韓國經營科學會誌
第25卷 第3號
2000年 9月

용량이 변화하는 (0,1)-배낭문제에 대한 절단평면 생성방안*

이경식** · 박성수***

A Cut Generation Method for the (0,1)-Knapsack Problem with a Variable Capacity*

Kyungsik Lee** · Sungsoo Park***

■ Abstract ■

In this paper, we propose a practical cut generation method based on the Chvatal-Gomory procedure for the (0,1)-Knapsack problem with a variable capacity. For a given set N of n items each of which has a positive integral weight and a facility of positive integral capacity a feasible solution of the problem is defined as a subset S of N along with the number of facilities that can satisfy the sum of weights of all the items in S

We first derive a class of valid inequalities for the problem using Chvatal-Gomory procedure, then analyze the associated separation problem Based on the results, we develop an effective cut generation method We then analyze the theoretical strength of the inequalities which can be generated by the proposed cut generation method Preliminary computational results are also presented which show the effectiveness of the proposed cut generation method.

1. 서 론

본 연구에서는 아래와 같이 일반적인 정수값을 가질 수 있는 정수변수를 포함한 제약식으로 구성되는, 용량이 변화하는 (0,1)-배낭문제에 Chvatal-Gomory (C-G) 절차를 적용하여 효과적인 유효부

* 본 연구는 한국과학재단의 연구비지원(과제번호 981-1016-088-1)으로 수행되었음.
** 한국전자통신연구원 우정기술연구부
***: 한국과학기술원 산업공학과

동식(valid inequality)을 유도하는 방안을 연구하고, 이를 통해 새로운 절단평면 생성방안을 제안한다. C-G 절차는 '주어진 정수계획문제를 정의하는 각각의 제약식에 비음의 실수를 곱하고, 이들을 각 변끼리 더해서 얻어지는 부등식에서 정수변수의 계수를 내림하고(round down), 우변상수를 내림하여, 정수가능해들이 정의하는 해집합에 대한 유효부등식을 유도하는 절차'라고 간단히 소개할 수 있으며, 이에 대한 자세한 사항은 Nemhauser and Wolsey [15]을 참조하기 바란다.

$$\sum_{j\in N} a_j x_j - \lambda y \le 0 \tag{1}$$

$$x_j \le 1,\ \forall\ j\in N \tag{2}$$

$$x_j \in \{0,1\},\ \forall\ j\in N,\ y\in Z_+$$

단, $N \equiv \{1,\ldots,n\}$이고 $\lambda, a_j, \forall\ j\in N$은 양의 정수이다.

위 제약식들에서 알 수 있듯이, 변수 x는 이진변수이고 y는 임의의 정수값을 가질 수 있는 일반적인 정수변수이다. 위와 같은 형태의 제약식들은 위치선정-할당문제(Location-Allocation problem) [6], 통신망 설계 [4, 13, 14] 등에서 빈번히 나타난다.

최근에 Glover *et al.*[9]은 C-G 절차를 응용하여, (0,1)-배낭문제에 대한 새로운 절단평면 생성방안을 고안한 연구결과를 발표하였다. 이 방법은 C-G 절차를 통해 이론적으로 효과적인 절단평면을 유도할 수 있음을 보여 주었다. 이들의 결과에 의하면, (0,1)-배낭문제에 대해서 잘 알려진 cover 부등식[1, 2, 15]을 절단평면으로 사용하는 것 보다 좋은 계산결과를 얻을 수 있었다. 이들의 연구는 C-G 절차의 기계적인 절차적 특성을 특수한 문제에 잘 적용시킴으로써 기존의 다면체적 절단평면 유도의 틀을 벗어나, 새로운 형태의 절단평면 생성방안을 제시하였다는 데에 그 의의를 찾을 수 있을 것이다.

이제, 위의 식들을 만족하는 정수가능해들이 정의하는 볼록포체(covex hull)에 해당되는 다면체(polyhedron)를 다음과 같이 P라고 정의하자.

$$P = conv\{\, x\in B^n, y\in Z_+ :\ \sum_{j\in N} a_j x_j - \lambda y \le 0\}.$$

그러면, 부등식 (1)의 양변에 비음의 실수 u_0를, 각각의 $j\in N$에 해당되는 부등식 (2)의 양변에 비음의 실수 u_j를 곱하고 이 부등식들의 각 변을 더하여 얻어진 식의 좌변 계수를 내림한 후, 우변상수를 내림하는 C-G 절차를 적용하면, 다음의 부등식 (3)과 같은 P에 유효 부등식(valid inequality)을 얻게 된다.

$$\sum_{j\in N} \lfloor u_0 a_j + u_j \rfloor x_j + \lfloor -u_0\lambda \rfloor y \le \lfloor \sum_{j\in N} u_j \rfloor \tag{3}$$

단, $u_0, u_j, \forall\ j\in N$는 비음의 실수이고 $\lfloor \bullet \rfloor$는 소수점이하를 내림한 값이다.

부등식 (3)과 같은 형태의 부등식들의 집합에는 P에 대한 효과적인 유효부등식들이 포함되어 있다. 간단한 예를 들면 다음과 같다.

[예시 1] 다면체 $conv\{\, x\in B^4, y\in Z_+ : 13x_1 + 11x_2 + 11x_3 + 10x_4 - 32y \le 0\}$를 고려하자. 그러면, $u_0 = 3/32, u_1 = 25/32, u_2 = u_3 = 0$ 그리고 $u_4 = 2/32$로 하면, 아래와 같은, 부등식 (3)과 같은 형태의 유효부등식을 얻을 수 있으며, 이 부등식은 위의 다면체에 대한 facet을 정의하는 매우 효과적인 부등식이다.

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3y \le 0.$$

또한, $u_0 = 2/32, u = 6/32, u_2 = 10/32, u_3 = 10/32$ 그리고 $u_4 = 0$으로 하면, 위의 다면체에 대한 facet을 정의하는 또 다른 부등식, $x_1 + x_2 + x_3 - 2y \le 0$을 얻을 수 있다. ◆

본 논문에서는 제약식 (1)과 (2)를 만족하는 비정수해가 주어졌을 때, 이 비정수해에 의해서 위배되어지는 부등식 (3)을 생성할 수 있는 방법을 제시하고, 아울러 이러한 절단평면의 효과를 이론적

으로 분석한 결과와 실제적인 적용을 위해 일차적으로 성능을 실험한 결과를 제시하고 있다.

우선, 본 연구에서 제안하고 있는 C-G 절차를 이용한 절단평면 생성방안에 대해 자세히 설명하기 전에, 기존의 관련 연구결과를 이용하여 유도될 수 있는 P에 대한 유효부등식에 대해 간략히 소개하도록 하겠다.

먼저, Ceria *et al.*[5] 은 일반적인 정수배낭문제에 대한 minimal cover 부등식을 제안하였다. 이 부등식은 (0,1)-배낭문제에 대한 minimal cover 부등식을 정수배낭문제에 적용하기위해 자연스럽게 확장한 것이라고 볼 수 있다. (0,1)-배낭문제와 정수배낭문제의 정의 및 (0,1)-배낭문제의 minimal cover 부등식에 대한 자세한 사항은 Nemhauser and Wolsey[15] 를 참고하기 바란다.

그러면, Ceria *et al.*[5] 이 제안한 정수배낭문제에 대한 minimal cover 부등식을 이용하여 P에 대한 유효부등식을 유도하기 위해서, P와 관계된 정수배낭문제 다면체 $\overline{P}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\overline{P} = conv\{x \in B^n, y' \in Z_+ : \sum_{j \in N} a_j x_j + \lambda y' \le \lambda U, y' \le U\},$$

단, $y' = U - y$이고 $U = \lceil \sum_{j \in N} a_j / \lambda \rceil$ 이다.

위의 정의에서 보면, P와 $\overline{P}$의 사이에는 $(x, y') \in \overline{P}$이면 $(x, y) \in P$인 관계가 있다. Ceria *et al.*[5]은 동시에 상한값에 해당하는 값을 가지면 정수배낭문제의 제약식을 위배하는 변수들의 집합을 cover 로 정의하고, 또한 주어진 cover 의 임의의 진부분집합에 속하는 변수들이 동시에 상한값을 가져도 정수배낭문제의 제약식을 위배하지 않는다면, 이 주어진 cover 를 minimal cover 로 정의하였다. 이 정의로부터 $\overline{P}$에 대한 임의의 minimal cover 는 어떤 $j \in N$에 대한 하나의 변수 x_j와 y로 이루어진다는 것을 쉽게 알 수 있다 그러면, 이러한 minimal cover 로 부터 얻어지는 minimal cover 부등식은 다음과 같다.

$$(1 - x_j) + (U - y') \ge 1, \ \forall j \in N.$$

위 부등식이 의미하는 바는, minimal cover 를 구성하는 두 변수 모두가 상한값을 가지면 안된다는 것이다. 위와 같은 정수배낭문제에 대한 minimal cover 부등식의 유도와 관련한 자세한 사항은 Ceria *et al.*[5]을 참고하기 바란다. 그러면, 변환된 변수의 관계로부터, 위의 부등식은 아래의 부등식 (4)와 같은 P에 대한 유효부등식으로 변환할 수 있다.

$$x_j - y \le 0, \ \forall j \in N. \tag{4}$$

위와 같은 부등식은 P에 대한 유효부등식이기는 하지만, P의 정의로부터 자명하게 유도될 수 있는 부등식이며, 또한 C-G 절차를 통해 얻어질 수 있음을 쉽게 확인할 수 있다.

다음으로, Brockmuller *et al.*[4] 은 P에 y와 같이 일반적인 정수값을 가질 수 있는 하나의 정수변수가 더 추가된 모형에 대한 유효부등식을 제안하였다. 이 결과를 P에 적용하면, 부등식 (5)와 같은 P에 대한 유효부등식을 얻을 수 있다. 부등식 (5)의 유도에 대한 자세한 내용은 Brockmuller *et al.*[4] 을 참고하기 바란다.

$$\sum_{j \in J} \lceil a_j / \lambda \rceil x_j + \sum_{j \in N \setminus J} \lfloor a_j / \lambda \rfloor x_j - y \le \theta \tag{5}$$

단, $J \subseteq N$이고 $\theta = \sum_{j \in J} \lceil a_j / \lambda \rceil - \lceil \sum_{j \in J} a_j / \lambda \rceil$이다.

위의 부등식 (5)는 자명하게 유도될 수 있는 부등식은 아니지만, 부등식 (4)와 마찬가지로 C-G 절차를 통하여 얻어질 수 있는데, 이에 대해서는 3절에서 설명하도록 하겠다.

이후의 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저, 2절에서는 본 연구에서 제안하고 있는 절단평면 생성방안을 제시하고, 3절에서는 생성된 절단평면의 효과를 이론적으로 분석하였다. 4절에서는 본 연구에서 제안한 절단평면 생성방안을 통신망 설계와

관련된 실제적인 응용문제에 일차적으로 적용한 결과를 제시하고, 마지막으로 결론 및 추후연구과제를 5절에서 기술하였다.

2. C-G 절차를 이용한 절단평면 생성방안

다음의 부등식 (6)과 같은 P에 대한 유효부등식을 고려하자. 이 부등식은 서론에서 소개된 부등식 (3)과 본질적으로 동일한 부등식이며, 이후의 설명의 편의를 위해서 표현을 달리한 것에 불과하다.

$$\sum_{j\in J} \lfloor u_0 a_j + u_j \rfloor x_j + \sum_{j\in N\setminus J} \lfloor u_0 a_j \rfloor x_j + \lfloor -u_0 \lambda \rfloor y \le \left\lfloor \sum_{j\in J} u_j \right\rfloor \qquad (6)$$

단, $J=\{j\in N \mid u_j > 0\}$이고 $u_0 \ge 0$이다.

임의의 $J\subseteq N$에 대한 부등식 (6)은 부등식 (3)과 마찬가지로 C-G 절차를 이용하여 유도된다. 즉, 모든 $j\in J$에 대한 부등식 $x_j \le 1$ 에 양의 실수 u_j를, 그리고 모든 $j\in N\setminus J$에 대한 부등식 $x_j \le 1$에는 0을 곱하고, 제약식 $\sum_{j\in N} a_j x_j - \lambda y \le 0$에 비음의 실수 u_0를 곱한 다음, 이 식들의 각 변을 더하여 얻어진 식의 좌변 계수들을 내림한 후, 우변상수를 내림하면 부등식 (6)이 얻어진다.

본 절에서 제시하고자 하는 C-G 절차를 이용한 절단평면의 생성방안은. 앞서 제시된 부등식 (6)을 P를 정의하는 제약식들로 구성된 정수계획문제를 해결하기 위한 절단평면 알고리듬에 사용하기 위해, 선형계획완화문제의 비정수해에 의해 위배되는 부등식 (6)을 생성할 수 있는 체계적인 방법을 의미한다. 주어진 비정수해가 부등식 (6)을 만족하는지를 판단하고, 아니라면 위배되는 하나의 부등식을 찾는 문제를 separation 문제라고 한다. 즉, 본 절에서 제시하고자 하는 절단평면의 생성방안은 부등식 (6)에 대한 separation 문제를 해결하기 위한 방법을 의미한다. 따라서, 본 절에서는 먼저, 부등식 (6)에 대한 separation 문제를 구체적으로 정의하고, 이를 분석한 결과를 제시하고, 다음으로 separation 문제를 해결하기 위한 알고리듬을 제시하도록 하겠다.

2.1 Separation 문제의 정의 및 분석

먼저, 모든 $j\in N$에 대해 $\hat{x}_j \le 1$이고, $\sum_{j\in N} a_j \hat{x}_j - \lambda \hat{y} \le 0$을 만족하는 비정수해 $(\hat{x}, \hat{y})$이 주어졌다고 가정하고, $J^* = \{j\in N:\ \hat{x}_j > 0\}$으로 정의하자. 그러면, $(\hat{x}, \hat{y})$가 부등식 (6)을 만족하는지를 알아보고, 아니라면, $(\hat{x}, \hat{y})$에 의해 위배되는 부등식 (6)을 찾는 separation 문제는 다음과 같이 정식화될 수 있다.

$$\text{SEP}: \max \sum_{j\in J^*} \lfloor u_0 a_j + u_j \rfloor \hat{x}_j + \lfloor -u_0\lambda \rfloor \hat{y} - \left\lfloor \sum_{j\in J^*} u_j \right\rfloor$$
$$\text{s.t.}\quad u_0 \ge 0,\ u_j \ge 0,\ \forall j\in J^*$$

$\hat{u}_0$와 $\hat{u}_j$, $\forall j\in J^*$를 SEP의 최적해라고 가정하자. 만약, 이 최적해에 대응되는 SEP의 최적목적함수값이 0보다 작거나 같다면, $(\hat{x}, \hat{y})$에 의해 위배되는 부등식 (6)이 없다는 사실을 알 수 있다. 그렇지 않다면, $\hat{u}_0$와 $\hat{u}_j$, $\forall j\in J^*$를 사용하여 얻어진 부등식 (6)이 $(\hat{x}, \hat{y})$에 의해 위배되어지는 부등식임을 알 수 있다. 앞서 언급한 바와 같이 부등식 (6) 형태의 절단평면을 생성하는 방안을 강구한다는 것은 위의 SEP 을 해결하기위한 알고리듬을 고안한다는 것과 동일한 의미를 가진다. 따라서, 지금부터, SEP 을 이론적으로 분석하고, 그 결과를 토대로 고안된 SEP 을 위한 알고리듬에 대해 기술하도록 하겠다.

SEP의 분석을 용이하게 수행하기위해, 부등식 (6)에서 y의 계수가 어떤 주어진 구간내에서의 정수값으로 고정된 경우를 고려하자. 먼저, $\lfloor -u_0\lambda \rfloor = -p_0$라고 가정하자. 단, p_0는 양의 정수이다. 그러면, 이 경우의 separation 문제는 다음과 같이 나타

낼 수 있다.

$$\text{SEP}(p_0):\max\ \sum_{j\in J^*}\lfloor u_0 a_j + u_j\rfloor \hat{x}_j + \lfloor -u_0\lambda\rfloor\ \hat{y} - \left\lfloor \sum_{j\in J^*} u_j\right\rfloor$$
$$\text{s.t.}\quad u_j \geq 0,\ \forall j\in J^*$$
$$p_0 - 1 < u_0\lambda \leq p_0$$

여기서 $\hat{u}_0$와 $\hat{u}_j,\ \forall j\in J^*$를 SEP($p_0$)의 최적해라고 가정하자. 그러면, $u_0^* = p_0/\lambda$, $u_j^* = \hat{u}_j$, $\forall j\in J^*$, 또한 SEP(p_0)의 최적해임을 쉽게 알 수 있다. 따라서, SEP(p_0)의 최적해를 구하기 위해서는 u_0의 값을 p_0/λ로 고정해도 된다. u_0의 값을 p_0/λ로 고정하면, 각각의 $j\in J^*$에 대해서 $u_0 a_j = p_j + f_j$로 표현할 수 있다. 단, p_j는 비음의 정수이고, 어떤 비음의 정수 q_j에 대해서 $0 \leq (f_j = q_j/\lambda) < 1$이다. 따라서, SEP($p_0$) 는 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\text{SEP}(p_0):\max\ \sum_{j\in J^*} p_j\hat{x}_j - p_0\hat{y} + \sum_{j\in J^*}\lfloor f_j + u_j\rfloor\hat{x}_j - \left\lfloor\sum_{j\in J^*} u_j\right\rfloor$$
$$\text{s.t.}\quad u_j\geq 0,\ \forall j\in J^*$$

여기서 $\sum_{j\in J^*} p_j\hat{x}_j - p_0\hat{y}$은 상수항이므로 C로 정의하자. 그런데, SEP(p_0)에서, 모든 $j\in J^*$에 대해서, $\hat{x}_j\leq 1$이므로, $u_j\in\{0, 1-f_j\},\ \forall j\in J^*$인 SEP($p_0$)의 최적해가 존재한다는 사실을 쉽게 알 수 있다. 그러므로, 각각의 $j\in J^*$에 대해서, $u_j = 1-f_j \Leftrightarrow t_j = 1$이고 $u_j = 0\Leftrightarrow t_j = 0$인 관계를 만족하도록 이진변수 t_j를 도입하고 아래와 같은 SP(p_0)를 정식화하여 이를 해결하면, SEP(p_0)의 최적해를 구할 수 있다.

$$\text{SP}(p_0):\max\ \sum_{j\in J^*}\hat{x}_j t_j - \left\lfloor\sum_{j\in J^*}(1-f_j)\,t_j\right\rfloor + C$$
$$\text{s.t.}\quad t_j\in\{0,1\},\ \forall j\in J^*$$

따라서, 만약 $l\leq p_0\leq u$인 부등식 (6)중에서 $(\hat{x}, \hat{y})$에 의해 위배되는 부등식이 있는지, 있다면 이를 찾으려고 할 때에는 각각의 고정된 p_0에 대해서 SP(p_0)를 순차적으로 해결하는 방법을 생각할 수 있으며, 본 연구에서도 이 방법을 제안하고 있다. 단, l과 u는 양의 정수이다. 물론 p_0가 주어진 범위밖의 값을 가지는 부등식 (6)중에서 $(\hat{x}, \hat{y})$에 의해 위배되는 부등식이 있을 수 있기 때문에 p_0의 값의 범위를 미리 정한다는 것은 $(\hat{x}, \hat{y})$에 의해 위배되는 부등식을 찾을 수 있는 가능성을 제한할 수 있다. 따라서, p_0의 범위를 정할 때에는 위배되는 부등식을 찾을 수 있는 능력과 계산량의 절충을 고려해야 한다. 이 문제에 대해서는 이후에 자세히 거론하도록 하겠다. 우선, 주어진 p_0에 대해서 SP(p_0)를 효율적으로 해결할 수 있는지를 알아보는 것이 무엇보다도 중요하다. 그러나, SP(p_0)를 분석한 결과, 다음과 같은 부정적인 결과를 얻을 수 있었다.

[정리 1] 주어진 양의 정수 p_0에 대한 SP(p_0)는 NP-hard 이다.

(증명) SP(p_0)에 대응되는 decision problem인 DSP(p_0)가 NP-complete임을 증명하자. DSP(p_0)는 다음과 같이 정의된다.

Instance: 유한집합 J, 비음의 실수 L, 양의 정수 λ, $0 < \hat{x}_j \leq 1$인 실수 $\hat{x}_j,\ \forall j\in J$, 그리고 비음의 실수 $f_j,\ \forall j\in J$가 주어진다. 단, $(1-f_j) = \mu_j/\lambda$이고, μ_j는 λ보다 작거나 같은 비음의 정수이다.

Question: 다음의 식을 만족하는 J의 부분집합 J'가 존재하는가?

$$\sum_{j\in J'}\hat{x}_j - \left\lfloor\sum_{j\in J'}(1-f_j)\right\rfloor \geq L. \qquad (7)$$

DSP(p_0)는 자명하게 NP에 속한다. 다음으로, 이

미 잘 알려진 NP-complete 문제인 PARTITION[7]을 DSP(p_0)로 변환하도록 하겠다. PARTITION은 다음과 같이 정의 된다.

Instance : 유한집합 A, $\sum_{a \in A} s(a) = 2B$를 만족하는 양의 정수 $s(a)$, $\forall a \in A$, 단, B는 양의 정수이다.

Question : 다음의 식을 만족하는 A의 부분집합 A'가 존재하는가?

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a) = B \quad (8)$$

그러면, 주어진 임의의 PARTITION의 instance를 다음과 같이 다항단계안에 DSP(p_0)의 instance로 변환할 수 있다. : $J \equiv A$, $L = 1$, $\lambda = 2B + 1$, 어떤 하나의 $u \in J$에 대해서, $\hat{x}_u = s(u)/2B$. 모든 $j \in J \setminus \{u\}$에 대해서 $\hat{x}_j = s(j)/B$, 그리고 $\mu_j = 2s(j)$, $\forall j \in J$.

이제, (8)을 만족하는 A의 부분집합 A'가 존재한다고 가정하자. 먼저, 일반성을 잃지않고 $u \notin A'$라고 가정할 수 있다. 그러면, A'에 해당되는 J의 부분집합 J'에 대해서 다음의 두 식이 성립한다.

$$\sum_{j \in J'} \hat{x}_j = \sum_{j \in J'} s(j)/B = 1, \ \lfloor \sum_{j \in J'} (1 - f_j) \rfloor = \lfloor \sum_{j \in J'} 2s(j)/(2B+1) \rfloor = 0.$$

그러므로, $J' \equiv A'$로 J'를 정의하면 (7)을 만족한다. 그 반대로, (7)을 만족 하는 J의 부분집합 J'가 존재한다고 가정하자. 먼저, 위에서 구성된 DSP(p_0)의 instance 로 부터,

$$\sum_{j \in J} \hat{x}_j = \sum_{j \in J \setminus \{u\}} s(j)/B + s(u)/2B < 2,$$
$$\lfloor \sum_{j \in J} (1 - f_j) \rfloor = \lfloor \sum_{j \in J} 2s(j)/(2B+1) \rfloor = 1 \text{이고}$$

모든 J의 부분집합 $\bar{J}$에 대해서 $\sum_{j \in \bar{J}} \hat{x}_j > 1$ 이면 $\lfloor \sum_{j \in \bar{J}} (1 - f_j) \rfloor = 1$임을 알 수 있다. 즉, $\sum_{j \in J'} \hat{x}_j = 1$, $\lfloor \sum_{j \in J'} (1 - f_j) \rfloor = 0$이 성립하고 $u \notin J'$임을 쉽게 알 수 있다. 따라서, $A' \equiv J'$로 A'를 정의하면 (8)을 만족한다. 그러므로, DSP(p_0)는 NP-complete이다. ♦

부등식 (6)에 대한 separation 문제의 분석 결과를 간략하게 정리하면 다음과 같다. 즉, p_0의 값이, 예를 들어 $l \le p_0 \le u$와 같이, 주어진 특정 구간내에 속하는 부등식 (6)에 대한 separation 문제는, 주어진 구간내에서 각각의 고정된 p_0 값에 대해서 SP(p_0)를 순차적으로 해결하는 방법으로 해결할 수 있다. 그런데, 임의의 정수값으로 고정된 p_0 값에 대해서 SP(p_0)는 NP-hard 이다.

여기서 한 가지 의문이 생길 수 있다. 즉, SP(p_0)의 최적해를 구할 수 있는 다항시간 알고리듬이 존재한다고 하더라도, 과연 p_0의 값이 어떤 특정 구간내에 한정된 경우의 부등식 (6)에 대한 separation 문제와 원래의 separation 문제, 즉 SEP이 동등한가 하는 것이다. 결론을 말하자면, $1 \le p_0 \le \lambda$-1로 p_0의 구간을 정하면, 이 경우의 부등식 (6)에 대한 separation 문제와 SEP 은 동등하다. 이것이 성립함을 알아보기 위해서는 다음과 같은 간단한 논의가 필요하다.

먼저, $p_0 \ge \lambda$인 하나의 부등식 (6)이 주어졌다고 가정하고, 이 부등식을 얻기 위해 사용된 비음의 실수들을 $u_0, u_j, \forall j \in J$이라 하자. $p_0 \ge \lambda$이므로, $u_0 \ge 1$임을 알 수 있고, $u_0 = u_0^1 + u_0^2$로 표현 할 수 있다. 단, u_0^1은 1보다 크거나 같은 정수이고, u_0^2는 $0 \le u_0^2 < 1$인 실수이다. 그러면, 주어진 부등식은 부등식 (1)의 양변에 u_0^1을 곱하여 얻어진 부등식과 u_j, $\forall j \in J$ 값들을 그대로 사용하고 u_0 값 대신에 u_0^2를 사용하여 얻어지는 부등식 (6)의 합으로 나타내어 진다는 사실을 쉽게 확인할 수 있다. 즉, $p_0 \ge \lambda$인 하나의 부등식 (6)이 주어진 비정수해에 의해 위배되어 진다면, 반드시 이 비정수해에 의해서 위배되어지는 $p_0 < \lambda$인 부등식 (6)이 존재한다는 것을 알 수 있다.

그러면, SP(p_0)의 최적해를 구할 수 있는 알고리듬이 있다면, 부등식 (6)에 대한 separation 문제를 해결할 수 있는 하나의 방안이 완성될 수 있다. 물론, 앞서 증명된 바와 같이 SP(p_0)가 NP-hard 이어서 다항시간 알고리듬이 존재할 지는 의문이지만, SP(p_0)의 최적해를 구할 수 있는 의사다항시간(pseudo-polynomial time) 알고리듬이 존재한다는 것을 증명할 수 있었다. 이 알고리듬은 기본적으로 동적계획법(Dynamic programming) [15]에 기초하고 있다. 그러면, 다음에서 SP(p_0)의 최적해를 구할 수 있는 알고리듬을 제시하겠다.

2.2. Separation 문제의 해법

설명의 편의를 위해서, $J^* = \{1, \ldots, n\}$ 이라고 정의하고, 실수함수 $F: (j, b) \rightarrow R$ 을 정의하자. 단, j와 b는 양의 정수들이고 $0 \le j \le n$, $0 \le b < n\lambda$이다. 앞에서, 모든 $j \in J^*$에 대해, $f_j = q_j/\lambda$로 표현할 수 있었음을 상기하자. 단, q_j는 λ보다 작은 비음의 정수이다. 이제, 모든 $j \in J^*$에 대해서 $\mu_j = \lambda - q_j$라고 정의하자. 즉, 모든 $j \in J^*$에 대해서 $(1-f_j) = \mu_j/\lambda$다. 그러면, $0 \le j \le n$이고 $0 \le b < n\lambda$를 만족하는 모든 (j, b)에 대해서 $F(j, b)$를 다음과 같이 정의하자.

$$F(j, b) = \max \sum_{k=1}^{j} \hat{x}_k t_k - \lfloor b/\lambda \rfloor$$
$$\text{s.t.} \sum_{k=1}^{j} \mu_k t_k = b$$
$$t_k \in \{0, 1\}, k = 1, \ldots, j$$

만약, 위에서 feasible solution이 없다면, $F(j, b) = -\infty$로 정의한다. 다음으로, SP(p_0)의 최적목적함수값을 Z_{SP}라고 한다면, 다음의 관계가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$Z_{SP} = \max \ \{F(n, b): 0 \le b < n\lambda\}$$

그러므로, SP(p_0)의 최적해를 구하기 위해서는, $F(n, b)$, $0 \le b < n\lambda$ 값들을 계산하면 된다. 이 값들을 계산하기 위해서는 다음의 재귀식(recursive equation)을 이용하면 된다.

$$F(0,0) = 0, F(0, b) = -\infty, 0 < b < n\lambda,$$
$$F(j, b) = \max\{F(j-1, b), F'(j, b)\}, \ 0 \le b < j\lambda,$$
$$F(j, b) = -\infty, j\lambda \le b \le n\lambda,$$
$$\text{단, } F'(j, b) = F(j-1, b-\mu_j) + \hat{x}_j + \lfloor (b-\mu_j)/\lambda \rfloor - \lfloor b/\lambda \rfloor \text{ 이다.}$$

위의 재귀식을 이용하여 $F(n, b), 0 \le b < n\lambda$ 값들을 정확히 구할 수 있음은 쉽게 보일 수 있다. 그러면, $F(n, b), 0 \le b < n\lambda$ 값들을 구하는 데에 걸리는 계산횟수는 $O(n^2\lambda)$이다.

앞서 밝힌 바와 같이, 본 연구에서는 부등식 (6)을 생성하는 방안으로 주어진 p_0 값의 범위내에서 p_0의 값을 범위내의 양의 정수값으로 순차적으로 고정시켜 가면서 SP(p_0)의 최적해를 구하여, 주어진 비정수해에 의해 위배되어지는 부등식을 찾는 방안을 제시하였다. 그러므로, p_0의 범위가 $l \le p_0$ $0 \le u$로 주어졌다면, 본 연구에서 제안된 절단평면 생성방안, 즉, 주어진 비정수해에 의해 위배되어지는 부등식 (6)을 생성하기 위한 separation 알고리듬의 전체적인 복잡도는 $O(n^2\lambda r)$이 된다. 단, l과 u는 양의 정수들이고 $r = u - l + 1$이다.

3. 절단평면의 이론적 분석

본 절에서는 앞서 제시된 절단평면 생성방안에 의해 얻어지는 부등식의 효과를 이론적으로 분석하고자 한다. 먼저, 다면체 P의 차원이 $n+1$임을 쉽게 알 수 있다. 그러면 주어진 p_0에 대한 SP(p_0)의 최적해를 구하여 얻어지는 부등식 (6)을 다음과 같이 나타내어 보자.

$$\sum_{j \in J} \varnothing(p_0 a_j/\lambda) x_j + \sum_{j \in N \setminus J} \lfloor p_0 a_j/\lambda \rfloor x_j - p_0 y \le \left\lfloor \sum_{j \in J} (1-f_j) \right\rfloor, \quad (9)$$

단, $J \subseteq N, \varnothing(a) = \lfloor a \rfloor + 1, a \in R_+$, 그리고 모든 $j \in J$에 대해 $f_j = p_0 a_j/\lambda - \lfloor p_0 a_j/\lambda \rfloor$ 이다.

주어진 부등식 (9)에 대해서, Ω를 P에 속하는 정수해들 중에서 이 부등식을 등식으로 만족하는 해들의 집합이라고 정의하자. 그러면, Nemhauser and Wosey[15] (p.108)의 Proposition 6.6에 의하면, 이 부등식이 P의 facet 을 정의할 필요충분조건은 Ω에 $n+1$개의 affinely independent 한 해들이 존재하는 것이다. 그러면, 이에 대한 자세한 분석을 위해서 다음의 보조정리를 보자.

[보조정리 1] 모든 $J \subseteq N$과 모든 양의 정수 p_0에 대해서 다음이 성립한다.

$$\sum_{j\in J} \varnothing(p_0 a_j/\lambda) - \left\lfloor \sum_{j\in J}(1-f_j) \right\rfloor = \left\lceil \sum_{j\in J} p_0 a_j/\lambda \right\rceil$$

(증명)

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in J} \varnothing(p_0 a_j/\lambda) - \left\lfloor \sum_{j\in J}(1-f_j) \right\rfloor \\
&= \sum_{j\in J} \lfloor p_0 a_j/\lambda \rfloor + |J| - \left\lfloor |J| - \sum_{j\in J} f_j \right\rfloor \\
&= \sum_{j\in J} \lfloor p_0 a_j/\lambda \rfloor - \left\lfloor - \sum_{j\in J} f_j \right\rfloor \\
&= \sum_{j\in J} \lfloor p_0 a_j/\lambda \rfloor + \left\lceil \sum_{j\in J} f_j \right\rceil \\
&= \left\lceil \sum_{j\in J} \{ \lfloor p_0 a_j/\lambda \rfloor + f_j \} \right\rceil = \\
&= \left\lceil \sum_{j\in J} p_0 a_j/\lambda \right\rceil. \ \blacklozenge
\end{aligned}$$

이제, 모든 $S \subseteq N$에 대해서 $\rho(S) = (\sum_{j\in S} a_j) \bmod (\lambda)$로 정의하고, 만약, $\sum_{j\in S} a_j$가 λ의 배수라면, $\rho(S) = \lambda$로 정의하자. 이렇게 정의하면, 모든 경우에 있어 다음이 성립한다.

$$\sum_{j\in S} a_j/\lambda = \left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil - 1 + \rho(S)/\lambda.$$

[정리 2] P에 속하는 임의의 정수해 $(\hat{x}, \hat{y})$, 그리고 양의 정수 p_0와 이에 대한 부등식 (9)가 주어졌을 때, $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega$이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

i) $\hat{y} = \left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil$, *ii)* $\left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S/J| = \sum_{j\in J}(1-f_j)$, 그리고

iii) $\rho(S) > \lambda(p_0 - 1)/p_0$, 단, $S = \{ j \in J : \hat{x}_j = 1\}$이다.

(증명) 필요조건 부분을 증명하기 위해서, 주어진 $(\hat{x}, \hat{y})$가 앞의 세 가지 조건들 중에서 적어도 하나 이상의 조건을 만족하지 않는다고 가정하자. 그리고, 임의의 $S \subseteq N$에 대해서 아래의 관계가 성립함을 먼저 밝혀둔다.

$$\left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S \setminus J| = \left\lfloor \sum_{j\in S\cap J}(1-f_j) - \sum_{j\in S\setminus J} f_j \right\rfloor \le \left\lfloor \sum_{j\in J}(1-f_j) \right\rfloor \qquad (*)$$

첫째, $\hat{y} > \left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil$ 이라면, 어떤 양의 정수 γ에 대해, $\hat{y} = \left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil + \gamma$이다. 주어진 해 $(\hat{x}, \hat{y})$가 부등식 (9)를 등식으로 만족하므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \sum_{j\in J}(1-f_j) \right\rfloor &= \sum_{j\in S\cap J} \varnothing(p_0 a_j/\lambda) + \sum_{j\in S\setminus J} \lfloor p_0 a_j/\lambda \rfloor - p_0 \hat{y} \\
&= \sum_{j\in S} \varnothing(p_0 a_j/\lambda) - |S\setminus J| - p_0 \left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil - p_0\gamma \ (\varnothing\text{의 정의에 의해}) \\
&\le \sum_{j\in S} \varnothing(p_0 a_j/\lambda) - |S\setminus J| - \left\lceil \sum_{j\in S} p_0 a_j/\lambda \right\rceil - p_0\gamma \\
&= \left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J| - p_0\gamma \\
&\quad (\text{[보조정리 1] 에 의해})
\end{aligned}$$

위에서 부등식 관계는 $p_0 \left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil \ge \left\lceil \sum_{j\in S} p_0 a_j/\lambda \right\rceil$라는 사실로부터 성립한다. 그러므로, $\left\lfloor \sum_{j\in J}(1-f_j) \right\rfloor \le \left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J| - p_0\gamma$가 성립함을 알 수 있다. 그런데 이 관계는, 식 (*)로부터, $-p_0\gamma \ge 0$ 이라는 것을 의미하는데, 이것은 모순이다.

둘째, $(\hat{x}, \hat{y})$가 조건 *i)*은 만족하지만, 조건 *ii)*를 위배한다고 가정하자. 그러면, 식 (*)에 의해서, $\left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J| + \gamma = \left\lfloor \sum_{j\in J}(1-f_j) \right\rfloor$ 가 성립한다. 단, γ는 양의 정수이다. 또한, $(\hat{x}, \hat{y})$가 부등식 (9)를 등식으로 만족하므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J| + \gamma = \left\lfloor \sum_{j\in J}(1-f_j) \right\rfloor$$
$$= \sum_{j\in S}\varnothing(p_0 a_j/\lambda) - |S\setminus J| - p_0\left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil$$
$$\le \sum_{j\in S}\varnothing(p_0 a_j/\lambda) - |S\setminus J| - \left\lceil \sum_{j\in S} p_0 a_j/\lambda \right\rceil$$
$$= \left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J|$$

그러므로, 다음의 관계식이 얻어진다.

$$\left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J| + \gamma \le \left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J|$$

그러나, 위의 식은 $\gamma \le 0$을 의미하므로, 모순이 발생한다.

마지막으로, $(\hat{x}, \hat{y})$가 조건 i)과 ii)는 만족하지만, 조건 iii)을 위배한다고 가정하자. 즉, $\rho(S) \le \lambda(p_0-1)/p_0$이다. 이에 따라, $p_0\left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil > \left\lceil \sum_{j\in S} p_0 a_j/\lambda \right\rceil$가 성립하게 되므로, 앞서 제시된 조건 i)과 ii)에 대한 증명에서와 마찬가지의 방법으로 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J| > \left\lfloor \sum_{j\in J}(1-f_j) \right\rfloor$$

그러나 위의 식은 식 (*)에 의해서 모순이 발생한다는 것을 알 수 있다.

다음으로, 충분조건부분을 증명하기 위해서, 주어진 세 가지 조건을 만족하는 해 $(\hat{x}, \hat{y})$가 부등식 (9)를 등식으로 만족한다는 사실을 증명하도록 하겠다.

$$\sum_{j\in S\cap J}\varnothing(p_0 a_j/\lambda) + \sum_{j\in S\setminus J}\lfloor p_0 a_j/\lambda \rfloor - p_0\left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil \quad \text{(조건 } i\text{)에 의해)}$$
$$= \sum_{j\in S}\varnothing(p_0 a_j/\lambda) - |S\setminus J| - p_0\left\lceil \sum_{j\in S} a_j/\lambda \right\rceil \quad (\varnothing\text{의 정의에 의해})$$
$$= \sum_{j\in S}\varnothing(p_0 a_j/\lambda) - |S\setminus J| - \left\lceil \sum_{j\in S} p_0 a_j/\lambda \right\rceil \quad \text{(조건 } iii\text{)에 의해)}$$
$$= \left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor - |S\setminus J| \quad \text{([보조정리 1]에 의해)}$$
$$= \left\lfloor \sum_{j\in S}(1-f_j) \right\rfloor \quad \text{(조건 } ii\text{)에 의해)}$$

따라서, 정리가 성립함을 알 수 있다. ◆

따라서, 주어진 부등식 (9)가 P의 facet 을 정의하기 위해서는 [정리 2]의 조건을 만족하는 $n+1$개의 affinely independent 한 해들이 존재하면 된다. 물론, 이 사실 자체로는 주어진 부등식 (9)가 P의 facet 을 정의하는 지를 쉽게 판단할 수 있는 조건들을 제시하고 있지는 못하다. 그러나, [정리 2]는 주어진 p_0에 대한 부등식 (9)의 이론적인 효과에 대한 유용한 정보를 준다. 즉, 조건 iii)으로부터, $p_0 > \lambda$인 어떠한 부등식 (9)도 P의 facet을 정의하지 못한다는 사실을 보여주고 있다. 또한 만약 $p_0 = \lambda$라면, 부등식 (9)는 제약식 $\sum_{j\in J} a_j x_j - \lambda y \le 0$과 동등하다는 것을 알 수 있다. 그러므로, 이론적으로 효과적이라고 할 수 있는 p_0의 유효범위는 $[1, \lambda-1]$임을 알 수 있다. 이 사실은 2절에서 제시한 p_0의 유효범위와 일치한다. 그러나, 이와 같이 p_0의 범위를 지정한다면, 2절에서 제시한 절단평면 생성방안은 λ의 값이 커질수록 많은 계산량을 필요로 한다는 사실을 알 수 있다. 따라서, 앞절에서 제시된 부등식 (9)의 생성방안을 이용하기 위해, p_0의 범위를 지정할 때에는, 계산량과 생성되는 부등식의 이론적인 효과사이의 절충(trade-off)을 고려해야 한다. 그러기 위해서, 조건 iii)에서 주는 정보를 이용할 수 있다. 조건 iii)은 p_0의 값이 커지면 커질수록 점점 더 제한적인 조건이 된다는 사실을 알 수 있다. 즉, p_0 값이 작을 때가 상대적으로 큰 값일 때보다, 부등식 (9)가 P의 facet 을 정의할 가능성이 더 크다고 할 수 있다. 만약, $p_0 = 1$이라면, 조건 iii)은 더 이상 제약사항이 아니며, 이 때는 부등식 (9)가 P의 facet을 정의할 조건으로 매우 약화된 조건을 도출할 수 있다.

[정리 3] $p_0 = 1$일 때, 주어진 $J \subseteq N$에 대한 부등식 (9)가 P의 facet을 정의할 필요충분조건을 다음과 같다.

$$i)\ \left\lfloor \sum_{j \in J \setminus \{u\}} (1-f_j) \right\rfloor = \left\lfloor \sum_{j \in J} (1-f_j) \right\rfloor,\ \forall\, u \in J$$

$$ii)\ \left\lfloor \sum_{j \in J \cup \{v\}} (1-f_j) \right\rfloor > \left\lfloor \sum_{j \in J} (1-f_j) \right\rfloor,\ \forall\, v \in N \setminus J$$

(증명) 먼저, 충분조건부분을 증명하기 위해서, $\chi^S \in B^n$을 $S \subseteq N$의 특성벡터라고 정의하자. 즉, $\chi_j^S = 1 \Leftrightarrow j \in S$이다. 그러면 다음의 $n+1$개의 해들을 보자.

$$x = \chi^{J \setminus \{u\}},\ \ y = \left\lceil \sum_{j \in J \setminus \{u\}} a_j / \lambda \right\rceil,\ \forall\, u \in J$$

$$x = \chi^{J \cup \{v\}},\ \ y = \left\lceil \sum_{j \in J \cup \{v\}} a_j / \lambda \right\rceil,\ \forall\, v \in N \setminus J$$

$$x = \chi^J,\ \ y = \left\lceil \sum_{j \in J} a_j / \lambda \right\rceil$$

그러면, 위의 $n+1$개의 해들은 P에 속하며 affinely independent하다. 그리고, 이들 $n+1$개의 해들이 [정리 2] 의 조건 *i)*과 *ii)*를 만족한다는 것을 쉽게 보일 수 있으므로, 이 해들은 주어진 부등식 (9)를 등식으로 만족한다

다음으로, 필요조건부분을 증명하기 위해서, 먼저 조건 *i)*이 성립하지 않는다고 가정하자. 즉, 어떤 $u \in J$에 대해, $\left\lfloor \sum_{j \in J \setminus \{u\}} (1-f_j) \right\rfloor < \left\lfloor \sum_{j \in J} (1-f_j) \right\rfloor$이다. 그러면, u를 포함하지 않는 임의의 $S \subseteq N$에 대해서 다음의 관계를 유도할 수 있다.

$$\left\lfloor \sum_{j \in S} (1-f_j) \right\rfloor - |S \setminus J| = \left\lfloor \sum_{j \in S \cap J} (1-f_j) - \sum_{j \in S \setminus J} f_j \right\rfloor$$
$$\leq \left\lfloor \sum_{j \in S \cap J} (1-f_j) \right\rfloor \leq \left\lfloor \sum_{j \in J \setminus \{u\}} (1-f_j) \right\rfloor < \left\lfloor \sum_{j \in J} (1-f_j) \right\rfloor$$

따라서, P에 속하고 [정리 2] 의 조건 *i)*과 *ii)*를 만족하는 임의의 해 (x, y)에 대해서 $x_u = 1$임을 알 수 있다. 그러므로, 부등식 (9)를 등식으로 만족하는 $n+1$개의 affinely independent 한 해들이 존재하지 않는다. 따라서 모순이 발생한다.

이제, 조건 *ii)*가 성립되지 않는다고 가정하자. 즉, 어떤 $v \in N \setminus J$에 대해서 다음의 관계가 성립된다.

$$\left\lfloor \sum_{j \in J \cup \{v\}} (1-f_j) \right\rfloor = \left\lfloor \sum_{j \in J} (1-f_j) \right\rfloor$$

그러면, v를 포함하는 임의의 $S \subseteq N$에 대해서 다음의 관계를 유도할 수 있다.

$$\left\lfloor \sum_{j \in S} (1-f_j) \right\rfloor - |S \setminus J| = \left\lfloor \sum_{j \in (S \cap J) \cup \{v\}} (1-f_j) - \sum_{j \in S \setminus (J \cup \{v\})} f_j \right\rfloor - 1$$
$$< \left\lfloor \sum_{j \in J \cup \{v\}} (1-f_j) \right\rfloor = \left\lfloor \sum_{j \in J} (1-f_j) \right\rfloor$$

따라서, P에 속하고 [정리 2] 의 조건 *i)*과 *ii* 를 만족하는 임의의 해 (x, y)에 대해서 $x_v = 0$임을 알 수 있다. 따라서, 모순이 발생하며, 이로부터 정리가 성립함을 알 수 있다. ◆

그러면, 다음 절로 넘어가기 전에, 앞서 서론에서 언급한 바 있는 부등식 (5)와 본 연구에서 제시한 절단평면 생성방안을 통해 얻어지는 부등식 (9)의 관계에 대해 간략히 서술하도록 하겠다. 결론을 말하자면, $p_0 = 1$로 고정하여 얻어지는 부등식 (9)는 부등식(5) 를 포함한다. 이 사실은 $\varnothing$의 정의와 [보조정리 1]로 부터 쉽게 알 수 있다.

다음 절에서는 이제 까지 제시한 이론적 결과를 바탕으로, 앞서 제시된 부등식 (9)의 생성방안, 즉, separation 알고리듬을 구현하고, 이를 통신망 설계와 관련한 현실적인 응용문제에 적용함으로써, 제안된 절단평면 생성방안의 성능을 시험한 결과를 제시하도록 하겠다.

4. 절단평면 생성방안의 성능시험

본 절에서는 앞서 제시된, 절단평면 생성방안을 구현하여, 실제적인 응용문제에 적용함으로써, 그 성능을 시험한 결과를 제시하고자 한다. 그 적용대상 문제로는 통신망 설계시에 발생하는 운용용량 할당문제[13] 로 정하였다. 그 이유는, 이 문제가 현실적인 상황에서 발생하는 문제이고, P를 정의하는 제약식과 같은 형태의 제약식들이 나타나기 때문에, 본 연구의 결과를 직접적으로 적용하여 그

실제적인 성능을 평가해 볼 수 있기 때문이다. 운용용량할당문제와 관련한 자세한 사항에 대해서는 Lee [13] 를 참고하기 바란다. 본 절에서는 적용대상 문제에 대해 간략히 설명하고, 다음으로 실험환경 및 실험문제, 그리고 마지막으로 실험결과 및 분석의 순으로 기술하도록 하겠다.

4.1. 운용용량할당문제

운용용량할당문제는 기간 통신망 설계에서 나타나는 문제이다 [13]. 이 문제는 물리적인 네트워크, 네트워크 상의 노드들 중에서 서로 정보를 주고 받을 필요가 있는 수요 노드쌍들의 집합, 각 수요쌍별 수요량 (양의 정수값), 그리고 네트워크상의 링크에 설치할 수 있는 정해진 용량과 단위 설치비용을 갖는 링크장비들이 주어졌을 때, 각 수요쌍별로 미리 주어진 후보 경로들 중에서 하나의 경로를 선택하고, 모든 수요쌍들이 각각의 정해진 경로를 통해서 동시에 수요를 전달할 수 있도록 최소의 비용으로 각 링크에 설치할 링크장비의 설치개수를 정하는 문제이다. 이 문제는 정수계획모형으로 모형화 될 수 있으며, 이를 위한 기호를 정의하고 모형을 소개하겠다. 먼저, 주어진 물리적인 네트워크를 $G=(V,E)$라고 정의하자.

V: 노드의 집합, E: 링크의 집합,
K: 수요쌍들의 집합,
$P(k)$: 수요쌍 k를 위한 후보 경로들의 집합, $\forall k \in K$
$P(k;e)$: 수요쌍 k를 위한 후보 경로들 중에서 링크 e를 지나는 경로들의 집합, $\forall e \in E$, $\forall k \in K$
r_k: 수요쌍 k의 수요량 (양의 정수값), $\forall k \in K$
a_e: 링크 e에 한 단위의 링크장비를 설치할 때 필요한 비용, $\forall e \in E$
λ: 링크 장비의 용량 (양의 정수값)
y_e: 링크 e에 설치할 링크장비의 개수, $\forall e \in E$

위의 기호들을 이용하여 운용용량할당문제를 정수계획모형으로 정식화하면 다음과 같다.

$$\min \sum_{e \in E} a_e y_e$$
$$\text{s.t.} \sum_{h \in P(k)} x_h = 1, \ \forall k \in K \quad (10)$$
$$\sum_{k \in K} \sum_{h \in P(k,e)} r_k x_h \le \lambda y_e, \ \forall e \in E \quad (11)$$
$$x_h \in \{0,1\}, \ \forall h \in \bigcup_{k \in K} P(k)$$
$$y_e \in Z_+, \ \forall e \in E$$

모든 후보 경로 $h \in \bigcup_{k \in K} P(k)$에 대한 이진변수 x_h는 해당되는 경로가 선택되면 1, 아니면, 0의 값을 갖는 결정변수이다. 제약식 (10)은 각 수요노드쌍별로 주어진 후보경로들 중에서 반드시 하나만을 선택해야 한다는 것을 뜻한다. 제약식 (11)은 각 링크에 설치되는 링크장비들의 총 용량이 그 링크를 지나가는 수요량의 합보다 크거나 같아야 한다는 것을 의미한다. 이론적으로 이 문제는 NP-hard 임이 밝혀져 있다 [13].

위의 정수계획모형에서 각각의 링크에 대한 용량제약을 나타내는 제약식 (11)을 고려하자. 그리고, 다음과 같은 다면체를 정의한다.

$$Q(e) = conv\{ w_e \in B^{|K(e)|}, y_e \in Z_+ : \sum_{h \in K(e)} r_k w_{ek} - \lambda y_e \le 0 \},$$

단, $w_{ek} = \sum_{h \in P(k,e)} x_h$이고 $K(e) = \{k \in K : P(k;e) \ne \emptyset\}$이다. 여기서 w_{ek}는 제약식 (10)에 의해 0 또는 1 의 값을 가진다는 사실을 알 수 있다. 그러면 각각의 링크에 대해 정의되는 $Q(e)$가 본 장의 서두에서 정의된 다면체 P와 본질적으로 동일하다는 것을 알 수 있다. 따라서, 2절에서 제시된 P에 대한 절단평면 생성방안을 제약식 (11)에 직접적으로 적용할 수 있다.

4.2. 실험환경 및 실험문제

실험문제는 네트워크의 노드의 개수가 6과 10인 경우에 대해 각각 10 문제씩 랜덤하게 생성하였다.

하나의 실험문제에 대해서, 먼저, 주어진 노드개수만큼 100×100 2차원 평면상에서 랜덤하게 점(노드)들을 생성시켰다. 그 다음, 노드의 개수가 6인 문제들에 대해서는 네트워크가 완전그래프(complete graph)가 되도록 하였고, 노드의 개수가 10인 경우에는 모든 노드쌍에 대해서 0.5의 확률로 링크를 생성하였다. 또한, 두 경우에서 공히, 각 노드쌍에 대해서 0.5의 확률로 수요쌍이 되도록 하였으며, 수요량은 [1, 10] 사이에서 랜덤하게 생성하였다. 각각의 실험문제에 대해서, 수요량이 양수인 노드쌍에 대해서 각각 3개씩 후보경로를 생성하였다. 이를 위해서, 각 링크의 Euclidean distance, D_e를 구하고, 첫번째, 두번째, 그리고 세번째 최단경로를 구하였다. 그리고 각 실험문제에서, 모든 링크 $e \in E$에 대해서, 한 단위의 링크장비를 설치할 때 필요한 설치비용 a_e는 링크의 거리에 비례한다고 가정하고 D_e로 지정하였다. 링크장비의 용량으로는 $\lambda = 3$과 $\lambda = 12$의 두 가지 경우를 고려하였다. 이는 기간 통신망설계시에 고려하는 통신장비의 용량을 그대로 반영한 것으로서 자세한 사항은 Lee [13]를 참고하기 바란다.

그 다음으로, 2절에서 제시한 절단평면 생성방안을 적용하기 위해서는 부등식 (9)에서의 p_0 값의 범위를 지정해 주어야 한다. 본 실험에서는 그 범위를 [1, λ/3]으로 지정하였다. 마지막으로, 제안된 절단평면 생성방안은 C 언어로 구현되었으며, LP solver로는 CPLEX callable library[3]를 이용하여 SUN/4 workstation(25MHz) 상에서 실험하였다.

4.3. 실험결과 및 분석

본 실험에서는 제안된 절단평면 생성방안이 얼마나 효과적인지를 알아보는 데에 주안점을 두고 있다. 즉, 생성된 절단평면이 얼마나 선형계획완화문제의 bound를 강화할 수 있는지를 중점적으로 살펴보고자 한다. 이를 위해 아래의 GAP이라는 값을 성능기준으로 이용하였다.

$$\text{GAP} : \frac{\text{IP} - \text{LP}}{\text{IP}} \times 100(\%)$$

단, IP는 정수최적해의 목적함수값이고, LP는 문제의 정수조건을 실수조건으로 완화한 선형계획완화문제의 최적 목적함수값이다. GAP은 정수최적해의 목적함수값과 선형계획완화문제의 최적 목적함수값 사이의 상대적인 차이를 나타내는 값으로, 작으면 작을수록 선형계획완화문제의 bound가 강화되었다는 것을 의미한다. GAP을 구하기 위해서는 정수최적해와 제안된 절단평면을 추가시켰을 때 선형계획완화문제의 최적 목적함수값을 구해야 하는데, 이를 위해서 Lee[13]에 제시된 분지-절단 알고리듬 (Branch-and-cut algorithm)을 이용하였다. 이 알고리듬에 대한 자세한 사항은 Lee[13]를 참고하기 바란다. 다음의 <표 1> 은 실험결과를 요약한 것이다.

〈표 1〉 실험결과 요약

노드개수	장비용량		Gap0	Gapf
6	3	AVG	9.06	0.12
		MIN	0.69	0.00
		MAX	15.50	1.23
	12	AVG	34.12	1.57
		MIN	20.04	0.00
		MAX	56.52	6.23
10	3	AVG	6.97	0.33
		MIN	3.71	0.00
		MAX	9.31	1.56
	12	AVG	24.50	5.11
		MIN	19.19	2.45
		MAX	30.33	7.95

<표 1>에서 Gap0는 앞에 정의된 GAP에서 LP의 값으로 절단평면을 추가하지 않은 선형계획완화문제의 최적 목적함수값을 사용한 값이고, Gapf는 제안된 절단평면을 추가했을 경우의 강화된 선형계획완화문제의 최적 목적함수값을 사용한 값이다. 즉, Gap0는 제안된 절단평면을 추가하지 않고, 원래 모형의 선형계획완화문제의 최적 목적함수값과 정수최적해의 목적함수값과의 사이의 상대적인 차이를 나타내고, Gapf는 제안된 절단평면을 구현

된 절단평면 생성방안을 통하여 추가했을 때, 상대적인 차이를 나타낸다. 그리고, AVG, MIN, MAX는 각각 Gap0와 Gapf의 평균값, 최소값, 그리고 최대값을 의미한다. <표 1>에서 나타내지는 않았지만, $\lambda=3$인 경우에 생성된 절단평면들은 지정된 p_0의 범위에 의해 모두 p_0의 값이 1인 경우에 얻어졌다. 그러나, $\lambda=12$인 경우에는 p_0의 값이 1이 아닌 경우에도 효과적인 절단평면들이 생성되었음을 밝혀둔다.

<표 1>을 보면, Gapf의 값이 Gap0의 값에 대해서 매우 크게 감소했으며, 절대적인 값도 매우 작다는 것을 알 수 있다. 이는 본 연구에서 제안된 절단평면 생성방안이 실제적으로도 매우 효과적이라는 사실을 보여주는 것이다. 따라서, 제한적인 실험이기는 하지만, 운용용량할당문제와 같은 용량제약식을 포함한 실제적인 응용문제에 대한 분지-절단 알고리듬에 본 연구에서 제안된 절단평면 생성방안을 이용한다면, 선형계획완화문제의 bound를 강화시키고 분지-한계 트리(Branch-and-bound tree)의 크기를 감소시켜 전체적인 알고리듬의 성능을 향상시킬 수 있을 것으로 기대된다. 실제로 Lee[13]는 본 연구에서 제안된 절단평면 생성방안을 이용하여 운용용량할당문제의 분지-절단 알고리듬을 제시하고, 그 성능이 매우 우수하다는 사실을 입증하는 실험결과를 보여주고 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 일반적인 정수변수를 포함하는 배낭문제에 대한 효과적인 절단평면을 얻기 위해 C-G 절차 (Chvatal-Gomory procedure)를 체계적으로 적용하는 방안을 모색하고, 해당되는 separation 문제를 이론적으로 분석하여, 그 결과를 기초로 하여 효율적인 절단평면 생성방안을 개발하였다. 또한, 개발된 절단평면 생성방안에 의해 생성되는 유효부등식의 효과를 다면체이론을 이용하여 이론적으로 분석하였다. 분석한 결과, 제안된 절단평면 생성방안에 의해 생성되는 유효부등식들이 매우 효과적인 부등식들을 포함하고 있음을 알 수 있었다. 또한, 개발된 절단평면 생성방안의 실제적인 적용성을 평가하기위해, 이를 구현하고, 통신망설계와 관련된 실제적인 응용문제에 전산실험을 통해 적용하였다. 그 결과, 제안된 절단평면 생성방안이 선형계획완화문제의 bound를 대단히 tight하게 강화시킬 수 있다는 사실을 실험적으로 입증하였다.

본 연구에서 제시된 C-G 절차를 이용하여 유도된 절단평면은, 본질적으로는 선형계획완화문제의 최적기저해를 통해 기계적으로 절단평면을 생성하는 Gomory의 절단평면 유도방법[8, 10, 11, 12, 15]을 통해서 얻어질 수 있다. 그러나, Gomory의 방법에 의해 얻어진 절단평면의 경우, 분지-한계 트리(Branch-and-bound tree)의 루트노드(root node)를 제외한 노드들에서 생성된 절단평면은 다른 노드들에서도 유효부등식이라는 보장이 없다. 따라서, 이 경우에는 하나의 노드에서 생성된 절단평면을 다른 노드들에서도 유효한 부등식이 되도록 만들어 주어야 하는 필요가 제기된다. 반면에, 본 연구에서 제시된 절단평면 생성방안은 선형계획완화문제의 최적기저에 의존하지 않으므로, 항상 원래의 주어진 정수계획문제에 대한 유효부등식을 생성할 수 있어서 전자의 경우와 같은 필요성이 제기되지 않는다. 또한, 앞서 밝힌 바와 같이, 본 연구에서 대상으로 하고 있는 다면체 P는 통신망설계 등의 실제적인 응용문제의 부모형으로 자주 나타나며, 따라서 본 연구에서 제시한 절단평면 생성방안이 이러한 실제적인 정수계획문제를 해결하기 위한 분지-절단 알고리듬(Branch-and-cut algorithm)을 개발하는 데에 하나의 유용한 도구를 제공할 것이라고 기대된다.

마지막으로, 본 연구에서 제시된 절단평면 생성방안은 λ값이 커짐에 따라 많은 계산시간을 필요로 한다. 즉, 주어진 비정수해에 의해 위배되어지는 부등식 (9)를 생성하기위한 separation 문제를 완벽하게 해결하기 위해서는 p_0의 범위를 $[1, \lambda-1]$

로 지정하고, 각각의 P_0값에 대해서 $O(n^2\lambda)$만큼의 계산시간이 소요된다. 따라서, separation 문제를 완벽하게 해결할 수는 없다고 하더라도, 빠른 시간내에 효과적인 부등식을 찾아줄 수 있는 separation 문제에 대한 발견적 해법 (Heuristic separation algorithm)이 필요할 것으로 생각된다. 효과적인 발견적 해법을 개발하기 위해서는 크게 다음의 두 가지 측면에서 심도있는 연구가 이루어져야 할 것이다.

첫째로는, p_0의 범위선정 방법에 관한 연구이다. 앞서 3절에서 언급한 바와 같이, p_0의 값이 상대적으로 작은 경우에 생성되는 절단평면이 facet 이 될 가능성이 높지만, 이는 매우 정성적인 판단으로서 효과적인 절단평면의 생성을 위한 실질적인 p_0의 범위선정 방법을 제시하고 있지는 못하다. 따라서, p_0값의 변화에 따른 절단평면의 효과에 대한 이론적 분석과 더불어 효과적인 p_0값의 범위를 선정하는 데에 있어 쓰일 수 있는 실질적인 지침을 제시하기 위한 연구가 반드시 이루어져야 할 것이다.

둘째로는, 주어진 p_0값에 대한 SP(p_0)의 해법에 관한 연구이다. 3절에서는 SP(p_0)의 최적해를 구하기 위한 방법으로서 동적계획법에 기초한 알고리듬을 제시하고 있다. 그러나, 이 알고리듬은 λ값이 커짐에 따라서 매우 많은 계산시간을 필요로 한다. 따라서, SP(p_0) 의 최적해는 보장할 수는 없다고 하더라도, 근사최적해를 빠른 시간내에 구할 수 있는 알고리듬의 개발이 필요하다.

참 고 문 헌

[1] Balas, E., "Facets of Knapsack Polytope", *Mathematical Programming*, Vol.8(1979), pp.146-164.

[2] Balas, E and E. Zemel, "Facets of the Knapsack Polytope from Minimal Covers", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.34 (1978), pp.119-148.

[3] Bixby, R.E. and E. Boyd, *Using CPLEX callable Library*, CPLEX Optimization Inc., 1990.

[4] Brockmuller, B., O. Gunluk and L.A. Wolsey, "Designing Private Line Network-Polyhedral Analysis and Computation", CORE Discussion paper 9647, 1996.

[5] Ceria, S., C. Cordier, H. Marchand and L.A. Wolsey, "Cutting Planes for Integer Programs with Genaral Integer Variables", *Mathematical Programming*, Vol.81(1998), pp.201-214

[6] Daskin, M.S., *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, New York, 1995.

[7] Garey, M.R. and D.S. Johnson, *Computers and Intractibility*, Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[8] Garfinkel, R.S. and G.L. Nemhauser, *Integer programming*, Wiley, New York, 1973.

[9] Glover, F., H.D. Sherali and Y. Lee "Generating Cuts from Surrogate Constraint Analysis for Zero-One and Multiple Choice Programming, *Computational Optimization and Applications*, Vol.8(1997), pp.151-172.

[10] Gomory, R.E., "Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs", *Bulletin of American Mathematical Society*, Vol.64 (1958), pp.275-278.

[11] Gomory, R.E., "Solving linear programming problems in integers, in *Combinatorial Analysis*", R.E. Bellman and M. Hall, Jr., eds., American Mathematical Society, pp.211-216, 1960.

[12] Gomory, R.E., "An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, in *Recent Advances in Mathematical Programming*, pp.

269-302, 1963.

[13] Lee, K., "Routing and Capacity Assignment Models and Algorithms for the Design of Telecommunication Networks", Ph.D Thesis, Department of Industrial Engineering, KAIST, Taejon. Korea, 1998.

[14] Lee, Y. and H-. S. Oh, "A technology selection problem in designing multimedia broadband telecommunication networks under uncertainty", Working paper, US West Advanced Technologies, USA, 1996.

[15] Nemhauser. G.L. and L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988.