

유한요소법과 경계요소법의 교호적용에 의한 와전류장 해석

論 文

49B-7-1

A Numerical Calculation of Eddy Current Field by Applying FEM and BEM Alternately

任 志 元*
(Jee-Won Im)

Abstract - The finite element method (FEM) is suitable for the analysis of a complicated region that includes nonlinear materials, whereas the boundary element method (BEM) is naturally effective for analyzing a very large region with linear characteristics. Therefore, considering the advantages in both methods, a novel algorithm for the alternate application of the FEM and BEM to magnetic field problems with the open boundary is presented. This approach avoids the disadvantages of the typical numerical methods with the open boundary problem such as a great number of unknown values for the FEM and non-symmetric matrix for the Hybrid FE-BE method. The solution of the overall problems is obtained by iterative calculations accompanied with the new acceleration method.

Key Words : Boundary Element Method, Finite Element Method, Hybrid FE-BE Method, Open boundary

1. 서 론

현재 전자계해석에 관한 수치해석수법으로서 유한요소법, 경계요소법 등 많은 해석수법이 제안·검토되고 있으나 이러한 수법들의 특징, 즉 적용가능한 문제의 종류·계산시간·해석精度 등에 따라 각각 특유의 장·단점을 가진다. 一例로서 와전류와 자성재료의 포화가 介在하는 현상에 관한 전자계해석에는 최종매트릭스 처리에 우수한 특성을 가진 유한요소법이 최적으로 생각된다. 그러나 넓은 해석영역이 필수적인 외부누설자계의 경우는 막대한 미지수의 요구 및 계산용량과 계산시간의 증가가 따르며, 또한 경계조건에 의한 근사오차의 수반으로 해석精度가 악화된다. 한편 무한영역해석에 효과적인 경계요소법은 복잡한 매질특성을 가진 문제에 적용이 곤란하다는 단점을 가진다.[1]

따라서 이러한 적용범위의 한계를 극복하기 위하여 서로 다른 종류의 수치해석수법을 병용하는 異種解法의 병용법이 개발되고 있다. 그러나 異種解法의 組合에는 많은 결합변수가 존재하며, 병용법의 상세한 연구 또한 아직 미흡한 실정에 있다. 異種解法의 병용법으로 해석영역에 따라 각각의 장점을 발휘하도록 유한요소법과 경계요소법을 병용시키는 유한요소·경계요소병용법이 있다. 그러나 광대한 영역의 해석에 필요한 미지수의 개수를 삭감할 수 있는 장점을 가지고 있지만, 최종매트릭스가 경계요소법의 적용에 의해 처리가 어렵게 되는 결점을 가진다.[2]

여기서 필자는 이전, 새로운 異種解法의 병용例로서 유한요소·경계요소병용법을 발전시킨 유한요소법과 경계요소법

의 交互適用法을 제안하였다.[3] 제안수법은 유한요소·경계요소병용법과 달리 유한요소법과 경계요소법을 동시에 계산하지 않고 양 수법을 別個로 두고 交互적으로 반복계산을 하는 시간적 병용법이다. 즉, 각각 독립적으로 계산하기 때문에 유한요소법이 가진 최종매트릭스 처리에 관한 우수한 특징을 유지할 수 있으며, 동시에 경계요소법의 적용으로 무한영역까지 해석할 수 있다. 또한 반복계산으로 인한 계산시간상의 결점을 가지고 있지만, 작은 유한요소법의 영역만으로 무한영역까지 높은 해석精度를 얻을 수 있게 된다.(유한요소·경계요소병용법의 특징) 이전 연구에서는 1차적으로 제안수법의 수속 확인 및 해의 정확성을 검증하기 위하여 기본적인 靜磁界問題를 해석대상으로 기존수법(유한요소법, 유한요소·경계요소병용법)과 비교·검토를 함으로서, 제안수법의 유효성을 확인하였다. 또한 계산시간의 단축수법으로 가속법을 제안·적용함으로서 유효한 결과를 얻었다.[3]

따라서 본 논문에서는 실질적 검증 모델인 복잡한 와전류장이 포함된 무한영역(動磁界問題)에 대하여 제안수법의 유효성 및 타당성을 검증한다. 또한 가속법 이외의 단축수법을 제안·검토한다. 본 논문의 일관된 입장은 계산시간보다 해석精度의 향상을 목적으로 한다.

2. 무한영역해석

2.1 유한요소법

전자기현상은, 그 영향이 본질적으로 무한대에 미친다. 이러한 영향을 수치적으로 해석하려면 많은 연구가 필요하며, 동시에 많은 단점들이 수반된다. 예를 들어 2차원문제에 있어서, 고찰물리량으로 자기벡터포텐셜 A 를 채용한다면 외부

* 正 會 員 : 京文大學 電氣科 專任講師·工博
接受日字 : 1999年 11月 6日
最終完了 : 2000年 5月 18日

영역으로의 자기벡터포텐셜 A 의 값은 중심으로부터 점점 감소해간다. 즉 중앙부의 자기벡터포텐셜을 A_0 라 한다면 그것은 무한대를 향해 그림 1의 굵은 선과 같이 감소해간다. 따라서 무한영역문제에 대한 유한요소법의 적용은 사실상 “不可” 라고 하는 숙명을 지니게 된다. 이러한 해석상의 한계에 대한 대표적인 타개책으로서 외부경계설정법이 있다.[4] 이 수법은 중핵영역(해석대상)으로부터 충분히 멀리 떨어진 위치에 원방경계를 설정하고 그곳에 적절한 경계조건을 설정하는 것이다. 일반적으로 중핵영역으로부터 약 5-6 배의 거리(r_F)에 경계를 두고 자기벡터포텐셜 $A=0$ 인 경계조건을 설정하여 해석하면 좋다고 말하여지고 있다.[3] 그러나 이것 또한 유한영역의 수법이므로 그림 1의 굵은 선과 같이 정해와 비교하여 약간의 근사오차가 수반되는 결점을 가진다. 결과적으로 유한요소법에 의한 무한영역의 해석에는 대단히 큰 해석영역을 필요로 하고 동시에 방대한 개수의 미지수 (방대한 계산용량)가 요구되며, 약간의 근사오차도 수반되는 것을 예측하게 된다.

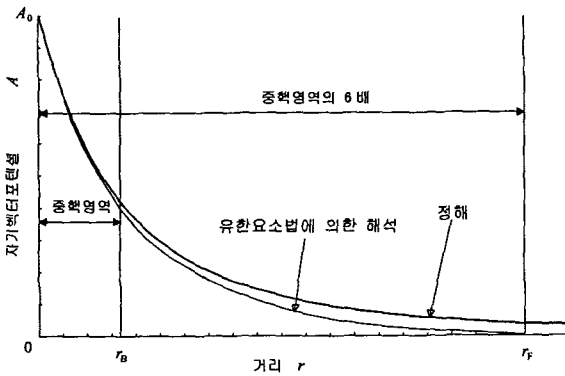


그림 1 유한경계조건에 의한 근사오차
Fig. 1 Approximate error by the finite boundary condition

2.2 유한요소·경계요소병용법

유한요소·경계요소병용법은 유한요소법에 의한 무한영역 해석의 단점을 보완하기 위하여 무한영역을 경계요소법에 맡기는 수법이다. 경계요소법은 유효성이 선형문제에 한정되는 것으로, 장의 지배방정식을 만족하는 기본해를 이용해서 미분방정식을 경계적분방정식으로 변환하기 때문에 고찰 영역의 경계만으로 해석이 가능하다. 따라서 영역분담은 자성체가 존재하고 다매질에 의해 성립된 비선형문제 및 와전류장이 포함된 영역을 유한요소법이 담당하고 공기영역과 같은 선형문제 및 무한영역을 경계요소법이 담당한다. 이와 같이 해석영역에 따라 각각의 장점을 발휘하는 유한요소·경계요소병용법을 이용함으로써 유한요소법의 해석영역을 대폭 줄일 수 있으며, 무한영역에 대해서도 경계요소법의 내점계산에 의해 높은 해석精도를 얻을 수 있다.

그러나 유한요소·경계요소병용법은 수치계산의 최종과정인 다원연립방정식의 매트릭스에 있어서 경계요소법이 가진 비대칭매트릭스가 개입하기 때문에 유한요소법과 같은 간결한 것으로는 되지 않는다. 그 결과, 미지수의 개수는 대폭 감소시킬 수 있어도 당연히 풀어야 할 대수방정식의 처리에

어려움을 갖게 된다. 따라서 상기의 점이 유한요소·경계요소병용법이 갖는 가장 큰 결점이 되고 있다. 그림 2 a),b)에 유한요소·경계요소병용법에 의하여 생성되는 최종매트릭스를 나타내었다. 그림을 보면 명백히 알 수 있듯이, 유한요소·경계요소병용법은 “유한요소법의 특징인 대칭성, 스파스성, 밴드성이 무너져버린다” 라는 것을 알게 된다

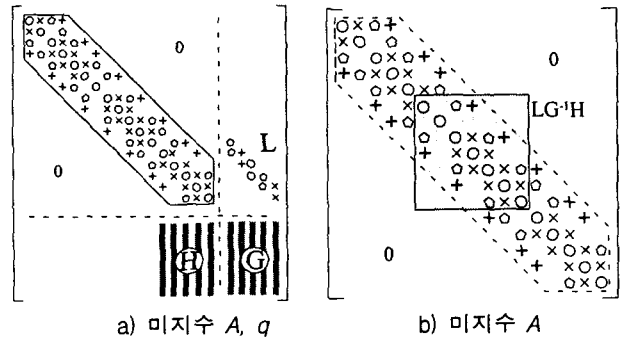


그림 2 유한요소·경계요소병용법의 최종매트릭스
Fig. 2 The final matrix of the hybrid FE-BE method

2. 교호적용법

본 논문에서는 와전류장이 포함된 무한영역(動磁界問題)에 대한 交互適用法의 타당성 및 유효성을 검증하기 위하여 일본 전기학회 3차원 와전류장해석 검증모델을 해석대상으로 채용하고, 그림 3과 같이 2차원 모델로 간략화 하여 해석을 행한다[5]. 해석대상은 여자코일과 도체판으로 구성된 철심이 없는 모델로서, 자성체를 포함하지 않기 때문에 해석이 용이하게 되며, 비교적 소형계산기로 해석이 가능하다. 본 모델의 여자전류는 1000[AT]이며, 주파수는 50 [Hz], 알루미늄의 도전율은 3.225×10^7 [S/m]로 하였다.

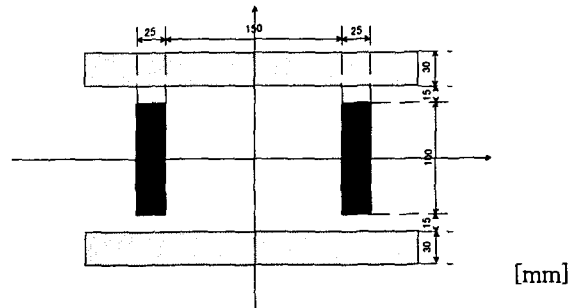


그림 3 해석모델
Fig. 3 Analysis model

3.1 交互適用法の 영역분담

제안된 수법은, 와전류장과 같이 복잡한 영역은 유한요소법에 맡기고 외측의 무한영역을 경계요소법에 적용하는思想은 유한요소·경계요소병용법과 동일하다. 그러나 가장 큰 차이점은 유한요소법과 경계요소법을 동시에 계산하지 않고 交互적으로 반복계산을 한다는 것이다. 또한 동일경계

를 갖는 유한요소·경계요소병용법에 비하여 交互適用法은 그림 4와 같이 유한요소법 영역의 경계 Γ_{FEM} 의 내측에 경계요소법 영역의 경계 Γ_{BEM} 를 주어 각각의 독립적인 두개의 경계가 존재하게 된다. 따라서 交互適用法은 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 과 경계요소법의 경계 Γ_{BEM} 이 다르게 되며 양 수법이 양립하는 영역, 즉 유한요소법과 경계요소법의 영역이 겹치는 영역이 존재한다. 이하, 이 영역을 공통영역 한다

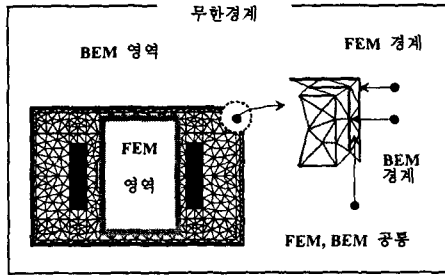


그림 4 交互適用法의 영역분담
Fig. 4 Region of the FEM and BEM alternate method

3.2 交互適用法의 계산과정

交互適用法의 반복계산의 과정을 그림 5에 따라 설명한다. 그림 5의 I, II, III은 반복계산의 순서이다. 반복계산의 제 I 단계로서 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 의 자기벡터포텐셜 A 의 값을 0으로 둔 경계조건하에서 유한요소법의 계산을 행하면 곡선 I과 같은 결과를 얻게 된다. 다음 제 II 단계에서는 제 I 단계에서 얻어진 경계요소법의 경계 Γ_{BEM} 상의 자기벡터포텐셜 A 의 값을 초기조건으로서 경계요소법을 적용하고 내점계산에 의하여 곡선 II를 얻는다. 곡선 II에서 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 상의 값이 제 III 단계에 있어서 유한요소법의 초기조건이 된다. 제 III 단계 이후는 제 I, II 단계를 같은 과정을 반복하게 된다. 따라서 上記의 I, II, III 단계를 반복하면 유한요소법과 경계요소법의 경계 Γ_{FEM} , Γ_{BEM} 의 값이 점차 정해져 수렴하게 된다.

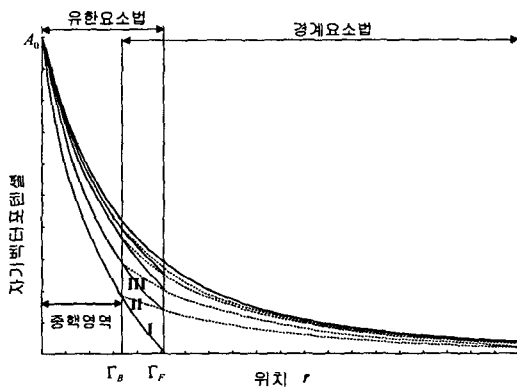


그림 5 交互適用法의 계산과정
Fig. 5 Calculating process of the FEM and BEM alternate method

3.3 유한요소법과 경계요소법의 경계 Γ_{FEM} , Γ_{BEM} 의 설정

일반적으로 해석영역이 작으면 작을수록 필요로 하는 계산용량은 적어지지만 상대적으로 해석精度가 악화되는 위험이 따르게 된다. 또한 제안된 수법은 경계요소법의 내점계산을 행하기 때문에 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 과 경계요소법의 경계 Γ_{BEM} 이 너무 근접해도 특이성이 발생하여 해석精度를 악화시키게 된다. 따라서 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 과 경계요소법의 경계 Γ_{BEM} 의 설정 방법을 검토해야만 한다.

경계의 설정 방법으로서 그림 6 a), b)와 같이 우선 경계요소법의 특이성의 영향을 조사하기 위하여 경계요소법의 경계 Γ_{BEM} 을 고정시키고 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 을 접근시켜 Γ_{FEM} 과 Γ_{BEM} 의 간격을 변화시킨다. 다음은 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 과 경계요소법의 경계 Γ_{BEM} 의 간격을 고정시킨 상태에서 중핵영역(해석대상)과 경계요소법의 경계 Γ_{BEM} 의 거리를 점점 접근시키며 거리변화에 따른 중앙부의 자속밀도의 변화를 검토한다. 본 논문에서는 이전 靜磁界問題에서 검증한 경계설정 결과를 그대로 적용한다. 상기의 경계설정 방법에 의한 결과, 중앙부의 자속밀도는 거의 변화가 없음을 알았다. 따라서 중앙부의 자속밀도의 변화가 거의 없는 상태에서 최대한 경계요소법의 경계 Γ_{BEM} 을 중핵영역에 가능한 가깝게(절점수를 가능한 한 적게 되도록) 설정하면 좋다는 것을 알 수 있다.[3]

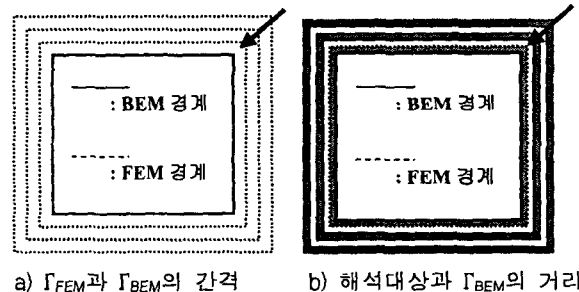


그림 6 交互適用法의 경계설정
Fig. 6 Determination of the boundaries

3.4 경계요소법의 내점매트릭스 간략화

보다 빠른 반복계산을 위하여 다음과 같이 경계요소법의 내점 매트릭스를 간략화 시켜 계산시간의 단축을 도모한다. 交互適用法에 있어서 유한요소법과 경계요소법의 매트릭스는 다음과 같다.[4]

$$[K]\{A\} = \{f\} \tag{1}$$

$$[H]\{A\} - [G]\{q\} = 0 \tag{2}$$

유한요소·경계요소병용법은 자기벡터포텐셜 A 외에 유속 q 도 관여하고 있지만, 交互適用法에서는 양 수법의 결합조건으로서 자기벡터포텐셜 A 만을 취하게 된다. 구체적으로 그림 7과 같이 반복계산의 최종과정은 경계요소법의 내점계산이므로 경계요소법의 연립방정식을 행렬계산으로 치환하여 경계요소법 전체의 계산을 간략화 시킨다.

내점계산의 식은 다음과 같다.

$$\{A_{pi}\} = [H_{in}]\{A\} + [G_{in}]\{q\} \tag{3}$$

$$\therefore \{q\} = [G]^{-1}[H]\{A\} \quad (4)$$

$$\{A_{pi}\} = ([H_{in}] + [G_{in}][G]^{-1}[H])\{A\} \quad (5)$$

여기서,

$$[B] = [H_{in}] + [G_{in}][G]^{-1}[H] \quad (6)$$

유속 q 의 계산을 생략시켜 최종적으로 식(7)에 의하여 내점의 자기벡터포텐셜 A_{pi} 을 구할 수 있다.

$$\therefore \{A_{pi}\} = [B]\{A\} \quad (7)$$

따라서, 경계요소법의 내점매트릭스 계산은 식(6)의 B 를 계산하는 것에 의해 간단한 벡터계산으로 치환하는 것이 가능하다.

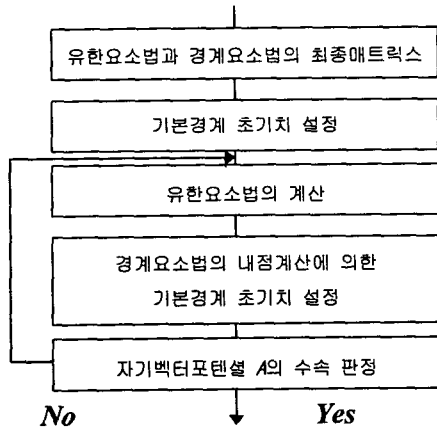


그림 7 경계요소법의 내점매트릭스 간략화
Fig. 7 Simplicity of the BEM matrix

3.5 비교 · 검토

그림 8 a), b)에 유한요소 · 경계요소병용법 및 交互適用法에 의한 자속분포를 나타내었다. 각각의 자속분포를 보면 와전류의 영향에 의한 양 수법의 자속분포의 형태가 거의 동일화하여 交互適用法에 의해 양호한 결과가 얻어짐을 알 수 있다.

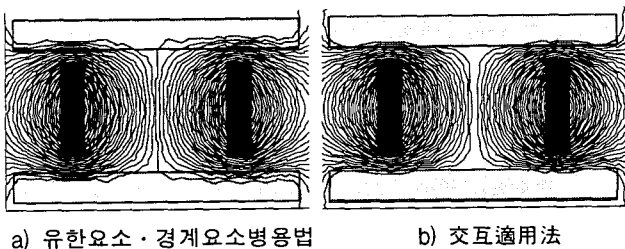


그림 8 자속분포
Fig. 8 Distribution of the magnetic flux

또한 자속밀도의 오차(오차계산은 유한요소 · 경계요소병용법의 해석결과를 기준)를 그림 9에 나타내었다. 그 결과, 유한요소법은 경계조건의 설정으로 인하여 무한영역으로 갈수록 점점 오차가 증가하였으며, 交互適用法에 의한 결과는 유한요소 · 경계요소병용법과 거의 일치함을 보였다. 따라서

와전류장이 포함된 무한영역에 대한 交互適用法の 유효성을 알 수 있었다.

표1에 각 수법에 대한 계산용량과 계산시간(ILUCGS법)의 비교를 나타내었다. 유한요소법을 이용해서 계산한 결과를 기준으로 百分率化하여 나타내고 있다. 표를 보면 交互適用法の 계산용량은 크게 감소하여 유효한 결과를 나타내지만 반복계산으로 인하여 계산시간이 증가함을 보인다.

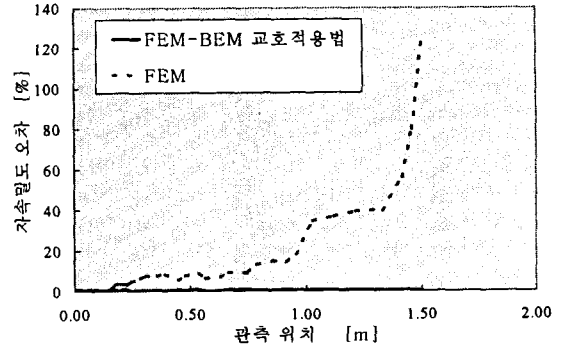


그림 9 자속밀도의 오차분포
Fig. 9 Error distributions of the magnetic flux density

표 1 계산용량 및 계산시간의 비교
Table 1 Used memories and CPU time

[%]	유한요소법 (중핵의 6배)	交互適用法
계산용량	100	27.66
계산시간	100	753.29

3.6 가속계수의 도입

비선형계산 등에 많이 이용되는 반복계산은 적당한 가속계수의 도입으로 계산시간을 단축할 수 있다. 따라서 交互適用法에 있어서도 가속계수와 유사한 수법의 도입을 생각한다. 본 논문에서는 다음과 같은 수법으로 반복계산의 단축을 시험해 보았다.

반복계산을 행하는 경계의 부분은 공기영역이며, 지배방정식은 변화가 온건한 라플라스장이기 때문에 반복계산에 있어서 목적량의 변화도 급변하지 않는다. 가속계수 도입전을 검토해 보면 그림 10의 점선과 같이 거의 지수함수적으로 변화함을 알 수 있다. 단지, 반복계산시의 최초 몇회는 지수함수적인 변화보다 급격한 직선변화를 하고 있다. 따라서 어떤 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 의 절점값(자기벡터포텐셜)에 착목하여 제4회 이후의 값이 지수함수적으로 변화한다고 가정한다면 경계요소법의 내점계산에 의해 얻어진 제5회, 6회의 절점값 및 최종값 A_5, A_6, A_N 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_{54} = (A_N - A_4)(1 - \epsilon^{-bx}) \quad (8)$$

$$A_{64} = (A_N - A_4)(1 - \epsilon^{-2bx}) \quad (9)$$

여기서,

$$a = A_{64}/A_{54} \quad (a > 1) \tag{10-1}$$

$$X = e^{-bx} < 1 \tag{10-2}$$

(8)식과 (9)식의 비를 취하여

$$a = (1 - X^2)/(1 - X) \tag{11}$$

따라서 구한 최종값 A_N 은 다음식으로 주어진다.

$$A_N = (A_5 - A_4)/(1 - X) + A_4 \tag{12}$$

상기의 계산과정을 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 의 각 절점에 대하여 행하는 것이 유효하다. 그림 10의 실선은 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 에 있는 한 점에 관한 절점값을 상기수법에 의해 계산한 과정을 나타낸 것이다. 즉, 제1회부터 제6회까지는 상기수법이 제외된 반복계산에 의해 유한요소법의 경계 Γ_{FEM} 의 값을 구하고 상기수법을 적용하여 제6회의 값을 최종값 A_N 으로 치환 후 다시 반복계산을 계속한 결과이다. 최초의 반복계산 과정과 후반의 반복계산 과정을 합쳐서 약 17회의 계산으로 수렴하고 있다. 그 결과, 가속법의 적용에 의해 계산시간이 단축됨을 알 수 있었다. 표 2에 계산시간 및 반복회수를 나타내었다.

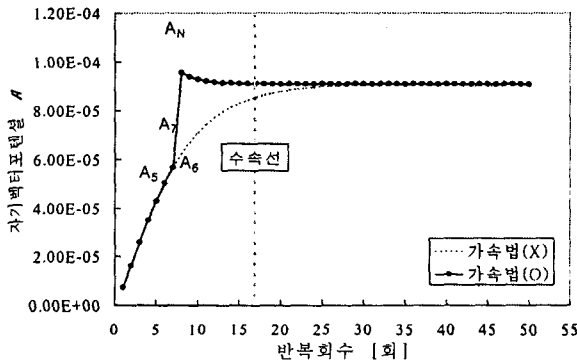


그림 10 가속법에 의한 자기벡터포텐셜의 변화

Fig. 10 Convergence of the magnetic vector potential by using the acceleration method

표 2 계산용량 및 반복회수의 비교

Table 2 Used memories and CPU time

[%]	유한요소법	交互適用法	
		가속법(X)	가속법(O)
계산시간	100	753.29	232.43
반복회수	-	48	17

3. 결 론

본 논문에서는, 이전 필자가 靜磁界問題에 대해 검증한 유한요소법과 경계요소법의 交互適用法을 와전류장이 포함된 무한영역(動磁界問題)에 적용하여 그의 유효성 및 타당성을 확인하였다.

중핵영역의 6배의 해석영역을 가진 유한요소법과 비교한 결과, 큰 폭의 계산용량을 삭감할 수 있었다. 또한 해석精度

의 면에서도 무한영역해석에 유효한 유한요소·경계요소법 응용법의 결과와 거의 일치함으로서 와전류장에 대한 交互適用法の 유효성을 확인하였다.

와전류장 해석에 있어서 보다 증가된 계산시간은 경계요소법의 내점매트릭스 간략화 및 이전 가속법의 적용으로 유효한 결과를 얻었다.

본 논문에서는 보다 작은 해석영역을 취해 높은 해석精度를 얻는 것을 목적으로서, 유한요소법의 전체 해석영역중의 중핵영역(해석대상)을 交互適用法の 해석영역으로 하고 또한 절점수도 유한요소법의 중핵영역과 同數로 하여 검토를 하였다. 즉 전체로서는 적은 절점수이기 때문에 交互適用法の 해석영역의 절점수를 한층 증가시키는 것에 의해 보다 높은 해석精度를 얻을 수 있다고 고려된다.

참 고 문 헌

- [1] 任達鎬, “電氣系の有限要素法”, 東明社, 4판, 1995.
- [2] T.Onuki, “Hybrid FE and BE method applied to electromagnetic problems”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 26, pp.582-587, 1990.
- [3] T. Onuki, J.W Im, “A numerical calculation of open boundary problem by applying FEM and BEM alternately” *Journal of Applied Physics*, Vol. 81, No.8, pp.4076-5078, 1997.
- [4] 加川幸雄, “開領域問題のための有限/境界要素法”, 사이エンス社, (昭和58年)
- [5] 日本電氣學會技術報告(2部)第384, 3次元渦電流場數値計算基礎技術

저 자 소 개



임 지원 (任志元)

1967년 3월 30일 생. 1991년 호서대 전기공학과 졸업. 1993년 한양대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1998년 와세다대학 전기공학과 졸업(공박). 1998년 3월~8월 와세다대학 이공학부 助手. 현재, 경문대학

전기와 전임강사

Tel : 0333-610-8035

E-mail : jwim@kmc.ac.kr