}_f - 2\dot{y}_f)) \quad (27)$$

$$I_{cz} \ddot{\psi}_c = T_{cl} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_{bl} - \dot{\psi}_c) + T_{cl} \operatorname{sgn}(\dot{\psi}_{l2} - \dot{\psi}_c) + L_s(K_{sy}(-4L_s \dot{\psi}_c - 2\dot{y}_f + 2\dot{y}_f) + C_{sy}(-4L_s \dot{\psi}_c - 2\dot{y}_f + 2\dot{y}_f)) \quad (28)$$

3. 비선형 해석

3.1 분기해석

3.1.1 고정해 해석

차량 운동방정식들에 대한 공간상태 표현은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, V) = \mathbf{J}(V)\mathbf{x} \quad (29)$$

여기서 시스템 상태변수 $\mathbf{x} \in R^{34}$ 이고 V 는 주행속도이다.

$$\mathbf{J}(V) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=0} \quad (i, j=1, \dots, 34) \quad (30)$$

Jacobian 행렬은 식 (30)과 같이 정의된다. 차량의 주행속도를 점차 증가시키면 Jacobian 행렬의 고유치 중 실근의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 변하게 되고 차량은 불안정해진다. 이때를 선형 임계속도라고 정의한다. 고유치의 실근이 양으로 변환되는 형태에 따라 시스템 분기의 형태는 여러 가지로 나뉘어진다. 만일 식 (31)와 같은 조건으로 두 개의 켈레 복소수근이 동시에 허근을 가진다면 이 때의 주행속도 V_{Hope} 에서 Hope 분기가 발생한 것이라고 할 수 있다.

$$\lambda_{1,2} = \mu(V_{Hope}) \pm i\omega(V_{Hope}) \quad (31)$$

$$\mu(V_{Hope}) = 0, \quad \frac{d\mu}{dt} \neq 0$$

Hope 분기가 발생되면 시스템은 불안정 주기해와 안정 주기해를 동시에 가지게 된다. 특히 Hope 분기의 형태가 subcritical Hope 분기였을 경우 불안정 주기해는 분기점에서 대개변수인 주행속도를 따라 역방향으로 존재한다.

3.1.2 주기해 해석

주기해는 대개변수인 주행속도를 따라 복잡한 형태로 존재할 수 있으며 그 위치와 안정성을 판별하기가 어렵다. 기존의 연구에서 주기해 해석은 매 단계마다 임의의 초기치를 정의하고 해가 수렴해가는 흡입점을 찾는 brute-force 방법으로 수행되었다. 그러나 해의 안정성 판별에 이 방법은 많은 시간이 필요하였고 시스템의 모든 주기해 위치를 파악하는 것이 불가능하였다. 본 연구에서는 복잡한 해석모델에서도 주기해의 구조와 그 안정성을 효율적으로 구하기 위해 shooting 방법을 적용하였다.

주기해는 Hope 분기로부터 시작되며 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T) \quad (32)$$

$t = Tz$ 로 정의된 새로운 변수를 도입하여 식 (29)를 식 (32)에 적용하면 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dz} = T\mathbf{f}(\mathbf{x}, V), \quad \mathbf{x}|_{z=0} = \mathbf{x}|_{z=1} \quad (33)$$

초기위치 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)$ 와 주기 $T = T(0)$ 그리고 주행속도 $V = V(0)$ 를 가정한 후 식 (33)을 한 단계 적분하면 $\mathbf{x}(1) = G(\mathbf{x}, T, V)$ 이 된다. 경계조건에 의하여 이 식은 식 (34)을 만족

하여야 한다.

$$H(\mathbf{x}, T, V) = \mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0) = G(\mathbf{x}, T, V) - \mathbf{x}(0) = 0 \quad (34)$$

Newton Raphson 방법에 의하여 위 식이 만족될 때까지 미지수들은 반복 계산되어지고 이 후 다음 단계로 진행된다. 주기해의 안정성은 Floquet 정리에 의하여 구해질 수 있다. 먼저 주기해를 식 (35)와 같이 외란 \mathbf{y} 를 포함하는 2개의 항으로 나누어 정의한다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{y}(t) \quad (35)$$

식 (35)을 식 (29)에 대입하고 \mathbf{X}_0 에 대하여 전개하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} \simeq A(t)\mathbf{y} \quad (36)$$

위 식을 만족하고 n 개의 독립해로 구성되는 기본행렬을 정의하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{Y}} = A(t)\mathbf{Y} \quad (37)$$

여기서 $\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)]$ 이다. $\tau = t + T$ 로 놓으면 식(38)과 같이 정리될 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\tau} = A(\tau - T)\mathbf{Y} = A(\tau)\mathbf{Y} \quad (38)$$

$\mathbf{y}_i(t)$ 는 선형 독립해이므로 $\mathbf{y}_i(t+T)$ 도 선형 독립해가 되며 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)\Phi \quad (39)$$

여기서 Φ 는 $n \times n$ 상수 행렬이다. 이 행렬은 $t=0$ 일 때 R^n 상의 초기 벡터를 $t=T$ 일 때의 R^n 상의 벡터로 변환시켜주는 역할을 한다. 초기치를 $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$ 로 놓으면 식 (40)과 같아진다. 여기서 \mathbf{I} 는 단위행렬이다.

$$\Phi = \mathbf{Y}(T) \quad (40)$$

여기서 Φ 는 monodromy 행렬이다. Monodromy 행렬은 n 개의 고유치를 가지며 이것을 Floquet 상수라고 한다. 만일 주기해가 안정해라면 상수들은 모두 복소 평면상 단위원내에 놓인다. 안정 주기해가 불안정 주기해로 바뀌는 분기가 발생된다면 Floquet 상수들은 단위원을 벗어나게 되고 단위원을 벗어나는 형태에 따라 분기는 3종류로 구분된다. 고유치가 +1 방향으로 벗어나면 시스

템에는 cyclic-fold 분기가 발생되고 -1 방향으로 진행되면 periodic-doubling 분기가 발생된다. 마지막으로 1쌍의 켈레 복소수근이 단위원을 동시에 벗어나면 시스템에는 Neimark 분기가 발생된다.

3.2 수치해석

Fig. 6은 전방 대차, 그리고 Fig. 7은 전방 대차의 전방 차축에 대한 분기선도를 보여준다. 차량의 첫 번째 분기는 111km/h 부근에서 발생된다. 이 때 Jacobian 행렬의 고유치 중 1쌍의 켈레 복소수근이 Fig. 8에서 보듯이 동시에 허근만을 가지게 되고 분기점을 경계로 불안정 주기해가 나타나므로 이것은 subcritical Hopf 분기이다. 이때의 속도는 선형 임계속도라고 정의된다.

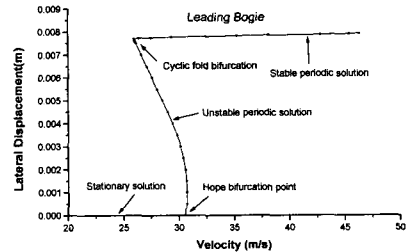


Fig. 6 Bifurcation diagram

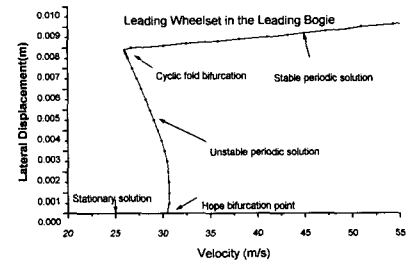


Fig. 7 Bifurcation diagram

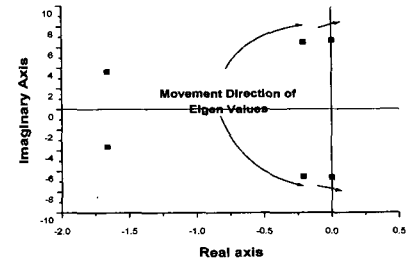


Fig. 8 Movement direction of eigen values

매개변수를 따라 역방향으로 이어지는 불안정 주기해는 약 97.2km/h에서 2차 분기를 맞게된다. 분기점에서 monodromy 행렬의 Floquet 상수들은 Fig. 9와 같이 단위원을 +1방향으로 벗어나므로 이것은 cyclic fold 분기다. 2차 분기점 이후 주기해는 안정된 주기해로 변하게 된다. 2차 분기점이 발생된 속도는 비선형 임계속도로 정의된다. 97.2~111km/h 사이에서 차량의 횡방향 운동은 초기값에 따라 안정 고정해 또는 안정 주기해로 수렴하게 되는 이력현상(hysteresis)이 발생된다.

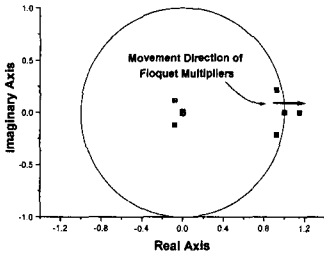


Fig. 9 Movement direction of floquet multipliers

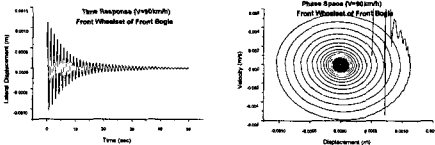


Fig. 10 Lateral behaviour of a car at 90km/h

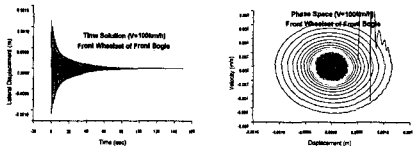


Fig. 11 Lateral behaviour of a car at 100km/h

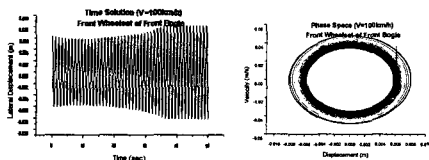


Fig. 12 Lateral behaviour of a car at 100km/h

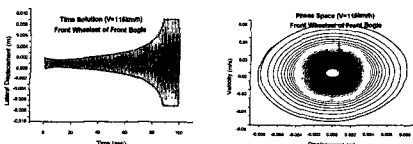


Fig. 13 Lateral behaviour of a car at 115km/h

Fig. 10, 13은 흡입점이 하나만 존재하는 영역에서 고정해와 주기해로 각각 수렴하는 차량의 거동을 보여주고 있다. Fig. 11, 12에는 2개 이상의 흡입점이 동시에 존재하는 영역일 경우 초기 조건에 따라 상이한 흡입점으로 수렴하는 차량의 거동을 보여준다. 시스템이 주기해로 수렴하는 경우 차량에는 과도한 횡방향 운동이 발생하게 되어 탈선하게 된다.

4. 검증실험

4.1 실험장치 구성

해석결과를 검증하기 위하여 임계속도 측정실험이 실시되었다. 주행중 차량의 응답을 측정하기 위하여 Fig. 14에 도시된 실험 차량의 차체와 전, 후방 대차 그리고 차축에는 가속도계가 변위계가 설치되었다. 주행속도 및 신호 측정 등은 fig. 15과 같은 시스템으로 제어되었다. 차륜과 레일을 매끈한 상태로 유지시켜 접촉면에서 발생된 과도 충격력으로 차량 거동이 선형 임계속도에 이르기 전에 불안정 주기해로 도약하는 현상을 막을 수 있었다.

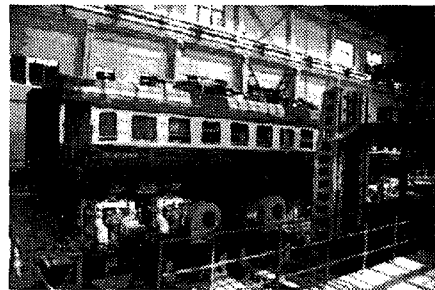


Fig. 14 Test passenger car

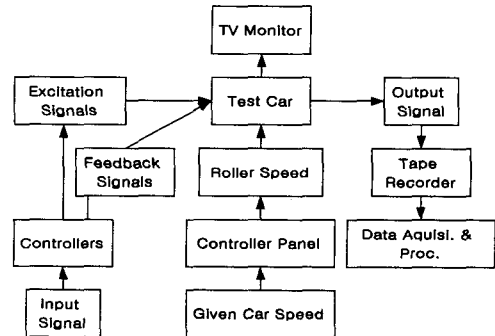


Fig. 15 Test and measuring system

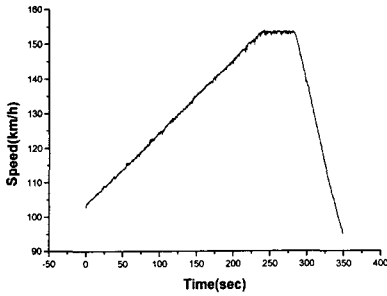


Fig. 16 Test speed

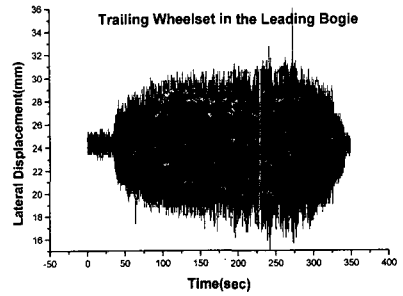


Fig. 19 Trailing wheelset displacement

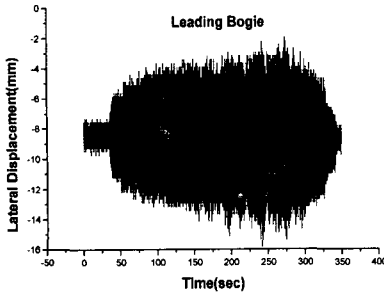


Fig. 17 Leading bogie lateral displacement

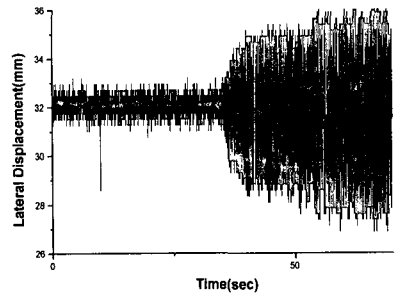


Fig. 20 Lateral displacement at linear critical speed

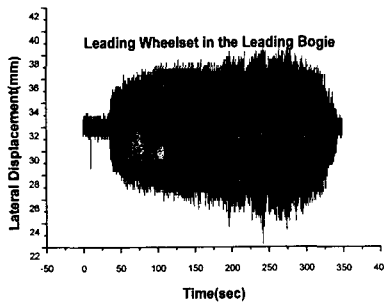


Fig. 18 Leading wheelset lateral displacement

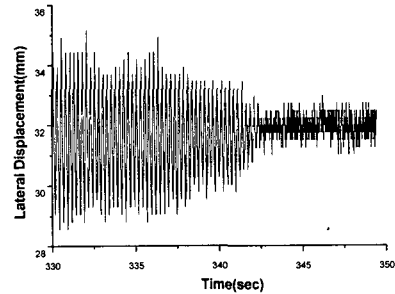


Fig. 21 Lateral displacement at nonlinear critical speed

4.2 실험결과

주행시험대의 속도를 서서히 증가시켜 40초 부근에 이르면 차량의 횡방향 운동은 급격히 증가된다. 160km/h까지 증가시킨 속도를 다시 감소시키면 340초 부근에서 횡방향 사행동은 갑자기 소멸한다. 40초와 340초 부근의 주행속도는 각각 110.5km/h와 100.3km/h이며 이것은 차량의 선형 및 비선형 임계속도이다.

본 실험의 결과는 분기해석을 통해 예측되었던 선형 임계속도와는 0.4% 그리고 비선형 임계속도와는 3.1%의 상대오차를 보이고 있다. Fig. 16은 실험중 주행속도의 변화를 나타내며 Fig. 17~19는 차량의 각 부분의 거동변화를 보여준다. 임계속도가 발생하고 소멸할 때 차량은 Fig. 20과 21에서 보는 바와 같이 급격한 거동변화를 보인다. 수차에 걸쳐 수행된 반복실험을 통하여 2개의 임계속도가 항상 같은 속도대역에서 발생함을 확인하였다

5. 결론

본 연구는 철도차량에서 주행 중 발생하는 사행동 이력현상을 해석적으로 예측하기 위하여 수행되었으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 차륜과 레일이 2중 접촉을 할 때 플랜지면에 발생하는 간섭현상을 동특성 해석에 적용함으로서 기존의 연구에서 간과되었던 횡방향 이외의 작용력들이 고려될 수 있었다.

(2) 분기이론을 철도차량 동특성 해석에 적용하여 철도차량의 선형 및 비선형 임계속도를 예측하였다.

(3) 주행시험대를 이용한 실차 주행실험을 실시하여 실제 차량에서도 복수의 임계속도가 존재함을 확인하였다.

(4) 실험을 통해 재현성을 확인함으로써 비선형 임계속도가 선형 임계속도와 같은 차량의 고유한 성질을 확인하였다.

(5) 예측결과와 실험결과는 잘 일치하였으며 이를 통해 비선형 임계속도가 분기해석으로 예측될 수 있음을 확인하였다.

(6) 차량의 비선형 임계속도는 시스템의 고유한 성질이므로 이후의 연구에서 최적화 시킬 수 있는 가능성을 확인하였다.

(7) 선형 및 비선형 임계속도 사이의 속도로 차량이 주행한다면 필요이상의 외란이 주행 중 발생할 경우 안정성이 급격히 악화되어 위험할 수 있다. 그러므로 차량의 최고속도는 비선형 임계속도 이하로 제한되어야 한다.

참고문헌

(1) Cooperrider. N. K., 1972, "The Hunting Behaviour of Conventional Railway Trucks," *ASME J. Eng. Industry* 94, pp. 752~762.
 (2) Carter, F. W., 1928, "On the Stability of Running of Locomotives," *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 121, pp. 585~611.
 (3) Huilgol RR, 1978, "Hof-Friedrichs Bifurcation and the Hunting of a Railway Axle," *Quart J.*

Appl. Mech. Vol. 36, pp. 85~94.
 (4) Moelle D and Gasch R, 1982, "Nonlinear Bogie Hunting," in *Proc. 7th IAVSD Symp. Cambridge, Swets & Zeitlinger, Lisse*, pp. 455~467.
 (5) Gasch R, Moelle D and Knothe K, 1984, "The Effect of Nonlinearities on the Limit Cycles of Railway Vehicles," in *Proc. 8th IAVSD Symposium on Vehicle Systems Dynamics in The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks*, Swets & Zeitlinger, Amsterdam/Lisse, pp. 207~224.
 (6) Hans True, 1993, "Dynamics of a Rolling wheelset," *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 46, ASME, pp. 438~444.
 (7) Carsten Knudsen, Rasmus Feldberg and Alfred Jaschinski, 1991, "Non-linear Dynamic Phenomena in the Behaviour of a Railway Wheelset Model," *J. Nonlinear Dynamics*, pp. 389~404.
 (8) Kalker. J. J., 1991, "Wheel-rail Rolling Contact Theory," *Wear* 144, pp. 243~261.
 (9) Mehdi Ahmadian and Shaopu Yang, 1998, "Effect of Suspension Nonlinearities on Rail Vehicle Bifurcation and Stability," *Rail Transportation, ASME*, pp. 97~106.
 (10) Pascal and Sauvage, 1991, "New Method for Reducing the Multi Contact Wheel/rail Problem to One Equivalent Contact Patch," *Proc. 12. IAVSD Symposium*.
 (11) Vijay K. Garg and Rao V. Dukkipati, 1984, "Dynamics of Railway Vehicle Systems," *Academic Press*, pp. 103~176.
 (12) Ali H. Nayfeh and Balakumar Balachandran, 1994, "Applied Nonlinear Dynamics," *John Wiley & Sons*.
 (13) Steven H. Strogatz, 1994, "Nonlinear Dynamics and Chaos," *Addison-Wesley*.
 (14) 김현영, 신우승, 1999, "매개 변수 가지를 받는 유연관절 로봇의 비선형 진동해석," 대한기계학회논문집, 제23권, 제2호, pp. 199~208.
 (15) 정우진, 김성원, 1999, "비선형 임계속도 검증을 위한 실험적 연구," 추계학술대회논문집, 한국철도학회, pp. 574~581.